*ACTA*
*Vol. 1 - N. 1*

# ASFERICITÀ DI UNA SUPERFICIE IN UN SUO PUNTO ORDINARIO *

UMBERTO CISOTTI

SUMMARIUM. — Disceptat Auctor de peculiari quadam functione rationis curvaturarum principalium quae reducitur ad nullum cum punctus sit sphaericus.
Pro hac functione proponitur ab Auctore nomen: « non-sphaericitas » cuiusdam superficiei.

Sono noti i tentativi fatti allo scopo di definire mediante una sola quantità scalare la curvatura di una superficie in un suo punto ordinario, cioè in un punto ove la superficie ammette un piano tangente e due curvature principali

$$\frac{1}{\rho_1}, \; \frac{1}{\rho_2} .$$

Sorsero così: la *curvatura assoluta* o *di Gauss*

$$\frac{1}{\rho_1 \, \rho_2} ;$$

la *curvatura media* o *di Sophie Germain*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right) ;$$

la *curvatura di Casorati*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right) .$$

* Nota presentata dall'Accademico Pontificio P. Agostino Gemelli O. F. M.

Ciascuna di queste curvature è intimamente connessa a particolari categorie di questioni: così la curvatura gaussiana ha grande importanza in questioni geometriche e in meccanica relativistica, e la curvatura media interessa particolarmente questioni fisico-matematiche. Pur tuttavia nella massima parte dei problemi che riguardano la geometria di un intorno di secondo ordine di un punto ordinario di una superficie intervengono *entrambe* le curvature

$$\frac{1}{\rho_1} \text{ e } \frac{1}{\rho_2} .$$

i Premesso questo, mi sembra non del tutto privo di interesse d ndagare – seguendo una via, sotto un certo punto di vista, inversa ai quella ora rammentata – se è possibile definire uno scalare il quale fornisca una misura del distacco della superficie, in un intorno di secondo ordine del punto prescelto, dalla forma sferica, vale a dire quella che io chiamerei l'*asfericità* della superficie in quel punto.

A questa indagine sono dedicate le considerazioni che seguono, le quali portano alla conclusione seguente, che per la sua semplicità mi sembra degna di rilievo: *supposto* $\rho_1^2 \geqslant \rho_2^2$, *è a dirsi asfericità della superficie l'espressione*

$$\sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}} .$$

La ragione di questa definizione è ampiamente giustificata dalle considerazioni che seguono.

Intanto constatiamo subito che l'asfericità così definita è nulla quando, e solamente quando, è $\rho_1 = \rho_2$, cioè quando si tratta di un punto sferico.

Ha il massimo valore $\sqrt{2}$ quando $\rho_1 = -\rho_2$, quindi per le superficie a curvatura media nulla (superficie di area minima).

Per una superficie cilindrica, avendosi $\rho_1 = \infty$, l'asfericità è $= 1$.

Se $\rho_1$ e $\rho_2$ sono dello stesso segno – e questo avviene quando, in un intorno di secondo ordine, la superficie è tutta da una parte del piano tangente – l'asfericità ha valori compresi tra 0 e 1; nel caso opposto i valori dell'asfericità sono compresi tra 1 e $\sqrt{2}$.

### 1. – Fuochi ed eccentricità degli ellissoidi rotondi allungati.

Si consideri un ellissoide di rotazione: sia $a$ il raggio polare e $b$ quello equatoriale; se, come supporremo, è $a > b$, l'ellissoide è *allungato* e diviene sferico per $a = b$. Tutte le ellissi meridiane sono confocali e hanno comune l'eccentricità

$$[1] \qquad \mathrm{E}_e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\,,$$

che si può definire anche *eccentricità dell'ellissoide* [1]. Se $b = a$ risulta, com'è ovvio, $\mathrm{E}_e = 0$.

### 2. – Fuochi ed eccentricità degli iperboloidi rotondi a una falda.

Si abbia ora un iperboloide di rotazione a una falda. Se si considerano le iperboli meridiane, esse hanno i loro fuochi situati sopra una circonferenza del piano equatoriale. Se, in ogni piano meridiano, si considerano le iperboli coniugate alle corrispondenti sezioni meridiane dell'iperboloide, esse hanno comuni i fuochi, che si possono definire i *fuochi dell'iperboloide.* Conseguentemente si può definire *eccentricità dell'iperboloide rotondo a una falda* l'eccentricità comune a tutte le suaccennate iperboli coniugate, cioè

$$[2] \qquad \mathrm{E}_i = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\,,$$

dove $b$ designa il raggio equatoriale (che misura il semiasse trasverso delle iperboli meridiane) e $a$ il raggio polare (che misura il semiasse

[1] Cfr. Bianchi, *Lezioni di Geometria Analitica*, Pisa, Spoerri, 1920, pag. 539.

trasverso delle iperboli coniugate). Se $a = b$, tutte le iperboli risultano equilatere e quindi $E_i = \sqrt{2}$.

### 3. – Intorno di secondo ordine di un punto ordinario di una superficie.

Sia $z = f(x, y)$ l'equazione di una superficie riferita a un sistema di coordinate cartesiane coll'origine in un suo punto ordinario, l'asse $z$ normale alla superficie, e gli assi $x$, $y$ diretti, nel piano tangente, secondo le direzioni principali. Con queste ipotesi si ha:

$$f(0, 0) = 0 \quad , \qquad f'_x(0, 0) = 0 \quad , \qquad f'_y(0, 0) = 0 \quad ,$$

e le curvature principali risultano essere

$$\frac{1}{\rho_1} = f''_{xx}(0, 0) \qquad , \qquad \frac{1}{\rho_2} = f''_{yy}(0, 0) \quad ;$$

in conseguenza, la superficie può essere rappresentata, in un intorno di secondo ordine del punto $x = y = z = 0$, dalla seguente equazione:

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2}\right) . \tag{3}$$

### 4. – Quadriche centrate osculatrici.

L'equazione

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} + \frac{(z - \nu)^2}{\nu^2} = 1 \quad , \tag{4}$$

rappresenta una quadrica centrata, col centro nel punto $x = 0$, $y = 0$, $z = \nu$, contenente l'origine delle coordinate e avente ivi tangente il

piano $z = 0$. In un intorno di secondo ordine dell'origine, all'equazione [4] si può sostituire la seguente:

$$z = \frac{\nu}{2}\left(\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu}\right) . \qquad [5]$$

Dal confronto di questa relazione colla relazione [3] scende che basta assumere

$$\frac{\nu}{\lambda} = \frac{1}{\rho_1} , \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{1}{\rho_2} ,$$

cioè

$$\lambda = \nu\rho_1 , \quad \mu = \nu\rho_2 , \qquad [6]$$

affinchè *la quadrica* [4] *sia osculatrice della superficie data nell'origine.*

Risulta dalle [6] che, una volta noti $\rho_1$ e $\rho_2$, nella determinazione di $\lambda$ e $\mu$ interviene ancora il parametro $\nu$, che è a priori indeterminato; se ne deduce che *vi è una semplice infinità di quadriche centrate osculatrici in un punto ordinario di una superficie.*

## 5. – Quadriche centrate osculatrici rotonde.

Supponiamo sia $\rho_1^2 \geqslant \rho_2^2$, con che, per le [6], risulta $\lambda^2 \geqslant \mu^2$. Imponiamo alla quadrica, rappresentata dall'equazione [4], di essere rotonda; siccome gli assi di riferimento sono paralleli agli assi della quadrica, se questa è di rotazione il rispettivo asse dovrà avere la stessa direzione di uno dei tre assi di riferimento. Dobbiamo escludere, in massima, che l'asse di rotazione coincida coll'asse $z$ (cioè colla normale alla superficie nel punto in discorso) perchè dovendo allora essere $\lambda = \mu$, per le [6] si esigerebbe fosse pure $\rho_1 = \rho_2$, il che è accordabile solamente quando il punto della superficie sia sferico; in tal caso particolare esiste addirittura una superficie sferica di raggio $\rho_1 = \rho_2$ che, in quel punto, è sfera osculatrice, e si rilevi che dev'essere nulla l'asfericità della superficie in quel punto.

Tornando al caso generale, in cui $\rho_1^2 > \rho_2^2$, la quadrica osculatrice rotonda non può dunque avere per asse di rotazione la normale alla superficie; vogliamo allora indagare se l'asse di rotazione può essere parallelo a una delle direzioni principali, precisamente parallelo all'asse $x$, che si riferisce all'asse di maggiore lunghezza. Dalla [4] scende che in tal caso dev'essere $\mu = \nu^2$, ossia, per la seconda delle [6],

$$\nu = \rho_2 \ , \tag{7}$$

con che le [6] stesse danno per $\lambda$ e $\mu$ le seguenti espressioni:

$$\lambda = \rho_1 \rho_2 \ , \qquad \mu = \rho_2^2 \ . \tag{8}$$

Per queste relazioni, e per la precedente, l'equazione [4] diviene:

$$\frac{x^2}{\rho_1 \rho_2} + \frac{y^2 + (z - \rho_2)^2}{\rho_2^2} = 1 \ . \tag{9}$$

Questa quadrica è un ellissoide allungato se $\rho_1$ e $\rho_2$ sono dello stesso segno, che - senza ledere la generalità - potremo supporre entrambi positivi. Di questo ellissoide: $\sqrt{\rho_1 \rho_2}$ è il semiasse polare, e $\rho_2$ il raggio equatoriale; in conseguenza è [n. 1]:

$$E_e = \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2 - \rho_2^2}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} = \sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

la *eccentricità dell'ellissoide.*

Se $\rho_1$ e $\rho_2$ sono di segni opposti - poniamo $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 < 0$ - la quadrica [9] è un iperboloide rotondo a una falda, che ha $-\rho_2$ per misura del raggio equatoriale e $\sqrt{-\rho_1 \rho_2}$ come misura del raggio non trasverso; ne segue che la *eccentricità di questo iperboloide* (n. 2) è:

$$E_i = \frac{\sqrt{\rho_2^2 - \rho_1 \rho_2}}{\sqrt{-\rho_1 \rho_2}} = \sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \ .$$

Si può concludere che *a ogni punto ordinario di una superficie si può coordinare una quadrica centrata rotonda osculatrice, che è un ellissoide se le curvature principali sono dello stesso segno e un iperboloide*

*a una falda se le dette curvature sono di segno opposto; l'asse di rotazione è parallelo a quella delle direzioni principali a cui corrisponde la minima curvatura: se* $\rho_1^2 \geqslant \rho_2^2$ *la eccentricità è, in ogni caso, definita dall'unica espressione*

$$\sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}} .$$

Questa eccentricità abbiamo creduto opportuno scegliere per misurare l'asfericità della superficie nel punto considerato.