ACTA
Vol. I - N. 9

SU ALCUNE PROPRIETÀ DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEI CAMPI VETTORIALI (*)

F. ODONE

SVMMARIVM. — Demonstrantur duae proprietates geometriae differentialis validae: prima, de qualibet congruentia linearum; altera, de omni complexu rectilineo.

Denique notatur possibilitas determinandi aequationem geodeticam cuiuslibet et universae superficiei.

I. — ENUNCIAZIONE DELLE PROPRIETÀ CHE SI VOGLIONO DIMOSTRARE.

Si abbia un campo vettoriale qualunque, definito da un vettore $\mathbf{u}$ funzione nota del punto generico P dello spazio. Si possono associare al campo i seguenti due elementi geometrici:

1° il sistema delle sue linee di forza, cioè la congruenza di linee definita da

$$\mathbf{u} \wedge d\mathrm{P} = 0 \ ;$$

2° l'insieme delle rette ottenute conducendo per ogni punto P la retta parallela al vettore $\mathbf{u}$.

È chiaro che questi due elementi geometrici rimangono gli stessi se invece del vettore $\mathbf{u}$ si considera il vettore $l\mathbf{u}$, essendo l un numero

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 10 aprile 1937.

qualunque funzione di P (1), e che per averli entrambi basta considerare il vettore unitario $\mathbf{u}/\mathrm{mod}\,\mathbf{u}$, vettore che nel seguito indicheremo sempre con $\mathbf{t}$.

Ciò posto, supponiamo di saper esprimere, com'è effettivamente sempre possibile, $\mathbf{t} = \mathbf{u}/\mathrm{mod}\,\mathbf{u}$ nella forma seguente:

$$\mathbf{t} = \mathrm{grad}\, m + \lambda\, \mathrm{grad}\, \psi \ ,$$

essendo m, λ, ψ dei numeri funzioni di P (2).

Vogliamo allora dimostrare che valgono le due proprietà seguenti:

1° sia $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{b}$ il triedro principale in ogni punto delle linee di forza $\mathbf{u} \wedge d\mathrm{P} = 0$, ed $1/\rho$ la 1a curvatura in questo stesso punto; si ha

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{t} = \mathrm{grad}\, m \times \mathrm{grad}\, \lambda \wedge \mathrm{grad}\, \psi \cdot \mathbf{t} + 1/\rho \cdot \mathbf{b}$$

e quindi il vettore $\mathrm{rot}\,\mathbf{t}$ sta nel piano rettificante delle linee di forza $\mathbf{u} \wedge d\mathrm{P} = 0$;

2° supponiamo che l'insieme delle rette, ottenute conducendo per ogni punto P la retta parallela al vettore $\mathbf{u}$ in questo stesso punto, formi un complesso; diciamo che da questo complesso si possono ricavare delle congruenze *normali* di rette (problema di TRANSON generalizzato) (3); e precisamente, essendo M il punto che descrive una superficie $\psi =$ costante (superficie vorticosa rispetto al vettore $\mathbf{t}$) si ha che il punto Q, dato da

$$\mathrm{Q} = \mathrm{M} + [h(\psi) - m] \cdot \mathbf{t} \ ,$$

dove $h(\psi)$ è un numero funzione qualunque della sola ψ e dove i valori delle varie quantità sono calcolati in corrispondenza della posizione

(1) Quest'osservazione prova, com'è noto, che campi anche tra loro assai diversi possono avere le stesse linee di forza, le quali quindi non sono un elemento intrinseco del campo.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi Vettoriale Generale*, vol. I: *Trasformazioni lineari*, pag. 253, Bologna, Zanichelli, 1929. Nel seguito indicheremo tale opera col richiamo *A. V. G.*, I; indicheremo il volume II: *Geometria differenziale* (a cura di P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI) col richiamo *A. V. G.*, II.

(3) Si veda P. APPELL, *Traité de mécanique rationelle*, tomo 3°, pag. 463, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

di M, descrive una superficie perpendicolare alle rette M $\mathbf{u}$; così pure, essendo M il punto che descrive una superficie $\lambda =$ costante (superficie vorticosa rispetto al vettore $\mathbf{t}$), si ha che il punto Q, dato da

$$Q = M + [g(\lambda) - (m + \lambda\psi)] \cdot \mathbf{t} \ ,$$

dove $g(\lambda)$ è un numero funzione qualunque della sola λ e dove i valori delle varie quantità sono calcolati in corrispondenza della posizione di M, descrive una superficie perpendicolare delle rette M $\mathbf{u}$.

Le due proprietà ora enunciate si semplificano se si ha $\operatorname{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$ e quindi anche $\operatorname{rot}\mathbf{t} \times \mathbf{t} = 0$ (caso esaminato dal prof. CALDONAZZO) (1); ovvero se si ha $\operatorname{rot}\mathbf{t} = 0$ (caso esaminato dal prof. BURALI-FORTI) (2).

Ma prima di fare la dimostrazione di quanto abbiamo enunciato, conviene richiamare alcune note proprietà delle superfici vorticose rispetto a un vettore, proprietà di cui ci serviremo più avanti.

II. — RICHIAMO DI ALCUNE NOTE PROPRIETÀ DELLE SUPERFICI VORTICOSE RISPETTO A UN VETTORE.

Sia f un numero funzione del punto generico P dello spazio. Nel seguito indicheremo con d_f un differenziale corrispondente ad uno spostamento qualunque *tangente* alla superficie $f =$ costante (3); avremo quindi in particolare $\operatorname{grad} f \times d_f P = 0$. Sia poi $\mathbf{u}$ un vettore funzione di P. Se è soddisfatta la condizione

$$\operatorname{grad} f \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \ ,$$

si dice che le superfici $f =$ costante sono superfici vorticose rispetto ad $\mathbf{u}$.

(1) B. CALDONAZZO, *Sulla geometria differenziale di superficie* ecc., «Rend. Acc. Lincei», vol. XXXIII, serie 5ª, 1924.

(2) C. BURALI-FORTI, *Fondamenti di geometria differenziale* ecc., «Rend. Circ. Matem. di Palermo», tomo 33, 1911.

(3) Esso non è altro che il *differenziale superficiale* nel senso di BOGGIO (*A. V. G.*, II, pag. 177).

*

Valgono allora le due note proprietà seguenti [1]:

1° Su una superficie f = costante, vorticosa rispetto ad $\mathbf{u}$, l'espressione $\mathbf{u} \times d_f \mathrm{P}$ è un differenziale esatto in due variabili;

2° Posto, come è sempre possibile,

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} m + \lambda \operatorname{grad} \psi \ ,$$

con m, λ, ψ, numeri funzioni di P, si ha che le superfici λ = costante, ψ = costante sono superfici vorticose rispetto ad $\mathbf{u}$, cioè risulta

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \times \operatorname{grad} \lambda = 0 \ , \qquad \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \operatorname{grad} \psi = 0 \ ,$$

e risulta pure

$$\mathbf{u} \times d_m \mathrm{P} = \lambda \, d_m \psi \ ,$$

$$\mathbf{u} \times d_\psi \mathrm{P} = d_\psi m \ ,$$

$$\mathbf{u} \times d_\lambda \mathrm{P} = d_\lambda m + \lambda \, d_\lambda \psi = d_\lambda (m + \lambda \psi) \ .$$

III. — DIMOSTRAZIONE DELLE PROPRIETÀ ENUNCIATE.

Sia $\mathbf{u}$ un vettore qualunque e supponiamo di saper porre $\mathbf{t} = \dfrac{\mathbf{u}}{\operatorname{mod} \mathbf{u}}$ sotto la forma

$$\mathbf{t} = \operatorname{grad} m + \lambda \operatorname{grad} \psi \ .$$

Vogliamo allora dimostrare le due proprietà sopra enunciate.

1ª proprietà. – Sia $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ il triedro principale in un punto qualunque delle linee di forza $\mathbf{u} \wedge d\mathrm{P} = 0$ ed $1/\rho$ la 1^a curvatura in questo stesso punto; si ha allora

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} = \operatorname{grad} m \times \operatorname{grad} \lambda \wedge \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{t} + 1/\rho \cdot \mathbf{b}$$

[1] *A. V. G.*, I, pag. 250 e 253.

Dimostrazione. – Poniamo

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} = x\,\mathbf{t} + y\,\mathbf{n} + z\,\mathbf{b} \ .$$

Da $\mathbf{t} = \operatorname{grad} m + \lambda \operatorname{grad} \psi$ si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} = \operatorname{grad} \lambda \wedge \operatorname{grad} \psi$$

e quindi

$$x = \operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t} = \operatorname{grad} m \times \operatorname{grad} \lambda \wedge \operatorname{grad} \psi \ .$$

Si ha poi, per le formule di FRENET,

$$\frac{d\,\mathbf{t}}{d\,\mathrm{P}}\ \mathbf{t} = \frac{1}{\rho}\ \mathbf{n} \ .$$

Da $\dfrac{d\,\mathbf{t}}{d\,\mathrm{P}} = \mathrm{K}\ \dfrac{d\,\mathbf{t}}{d\,\mathrm{P}} + \operatorname{rot} \mathbf{t} \wedge$ e da $\mathrm{K}\ \dfrac{d\,\mathbf{t}}{d\,\mathrm{P}}\ \mathbf{t} = 0$, si ha pure

$$\frac{d\,\mathbf{t}}{d\,\mathrm{P}}\ \mathbf{t} = \operatorname{rot} \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} \ .$$

E poichè

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} = z\,\mathbf{n} - y\,\mathbf{t} \ ,$$

risulta

$$z\,\mathbf{n} - y\,\mathbf{t} = 1/\rho \cdot \mathbf{n}$$

e quindi

$$y = 0 \quad , \qquad z = 1/\rho \ .$$

2ª proprietà. – Sia M il punto che descrive una superficie $\psi =$ costante (superficie vorticosa rispetto al vettore $\mathbf{t} = \operatorname{grad} m + \lambda \operatorname{grad} \psi$); si ha allora che il punto Q, dato da

$$\mathrm{Q} = \mathrm{M} + [h(\psi) - m] \cdot \mathbf{t} \ ,$$

dove $h(\psi)$ è una funzione della sola ψ, descrive una superficie perpendicolare alla congruenza di rette $M\mathbf{u}$.

Così pure, sia M il punto che descrive una superficie $\lambda =$ costante (superficie vorticosa rispetto al vettore $\mathbf{t} = \mathbf{u}/\mathrm{mod}\,\mathbf{u}$); si ha allora che il punto Q, dato da

$$Q = M + [g(\lambda) - (m + \lambda\psi)] \cdot \mathbf{t} \ ,$$

dove $g(\lambda)$ è una funzione della sola λ, descrive una superficie perpendicolare alla congruenza di rette $M\mathbf{u}$.

Dimostrazione. – La verifica dell'enunciato è immediata. Infatti si ha:

$$dQ = dM + d[h(\psi) - m] \cdot \mathbf{t} + [h(\psi) - m] \cdot d\mathbf{t} \ ,$$

$$dQ \times \mathbf{t} = dM \times \mathbf{t} + d[h(\psi) - m] \ ,$$

e quindi, per $\psi =$ costante,

$$d_\psi Q \times \mathbf{t} = d_\psi M \times \mathbf{t} - d_\psi m = d_\psi m - d_\psi m = 0 \ .$$

Allo stesso modo si ha:

$$dQ \times \mathbf{t} = dM \times \mathbf{t} + d[g(\lambda) - (m + \lambda\psi)]$$

e quindi, per $\lambda =$ costante,

$$d_\lambda Q \times \mathbf{t} = d_\lambda M \times \mathbf{t} - d_\lambda (m + \lambda\psi) = d_\lambda (m + \lambda\psi) - d_\lambda (m + \lambda\psi) = 0 \ .$$

La proprietà è così verificata. Ma vogliamo anche far la dimostrazione in modo da giustificare più diffusamente l'origine del risultato ottenuto. Per questo, sia $\mathbf{u}$ un vettore qualunque funzione del punto generico P dello spazio. Poniamo

$$R = P + l\mathbf{u} \ ,$$

e vediamo se è possibile far muovere P su una superficie $\psi =$ costante

e se è possibile determinare il numero l, in funzione di P, in modo che R descriva una superficie perpendicolare alla congruenza di rette $\mathrm{P}\mathbf{u}$, il punto P appartenendo alla superficie $\psi =$ costante. Si può intanto scrivere:

$$\mathrm{R} = \mathrm{P} + l\mathbf{u} = \mathrm{P} + l \operatorname{mod} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}/\operatorname{mod} \mathbf{u} = \mathrm{P} + l_1 \mathbf{u}_1 \ ,$$

essendo $l_1 = l \operatorname{mod} \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}/\operatorname{mod} \mathbf{u}$.

Si ha in generale;

$$d\mathrm{R} = d\mathrm{P} + d\,(l_1 \mathbf{u}_1) = d\mathrm{P} + \frac{d\,(l_1 \mathbf{u}_1)}{d\mathrm{P}}\, d\mathrm{P}$$

e quindi

$$\begin{aligned} d\mathrm{R} \times \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_1 \times d\,\mathrm{P} + \frac{d\,(l_1 \mathbf{u}_1)}{d\mathrm{P}}\, d\mathrm{P} \times \mathbf{u}_1 = \\ &= \left[\mathbf{u}_1 + \mathrm{K}\, \frac{d\,(l_1 \mathbf{u}_1)}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{u}_1\right] \times d\mathrm{P} = \\ &= \left[\mathbf{u}_1 + \frac{1}{l_1}\, \mathrm{K}\, \frac{d\,(l_1 \mathbf{u}_1)}{d\mathrm{P}}\, (l_1\, \mathbf{u}_1)\right] \times d\mathrm{P} = \\ &= \left[\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2\,l_1} \operatorname{grad}\,(l_1^2\, \mathbf{u}_1^2)\right] \times d\mathrm{P} = \\ &= \left[\mathbf{u}_1 + \operatorname{mod} \mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{grad}\,(l_1 \operatorname{mod} \mathbf{u}_1)\right] \times d\mathrm{P} \ . \end{aligned}$$

Questo risultato vale qualunque sia il valore di $\operatorname{mod} \mathbf{u}_1$; ma se $\operatorname{mod} \mathbf{u}_1 = 1$, si ha

$$d\mathrm{R} \times \mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_1 + \operatorname{grad} l_1) \times d\mathrm{P} \ .$$

Se vogliamo che, muovendosi P su una superficie $\psi =$ costante, risulti $d_\psi \mathrm{R} \times \mathbf{u}_1 = 0$, dovrà essere

[1] $$(\mathbf{u}_1 + \operatorname{grad} l_1) \times d_\psi \mathrm{P} = 0 \ .$$

E poichè $\operatorname{grad} l_1 \times d_\psi \mathrm{P} = d_\psi l_1$ è un differenziale esatto in due variabili, anche $\mathbf{u}_1 \times d_\psi \mathrm{P}$ dovrà essere un differenziale esatto in due variabili, e quindi $\psi =$ costante dev'essere una *superficie vorticosa* rispetto ad $\mathbf{u}_1$, ossia si deve avere

[2] $$\operatorname{grad} \psi \times \operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = 0 \ .$$

Poichè $\mathbf{u}_1 \times d_\psi \mathrm{P}$ è un differenziale esatto, avremo

[3] $$\mathbf{u}_1 \times d_\psi \mathrm{P} = d_\psi m \ .$$

Ed allora, per [2] e [3] sarà necessariamente

$$\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad} m + \lambda \operatorname{grad} \psi \ ,$$

ovvero

$$\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad} m + \psi \operatorname{grad} \chi \ .$$

La [1] diventa così

$$d_\psi m + d_\psi l_1 = 0 \ ,$$

ovvero

$$d_\psi (m + \psi\chi) + d_\psi l_1 = 0 \ ;$$

e da queste si ricava

$$l_1 = h(\psi) - m$$

con $h(\psi)$ funzione della sola ψ, ovvero

$$l_1 = g(\psi) - (m + \psi\chi) \ ,$$

con $g(\psi)$ funzione della sola ψ.

In questo modo abbiamo ottenuto la proprietà sopra verificata.

IV. — ESAME DI DUE CASI PARTICOLARI.

1° caso. – Supponiamo che sia

$$\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \ .$$

Posto $\mathbf{t} = \mathbf{u}/\operatorname{mod} \mathbf{u}$, risulta pure

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t} = 0 \ .$$

Infatti si ha:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{u}}{\operatorname{mod} \mathbf{u}}\right) = \frac{1}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\operatorname{mod} \mathbf{u}}\right) \wedge \mathbf{u}$$

e quindi

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{u}}{\operatorname{mod} \mathbf{u}}\right) \times \mathbf{u} = \frac{1}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} \ .$$

Ma in tal caso si ha (¹)

$$\mathbf{u} = \lambda \operatorname{grad} \psi$$

e quindi

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{u}}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} = \frac{\lambda \operatorname{grad} \psi}{\operatorname{mod} (\lambda \operatorname{grad} \psi)}$$

Le linee di forza $\mathbf{u} \wedge d\mathrm{P} = 0$ costituiscono una congruenza normale di linee, e precisamente esse sono le traiettorie ortogonali delle superfici $\psi =$ costante.

(¹) *A. V. G.*, 1, pag. 251.

Si ottengono le proprietà corrispondenti a quelle esaminate nel caso generale facendo $m=0$. In particolare si ha [1]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} = 1/\rho \cdot \mathbf{b} \quad .$$

2° caso. – Supponiamo che sia

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} = 0 \quad .$$

In tal caso si ha [2]

$$\mathbf{t} = \mathbf{u}/\operatorname{mod} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \psi \qquad \text{con} \qquad \operatorname{mod} \operatorname{grad} \psi = 1 \quad .$$

Le superfici $\psi =$ costante sono superfici parallele e quindi le linee $\mathbf{u} \wedge d\mathrm{P} = 0$ costituiscono una congruenza normale di rette, precisamente la congruenza di rette normale alle superfici $\psi =$ costante.

V. — OSSERVAZIONI.

Se $\varphi(\mathrm{P}) =$ costante è l'equazione di una superficie, il vettore unitario $\operatorname{grad} \varphi/(\operatorname{mod} \operatorname{grad} \varphi)$ è normale alla superficie ed è soddisfatta la condizione

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{grad} \varphi}{\operatorname{mod} \operatorname{grad} \varphi}\right) \times \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad .$$

D'altra parte, affinchè un vettore unitario $\mathbf{n}$ possa essere considerato come vettore normale ad una superficie dev'essere, com'è ben noto, $\operatorname{rot} \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$; ma in tal caso si ha

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} \varphi}{\operatorname{mod} \operatorname{grad} \varphi} \quad .$$

(1) B. Caldonazzo, *loc. cit.*

(2) *A. V. G.*, I, pag. 254.

Si conclude quindi che una superficie *qualunque*, avente normale definita in ogni suo punto, è *sempre* individuabile nella forma $\varphi(\mathrm{P}) =$ costante. In altri termini: non solo $\varphi(\mathrm{P}) =$ costante rappresenta una superficie, ma una *qualunque* superficie può sempre essere individuata da $\varphi(\mathrm{P}) =$ costante, essendo $\varphi(\mathrm{P})$ un numero funzione del punto P.

Ma si può dire qualcosa di più. Si abbia una superficie qualunque. A questa superficie associamo il sistema delle superfici ad essa geodeticamente parallele [1] e sia $\mathbf{n}$ il vettore unitario normale a queste superfici. Si ha:

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{n} = 0\ , \quad \mathrm{K}\,\frac{d\mathbf{n}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{n} = 0\ ,$$

e perciò, essendo $\frac{d\mathbf{n}}{d\mathrm{P}} = \mathrm{K}\,\frac{d\mathbf{n}}{d\mathrm{P}} + \mathrm{rot}\,\mathbf{n} \wedge$, risulta

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = 0\ .$$

Ma è pure

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$$

e quindi si ha

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{n} = 0\ .$$

Ne viene

$$\mathbf{n} = \mathrm{grad}\,\psi\ , \qquad \text{con} \qquad \mathrm{mod\,grad}\,\psi = 1\ .$$

Ciò significa che non solo una superficie qualunque può essere individuata da $\psi(\mathrm{P}) =$ costante, ma che inoltre il numero ψ si può *sempre*, *qualunque* sia la superficie, scegliere in modo che risulti

$$\mathrm{mod\,grad}\,\psi = 1\ .$$

---

[1] *A. V. G.*, II, pag. 174.

Quando una superficie sia data da $\psi(P)=$costante con mod grad $\psi=1$, diremo che si conosce l'*espressione geodetica* della superficie stessa, e ciò perchè il sistema di superfici $\psi(P)=$costante è formato da superfici fra loro geodeticamente parallele (1).

Novembre 1936.

---

(1) Tanto il mio indimenticabile Maestro, il prof. BURALI-FORTI, nella nota già citata, quanto il prof. BURGATTI nell'opera *Analisi Vettoriale Generale*, vol. II, parte 1ª, suppongono di conoscere l'espressione geodetica di una qualunque superficie. Infatti il prof. BURALI-FORTI fa esplicitamente l'ipotesi $\operatorname{rot}\mathbf{n}=o$. Il prof. BURGATTI suppone $\frac{d\mathbf{n}}{dP}\mathbf{n}=o$ e dimostra che dev'essere $\operatorname{rot}_s\mathbf{n}=o$ (si veda *A.V.G.*, II, pag. 29); ma essendo $\operatorname{rot}_s\mathbf{n}=\operatorname{rot}\mathbf{n}-\mathbf{n}\wedge\frac{d\mathbf{n}}{dP}\mathbf{n}$ (si veda *A.V.G.*, I, pag. 226), da $\operatorname{rot}_s\mathbf{n}=o$ e $\frac{d\mathbf{n}}{dP}\mathbf{n}=o$ segue pure $\operatorname{rot}\mathbf{n}=o$. L'ipotesi, *sempre possibile*, $\operatorname{rot}\mathbf{n}=o$ serve a semplificare lo studio delle proprietà delle superfici, perchè con questa ipotesi l'omografia $\frac{d\mathbf{n}}{dP}$ risulta una dilatazione.