*ACTA*
*Vol. I - N. 4*

# PROBLEMI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI COMPRESSIBILI A VELOCITÀ IPERSONORA*

CARLO FERRARI

SUMMARIUM. — Disputat Auctor de nonnullis problematibus circa motum fluidorum compressibilium cum velocitate ipersonora, et commonstrat recentiores investigationum exitus.

La tendenza moderna di rendere sempre più notevole e più rapido l'incremento della massima velocità degli aeroplani e la necessità di elevare la quota di volo per poter raggiungere detta velocità senza un dispendio inammissibile di potenza hanno provocato un aumento del numero di *Mach* della corrente fluida relativa all'aeroplano tale da rendere fin d'ora di notevole interesse anche per l'aeronautica una serie di problemi che fino a pochi anni or sono appartenevano essenzialmente al campo della balistica.

Il primo e fondamentale di questi problemi *è la determinazione della forza che una corrente gassosa uniforme di velocità ipersonora esercita sopra l'ostacolo in essa immerso*: com'è noto, tale forza non è diretta normalmente al vento relativo, anche nell'ipotesi di fluido perfetto, come per il fluido a velocità iposonora, ma ammette anche una componente nella direzione del vento stesso, la così detta « resistenza d'onda », che per i corpi, che presentano maggiore interesse nelle applicazioni, costituisce una gran parte della loro resistenza effettiva. Ne deriva che la considerazione del fluido come perfetto per le correnti ipersonore consente una schematizzazione del fenomeno assai più prossima alla realtà, e pertanto conduce a risultati assai più attendibili, che nei movimenti a velocità inferiore a quella del suono, nei quali

* Nota presentata dall'Accademico Pontificio Modesto Panetti.

la viscosità ha sulla configurazione della corrente un effetto assai maggiore di quello della compressibilità.

La determinazione della forza sull'ostacolo richiede il calcolo della velocità del fluido a contatto del corpo stesso: nei limiti entro i quali l'ipotesi della esistenza della funzione potenziale può essere accettata la soluzione del problema fu data da Prandtl e da Busemann per il caso più semplice di moto piano. Il procedimento seguito si basa sul metodo delle « caratteristiche » della equazione differenziale, che è del tipo di Monge-Ampère, che definisce la funzione potenziale $\Phi$, e la soluzione risulta particolarmente semplice perchè ciascuno dei due sistemi di caratteristiche dell'equazione stessa ammette una combinazione integrabile. Un procedimento analogo è stato da me usato per la determinazione del campo di velocità attorno a un solido di rivoluzione a prora acuminata nel caso più generale in cui la direzione della corrente forma un angolo piccolo con quella del suo asse. L'equazione che definisce la $\Phi$ è ora

$$[1] \quad \left(1 - \frac{u^2}{V_s^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{V_s^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{w^2}{V_s^2}\right) \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} -$$

$$- \frac{2uv}{V_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{2uw}{V_s^2} \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial x} - \frac{2vw}{V_s^2} \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial y} + \frac{v}{y} = 0$$

nella quale $x$ (coincidente coll'asse del corpo), $y$ e $\varphi$ sono le coordinate cilindriche di riferimento, mentre $u$, $v$, $w$ sono le corrispondenti componenti della velocità, e $V_s$ è la velocità del suono. Le superficie caratteristiche della (1) sono le superficie inviluppo dei coni di Mach che hanno i vertici nei punti in corrispondenza dei quali comincia a propagarsi in seno al fluido una perturbazione del campo di velocità, e che separano la regione del campo in cui la perturbazione stessa si propaga da quella che rimane indisturbata. Per ogni linea del campo contenuta in un piano normale all'asse $x$ passano due schiere di superficie caratteristiche, le cui normali sono simmetricamente inclinate rispetto alla direzione della velocità. Se pertanto si intersecano le superficie stesse con un fascio di piani meridiani e con una schiera di piani perpendicolari ad $x$ si vengono a determinare fra questi piani e dette superficie una serie di cellette elementari: note le velocità in quattro vertici della base di una di queste cellette è possibile procedendo lungo

gli spigoli di esse calcolare le velocità negli altri vertici, e così, passando da una celletta alla successiva, in tutto il campo.

Il procedimento esposto permette di determinare per un dato ostacolo la pressione che il fluido esercita sopra ogni punto della sua prora, e quindi il contributo sulla resistenza totale della forza che si esercita sopra la prua stessa (*resistenza d'ogiva*). Ora è ovvia la convenienza di ridurre tale resistenza al valor minimo possibile, e pertanto al problema ora esaminato si riconnette intimamente l'altra questione di *determinare la forma del solido a minima resistenza di prora a parità di sezione massima.* Dal punto di vista matematico il quesito si traduce nel problema « isoperimetrico » di trovare una funzione $y = f(x)$ che, fra tutte quelle per cui

$$[2] \qquad \int_0^l \frac{dy}{dx}\, dx = \text{costante}$$

rende minimo

$$[3] \qquad \int_0^l \Delta p \,\frac{dy}{dx}\, dx$$

per il moto piano, oppure

$$[4] \qquad \int_0^l \Delta p y \,\frac{dy}{dx}\, dx$$

per quello simmetrico attorno all'asse $x$, avendo indicato con $\Delta p$ la sovrapressione, rispetto alla pressione della corrente indisturbata, in corrispondenza dell'elemento $ds$ di contorno del solido di ordinata $y$, mentre $l$ è la distanza dal vertice di prora della sezione di massima ordinata $D$. Nel caso piano la soluzione è facile e dà come profilo del solido ottimo quello costituito da due segmenti di retta simmetricamente inclinati sull'asse $x$ dell'angolo la cui tangente è $\pm \frac{D}{l}$. Molto più complesso è il problema per il corpo di rivoluzione; per questo KÁRMÁN diede una soluzione approssimata servendosi dei risultati da lui ottenuti rendendo lineare l'equazione differenziale che definisce la funzione potenziale $\Phi$, ed ottenne quale linea meridiana del solido ottimo *l'ellisse.*

Questo risultato non appare del tutto soddisfacente perchè non essendo la prora acuminata la teoria non risulta più applicabile; d'altra parte è importante osservare che non sembra che il risultato stesso sia una conseguenza delle semplificazioni apportate. Di fatto se si ammette di poter porre:

$$\Delta p = f\left(x\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dx}\right)$$

e si indica:

$$\mathrm{F} = fy\,\frac{dy}{dx} \quad ; \quad \mathrm{G} = \frac{dy}{dx}$$

l'estremale dell'integrale [4] che soddisfa alla [2] è soluzione dell'equazione

$$[5] \qquad \frac{\partial}{\partial y}\,(\mathrm{F} - k\,\mathrm{G}) - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial}{\partial y'}\,(\mathrm{F} - k\,\mathrm{G}) = 0$$

in cui è $y' = \dfrac{dy}{dx}$ e $k$ è una costante.

Si ha pertanto

$$[6] \qquad yy''\left(2\, f'_{y'} + f''_{y'y'}\right) + y'^2 f'_{y'} + yy'^2 f''_{yy} + f'_x\, y + yy'\, f''_{xy'} = 0$$

Ora dalla [6] si riconosce che per $y = 0$, non potendo ovviamente essere la $f$ e le sue derivate infinite, a meno che non sia contemporaneamente $y' = \infty$, e non considerando la soluzione $y' = 0$, che non può corrispondere fisicamente alla condizione di minimo, dev'essere infinita o la $y''$ o la $y'$: ma è facile vedere che se la $y''$ è infinita per $y = 0$ dello stesso grado di $y$, è pure infinita la $y'$. Si ha di fatto in questa ipotesi, nell'intorno di $y = 0$, $y'^2 = a \log y$. Appare pertanto da un lato la convenienza di rendere la prora dell'ostacolo la meno appuntita possibile, compatibilmente colla condizione che l'onda d'urto si formi a contatto della prora stessa, e dall'altro la necessità di porre il problema della ricerca della ogiva ottima sotto un'altra forma.

I medesimi metodi che permettono di calcolare le velocità e le pressioni sopra la prora di un ostacolo consentono di determinare le analoghe grandezze per la poppa, se questa, come la prora, è acuminata, o, in ogni caso, se la velocità della corrente è sufficientemente grande perchè la deviazione che la direzione della velocità del fluido riceverebbe sul contorno del solido, se il fluido stesso lo circuisse in modo completo, risulti maggiore di quella corrispondente alla espansione limite fino alla pressione nulla. In queste condizioni di fatto il gradiente di pressione sull'ostacolo è sempre negativo e di conseguenza non si può determinare nello strato limite alcuna corrente di regresso capace di produrre un distacco della vena dal corpo. Ma se la poppa è arrotondata o termina con una parete piana normale all'asse di simmetria del solido, e la velocità della corrente non ha il valore limite sopra definito, una circuitazione completa del contorno dell'ostacolo da parte del fluido non è possibile, perchè in tal caso verrebbero a confluire in un punto della poppa due vene fluide che una continua espansione ha portato a velocità sempre maggiori, e che dovrebbero pertanto, attraverso ad un'onda d'urto, ristabilire la loro pressione al valore asintotico corrispondente alla corrente indisturbata e deviare la loro velocità di 90°. Si è pertanto indotti ad ammettere che il fluido si distacchi dalla parete del corpo creando una superficie di discontinuità della velocità, contorno di una scia vorticosa: il problema della scia nei fluidi a velocità ipersonora offre un campo di ricerche, per le quali non esiste tuttora alcuno studio, neppure qualitativo; ed è appena necessario rilevare la grande importanza che esso presenterebbe per le indicazioni che potrebbero dare sul contributo dato dalla poppa sulla resistenza totale.

La validità dei risultati delle teorie cui sopra si è accennato è limitata dalla ipotesi della esistenza della funzione potenziale. Ora un recente importante studio di L. Crocco ha messo in evidenza, nell'ipotesi di moto permanente e di fluido isoenergetico, la dipendenza della rotazione delle particelle fluide dal gradiente di entropia, conseguenza dello stato non barotropico del fluido dopo l'onda d'urto; ed ha pure indicato come sia possibile costruire una teoria più generale sostituendo alla funzione potenziale una nuova funzione di corrente. Questa nuova via di ricerca, che sarà certo feconda di brillanti risultati, è però possibile, almeno per ora, soltanto per i moti permanenti piani o simme-

trici attorno ad un asse. Manca cioè nella teoria dei fluidi compressibili a velocità ipersonora una funzione corrispondente a quella che in idrodinamica è il *potenziale vettoriale* della velocità.

Le questioni a cui si è fatto cenno appartengono a problemi di moto permanente. Ma le scienze applicate richiedono alla dinamica dei gas la risoluzione di una serie di problemi inerenti anche al moto vario. Di fatto, ad esempio, le sezioni estreme delle pale d'elica negli aeroplani molto veloci hanno già velocità molto prossime, ed in qualche caso superiore, alla velocità del suono. La necessità di avere per i profili corrispondenti una efficienza aerodinamica sufficientemente elevata porta ad adottare profili molto sottili. Si presenta pertanto subito il pericolo di vibrazioni dei profili stessi e la necessità di dedurre col calcolo il loro comportamento aerodinamico nel fenomeno vibratorio sia per determinare l'influenza di questo sulle loro caratteristiche di portanza e di resistenza, sia per assicurare che il fenomeno aerodinamico non diventi esso stesso eccitatore delle vibrazioni. Nella ipotesi della esistenza della funzione potenziale e limitatamente al problema piano, la risoluzione di questo può essere tentata collo stesso metodo delle caratteristiche già indicato; il procedimento è però alquanto complesso in quanto, a parte la laboriosità dei calcoli, l'onda d'urto non ha più una configurazione fissa nello spazio, ma si sposta e varia di forma col tempo. D'altra parte la validità dei risultati che per tal via si potrebbero ottenere sarebbe ancor più che pei moti permanenti infirmato dalla ipotesi della irrotazionalità del movimento. Ora è possibile dal teorema di BYERKNES, la cui validità è affatto generale, dedurre anche per il problema ora in esame una relazione tra la variazione della rotazione delle particelle fluide del campo di moto ed il gradiente di entropia che si genera in conseguenza dell'evoluzione che l'aria compie attraversando l'onda d'urto; si ricava di fatto con semplici trasformazioni

$$\rho \ \mathrm{rot} \frac{d}{dt} \mathbf{V} = \mathrm{A} \ \mathrm{grad}\, p \wedge \mathrm{grad}\, s$$

in cui $\mathbf{V}$ è la velocità del fluido, $p$ la sua pressione ed $s$ l'entropia. Ma uno studio completo della questione si presenta così irto di difficoltà da far desiderare, almeno come primo orientamento, una soluzione approssimata del problema nelle condizioni particolarmente semplici

quali sono offerte dalla ipotesi di perturbazioni piccolissime introdotte dall'ostacolo nel suo moto vibratorio nel campo di moto, ipotesi che consente di rendere lineari le equazioni del movimento. È appena necessario però far rilevare la grande importanza che uno studio rigoroso presenterebbe non soltanto per l'aeronautica, ma anche per le ricerche sulla formazione e sulla propagazione dell'onda di detonazione nelle miscele esplosive, alle quali sono direttamente interessate la balistica e la teoria dei motori a combustione interna.