

L'AZIONE AERODINAMICA SUL PROFILO OSCILLANTE ALLE VELOCITÀ ULTRASONORE (*)

(Con sette figure)

CAMILLO POSSIO

(Laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino)

SVMMARIVM. — Inquiri Auctor, adhibita methodo linearizationis aequationis continuitatis, in motibus oscillationis subtilis laminae, quos currens uniformis hypersonora constantis velocitatis aggreditur. Coefficientia portantiae et momenti, quae vocantur, sub forma evolutionum per series exprimuntur.

La presente ricerca ha lo scopo di determinare l'azione aerodinamica su un profilo indefinito, che oscilli attorno ad un'asse parallelo alle sue generatrici: ci limitiamo quindi al moto piano. Supporremo inoltre che il profilo sia sottile e poco curvo, e che le oscillazioni siano tali che l'incidenza del profilo sia sempre piccola, sì da poter ammettere che la perturbazione che esso introduce nel campo di velocità si possa trattare come un infinitesimo. Con queste limitazioni, è trascurabile la vorticità che si produce per il fatto che l'onda d'urto non è rettilinea: è pertanto giustificata una trattazione a mezzo della funzione potenziale.

1. — Indichiamo con p , ρ , V , V_s i valori della pressione, della velocità del fluido, e di quella del suono; con u e v le componenti secondo

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Modesto Panetti, il 24 febbraio 1937.

gli assi x e y della velocità V : indichiamo coll'indice 1 i valori (costanti) delle varie grandezze relativi alla corrente indisturbata. Per le ipotesi fatte, se poniamo l'asse x coincidente con la direzione di V_1 (fig. 1), possiamo a u , v , V_s , sostituire nell'equazione di continuità i valori V_{1x} , 0 , V_{s1} : rendiamo cioè lineare l'equazione stessa.

Prendiamo come unità di misura del tempo quello in cui è percorsa la corda alare alla velocità del suono, e come unità di lunghezza la corda alare stessa: la velocità del suono sarà 1, quella della corrente indisturbata $\lambda = \frac{V_1}{V_s}$.

Lo studio è limitato al caso delle velocità ultrasonore, cioè è $\lambda > 1$; escluderemo anzi senz'altro che λ sia molto prossimo a 1, poichè in questo caso, com'è noto, i risultati che si ottengono col metodo della linearizzazione dell'equazione di continuità sono di scarsa approssimazione.

Nelle nostre unità di misura, l'equazione di continuità linearizzata assume la forma, indicando con φ il potenziale di velocità:

$$[1] \quad (1 - \lambda^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Un suo integrale particolare è:

$$[2] \quad \frac{f(\xi, \eta, T)}{\sqrt{(t-T)^2 - (x-\xi - \lambda \{t-T\})^2 - (y-\eta)^2}}$$

dove x , y , t , sono le coordinate correnti, ξ , η , T dei valori arbitrari, ma fissi, f il simbolo di una funzione arbitraria. La [2] si può considerare, in un certo senso, come l'azione, nel punto di coordinate xy e all'istante t , di una perturbazione di intensità f creata nel punto $\xi\eta$ all'istante T . Disporremo queste sorgenti di perturbazione nei punti occupati dal profilo, cioè nei punti dell'asse x compresi fra $x=0$ e $x=1$: dobbiamo quindi porre nella [2] $\eta=0$. Alla [1] soddisfa pure l'integrale dell'espressione [2] esteso ad una superficie qualunque Σ del

piano ξT ; purchè Σ sia invariabile al variare di x, y, t . Consideriamo allora l'espressione (fatto $x - \xi = X^{(1)}$, $t - T = \tau$):

$$[3] \quad \varphi(x, y, t) = \iint_S \frac{f(x - X, t - \tau) dX d\tau}{\sqrt{\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2 - y^2}}$$

in cui l'integrazione è estesa a quella porzione S della striscia Σ_1 del piano ξT compresa fra $\xi = 0$ e $\xi = 1$, per cui il radicale è reale: φ non è altro che la parte reale dell'integrale estesa a Σ_1 e quindi soddisfa alla [1].

Eseguiamo l'integrazione, prima rispetto a τ , poi rispetto a X ; i limiti sono: rispetto a τ , i due valori g_1 e g_2 (entrambi positivi) che annullano il radicale e che sono funzione di X e y , rispetto a X , $y\sqrt{\lambda^2 - 1}$ come limite inferiore, x come limite superiore. Eseguito l'integrazione rispetto a τ si trova, come espressione del potenziale prodotto da una sorgente di intensità $\text{sen } \omega t$:

$$\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \text{sen } \omega \left(t - \frac{\lambda X}{\lambda^2 - 1} \right) \cdot J \left(\frac{\omega X}{\lambda^2 - 1} \right)$$

dove J è la funzione cilindrica di prima specie, o di BESSEL, di ordine 0.

2. - La funzione f è determinata dalla conoscenza della velocità $v(x, t)$ in corrispondenza dei punti del profilo, cioè per $y = 0$.

Consideriamo che la velocità prodotta in un punto dell'asse x dalla funzione potenziale [2], per $y = \eta = 0$, ha componente nulla secondo l'asse y : ciò vuol dire che all'espressione di $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0}$ contribuiscono solo i valori della f presi nell'intorno di $X = 0$. D'altra parte, quando X

(¹) Poichè alle velocità ultrasuono le perturbazioni non si propagano a monte del punto in cui sono state create, è sempre $X > 0$.

tende a 0, essendo $\lambda \neq 1$, anche g_1 e g_2 tendono a 0. Potremo quindi scrivere:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = f(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\iint_S \frac{dX d\tau}{V\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2 - y^2} \right)_{y=0}$$

Eseguiamo la derivazione come limite nell'intorno positivo di $y=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\dots)_{y=0} &= \lim_{y=0} \frac{1}{y} \left[\int_{y\sqrt{\lambda^2-1}}^x dX \int_{g_1}^{g_2} \frac{d\tau}{V\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2 - y^2} - \int_0^x dX \int_{g'_1}^{g'_2} \frac{d\tau}{V\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2} \right] \\ &= \lim_{y=0} \frac{1}{y} \left[\int_{y\sqrt{\lambda^2-1}}^x dX \left\{ \int_{g_1}^{g_2} - \int_{g'_1}^{g'_2} \right\} - \int_0^x dX \int_{g'_1}^{g'_2} \right] = -\pi \end{aligned}$$

La derivata nell'intorno negativo di $y=0$ ha valore eguale e contrario.

Si ottiene cioè la relazione cercata nella forma semplicissima (relativa al semipiano $y > 0$):

$$[4] \quad f(x, t) = -\frac{1}{\pi} v(x, t)$$

L'espressione relativa al semipiano $y < 0$ ha segno contrario: ciò vuol dire che l'azione aerodinamica è la stessa sulle due facce: considereremo quindi l'azione sulla sola faccia superiore, e moltiplicheremo poi per due.

Per il calcolo dell'azione aerodinamica è sufficiente conoscere le derivate di φ per $y=0$: basta quindi, dato che la derivata rispetto a y è nota *a priori*, conoscere il valore $\varphi(x, 0, t)$ del potenziale dei punti dell'asse x , valore che nel seguito indicheremo senz'altro con $\varphi(x, t)$. È ovvio che φ è il potenziale del moto di perturbazione: il potenziale del campo di moto sarà $\varphi + \lambda x$.

Indichiamo (fig. 1) con $\alpha(t)$ l'incidenza della corda alare AB, con $\gamma(x)$ l'inclinazione del profilo sulla corda, con $\eta(t)$ l'ordinata di A. Gli angoli α e γ sono molto piccoli, e perciò la velocità v in corrispon-

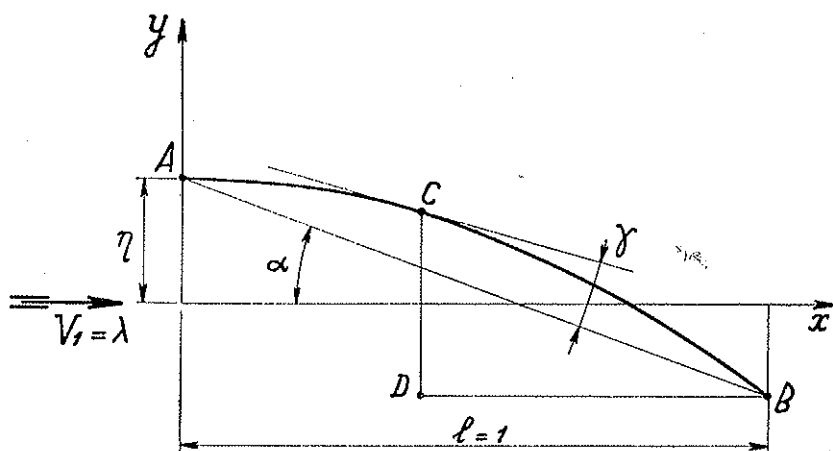


FIG. 1.

denza del profilo si può scrivere nella solita forma approssimata:

$$v = -\lambda(\alpha - \gamma) + \frac{d\eta}{dt} - x \frac{d\alpha}{dt}$$

Riferiamo le vibrazioni ad una incidenza « media » α_0 (questo ha senso preciso solo se si tratta di moto periodico: in caso contrario si fissi arbitrariamente α_0) ponendo $\alpha(t) = \alpha_0 + \beta(t)$. Possiamo considerare v come somma di un termine costante rispetto al tempo: $-\lambda(\alpha_0 - \gamma)$, e di un altro, variabile, che ha valore medio nullo nel caso di moto periodico. Per la linearità della [1], l'azione aerodinamica è la somma dell'azione costante che si esercita sul profilo fisso nella sua posizione media, e di un'azione variabile, che è quella che si esercita su una lamina piana la cui posizione è definita dall'incidenza $\beta(t)$ e dell'ordinata $\eta(t)$ del bordo d'attacco.

3. - L'azione costante si determina, com'è noto, per altra via: vogliamo soltanto mostrare come dalle [3-4] si raggiungano immediatamente risultati noti. Nel nostro caso è:

$$\varphi(x, t) = \int_0^w dX \int_{y_1}^{y_2} \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \alpha_0 - \gamma(x - X) \right\} \frac{d\tau}{V\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2}$$

Dall'equazione di BERNOULLI si ricava, trattando come infinitesimi le differenze tra i valori variabili delle varie grandezze e i valori corrispondenti della corrente indisturbata,

$$p - p_1 = -\rho \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

da cui, considerando la portanza $P = c_p \rho l V^2$ positiva verso l'alto

$$[5] \quad c_p = \frac{2}{\lambda^2} \left(\int_0^1 \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx \right)$$

Nel nostro caso si ottiene il noto risultato (approssimato):

$$c_p = \frac{2(\alpha_0 - \gamma(x))}{V\lambda^2 - 1}$$

4. - Supponiamo che il moto del profilo sia oscillatorio periodico: per la linearità della [1] è ovvio che basterà studiare separatamente i due moti:

$$[6] \quad \eta = a \sin \omega t \quad \beta = 0$$

$$[7] \quad \eta = 0 \quad \beta = b \sin \omega t$$

dove ω è il valore della pulsazione nelle nostre unità di misura; se Ω è il valore in unità generiche, è $\omega = \frac{\Omega l}{V_s}$.

5. - Consideriamo il solo moto [6]; sarà:

$$\varphi(x, t) = \iint \frac{-\frac{a\omega}{\pi} \cos \omega(t - \tau) dX d\tau}{\sqrt{\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2}}$$

Sviluppiamo $\cos(\omega t - \omega\tau)$ ed eseguiamo l'integrazione, prima rispetto a τ , poi rispetto a X . Si ricava l'espressione (1);

$$c_p = -\frac{2a\omega}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} \sin \omega t \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda E_{2n+1} - E_{2n})}{(2n+2)!} \omega^{2n+1} - \\ - \frac{2a\omega}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} \cos \omega t \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda E_{2n} - E_{2n-1})}{(2n+1)!} \omega^{2n}$$

Prendiamo i momenti rispetto al bordo d'attacco, e consideriamo positivi i momenti picchianti: l'espressione di c_m si ricava da quella di c_p , sostituendo al fattoriale generico $m!$ il valore $\frac{(m+1)!}{m}$; si ha cioè che l'azione aerodinamica elementare relativa a ω^n è applicata in un punto della corda alare compreso fra il punto di mezzo e il bordo d'uscita, e spostato tanto più all'indietro quanto più elevato è n .

Se λ non è molto prossimo a 1, e ω resta nei limiti pratici ($\omega=0,5$ già un valore molto elevato) possiamo considerare soltanto i termini

(1) L'espressione di E_n è:

$$E_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n} \cdot \frac{\sum_0^n a_{ni} \lambda^i}{\sum_0^n a_{ni}} \quad \mu = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$$

$$a_{ni} = \binom{n}{i} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1) 2i+1}{(2n-1)(2n-3) \cdot \dots (2i+1)} \text{ per } i \neq n; \quad a_{nn} = 1;$$

per $n < 0$ è $E_n = 0$; $E_0 = 1$; $E_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cdot \dots$

in ω e ω^2 : l'azione aerodinamica risulta allora la somma delle due forze espresse in unità di misure generiche:

$$[8] \quad F_1 = -\rho l V_1^2 \frac{2}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}} \cdot \frac{d\eta}{dt} \frac{1}{V_s}; \quad F_2 = \rho l V_1^2 \frac{1}{\lambda^2 (\lambda^2 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} \frac{l}{V_s^2}$$

applicate rispettivamente nel punto di mezzo e a due terzi del profilo verso il lembo posteriore.

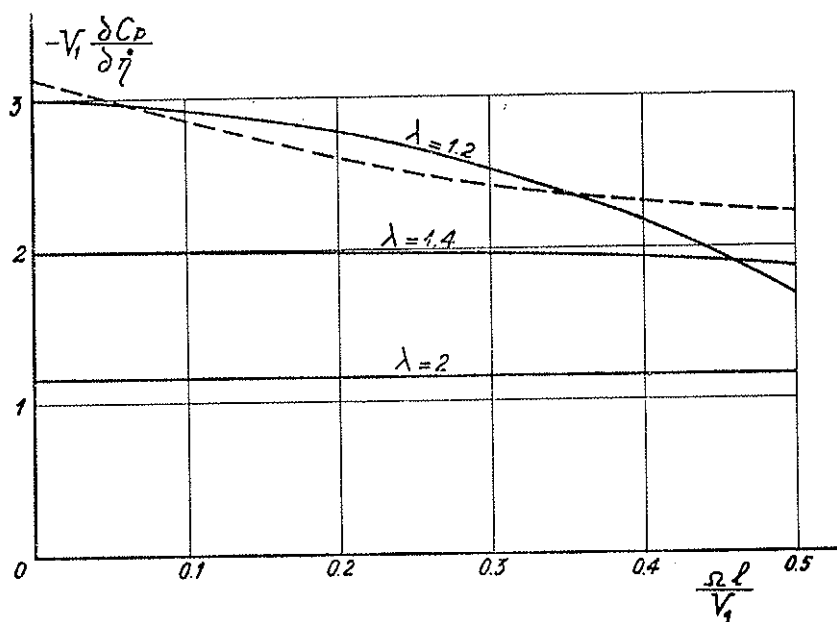


FIG. 2.

Si può notare che F_1 per λ abbastanza grande è pressochè indipendente dalla velocità assintotica, e inoltre ha segno contrario a $\frac{d\eta}{dt}$, sicchè presenta un effetto smorzante sulle oscillazioni. F_2 è trascurabile: è però interessante osservare che ha lo stesso segno dell'accelerazione. Ne segue che la massa apparente addizionale è negativa: lo

stesso risultato si ha per il fluido incompressibile, limitatamente al campo di frequenza $\frac{\Omega l}{2V_1} < 0,34$ ⁽¹⁾.

Siccome il moto è sinoidale, si potrà sempre mettere il coefficiente di portanza sotto la forma:

$$[9] \quad c_p = l \frac{\partial c_p}{\partial \eta} \cdot \frac{\eta}{l} + V_1 \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\eta}} \cdot \frac{\dot{\eta}}{V_1} \quad \left(\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt} \right)$$

Nella figura 2 si sono riportati alcuni valori del coefficiente adimensionale $V_1 \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\eta}}$ in funzione di $\frac{\omega}{\lambda}$: nella linea a tratti si sono riportati i valori relativi al fluido incompressibile, valori che con questi riferimenti risultano indipendenti dalla velocità V_1 . Dalla figura si rileva come per $\lambda > 1,4$, $V_1 \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\eta}}$ sia pressocchè indipendente dalla frequenza: lo stesso si ha per $l \frac{\partial c_p}{\partial \eta}$. Ora, questi due coefficienti coincidono, per $\omega \rightarrow 0$, coi valori che si ricavano dalle [8], e quindi è giustificata l'espressione dell'azione aerodinamica a mezzo delle [8]: praticamente anzi, basta considerare la sola F_1 .

6. - Studiamo ora il moto [7]; è:

$$\varphi(x, t) = \frac{b}{\pi} \iint \frac{\lambda \sin \omega(t - \tau) + \omega(x - X) \cos \omega(t - \tau)}{V\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2} dX d\tau$$

Procedendo nello stesso modo indicato nel paragrafo precedente, si giunge all'espressione:

$$c_p = \frac{2b}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} \sin \omega t \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (E_{2n} \lambda^2 - 2E_{2n-1} \lambda + E_{2n-2}) \omega^{2n} +$$

$$+ \frac{2b}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} \cos \omega t \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} (E_{2n+1} \lambda^2 - 2E_{2n} \lambda + E_{2n-1}) \omega^{2n+1}$$

⁽¹⁾ Cfr. CICALA, *L'azione aerodinamica ecc.*, « Memorie Acc. Sc. Torino », 1935, figura 7, diagramma a.

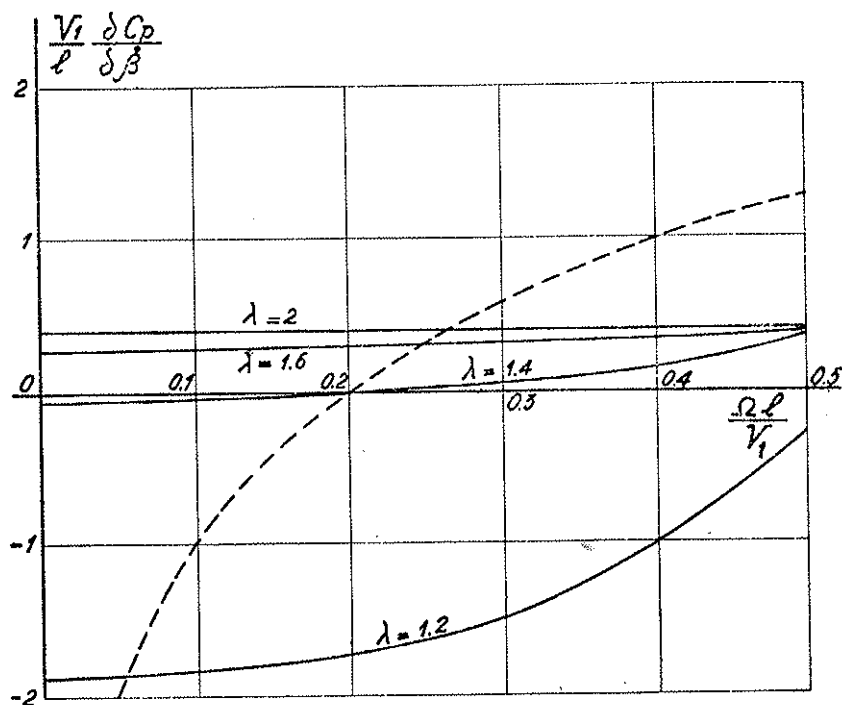


FIG. 3.

Si ricava c_m nel modo indicato al n. 5.

Negli stessi limiti sopra considerati, possiamo trascurare i termini in ω di ordine superiore al primo; l'azione aerodinamica risulta allora la somma delle forze:

$$[10] \quad F_1 = \rho l V_1^2 \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \beta ; \quad F_2 = \rho l V_1^2 \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda (\lambda^2 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{l}{V_s} \frac{d\beta}{dt}$$

applicate rispettivamente sul punto di mezzo e a due terzi del profilo.

Poniamo ora c_p e c_m (riferito quest'ultimo al punto di mezzo del profilo) sotto una forma analoga alla [9]. I valori di $\frac{\partial c_p}{\partial \beta}$ sono molto

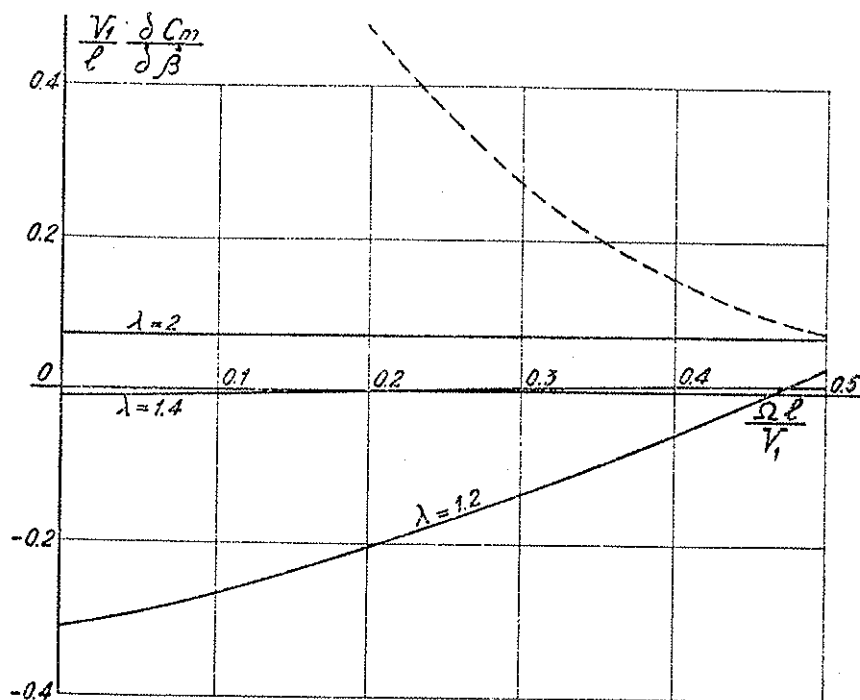


FIG. 4.

(Il momento è preso rispetto al punto di mezzo del profilo).

prossimi a quelli di $V_1 \frac{\partial c_p}{\partial \eta}$ (fig. 2); $\frac{\partial c_m}{\partial \beta}$ è trascurabile. Nelle figure 3 e 4 si sono riportati alcuni valori di $\frac{V_1}{l} \frac{\partial c_p}{\partial \beta}$ e $\frac{V_1}{l} \frac{\partial c_m}{\partial \beta}$ e, al solito, nella linea a tratti i diagrammi relativi al fluido incompressibile. Dalle figure risulta come i due coefficienti presentino un andamento completamente differente da quello che si ha per il caso del fluido incompressibile.

7. - Supponiamo ora che l'espressione di η e β abbia una forma qualsiasi, non periodica: il potenziale si otterrà nello stesso modo usato per l'espressione sinoidale, cioè sviluppando $\eta(t-\tau)$ e $\beta(t-\tau)$ in serie

di potenza di τ . Notiamo che nell'integrazione è sempre $\tau < \frac{1}{\lambda - 1}$: per la ragione già spiegata, non consideriamo mai valori di $\lambda - 1$ troppo piccoli e d'altra parte l'unità di tempo è dell'ordine di grandezza di millesimi di secondo, sicchè τ è sempre piccolissimo. Una prima conseguenza è che basta che lo sviluppo in serie abbia un campo di convergenza molto ristretto; una seconda è che, escludendo il caso eccezionale di vibrazioni estremamente rapide, possiamo con buona approssimazione considerare soltanto i primi due termini degli sviluppi in serie.

È ovvio che i coefficienti delle derivate d'ordine $2n$ e $2n+1$ non sono altro che i coefficienti di $(-1)^n \omega^{2n} \sin \omega t$ e $(-1)^n \omega^{2n+1} \cos \omega t$ nelle espressioni relative dei nn. 5 e 6.

Considerando soltanto i termini relativi agli spostamenti e alle loro derivate prime, l'azione aerodinamica è rappresentata dalle tre forze: F_1 [8], F_1 e F_2 [10].

8. - Sia il profilo costituito da due parti mobili l'una rispetto all'altra (fig. 5). L'azione aerodinamica su AB non è influenzata dalla presenza di BC: per la linearità della [1] l'azione su BC è la somma di quella che si avrebbe se non esistesse AB, e di quella che il moto di AB esercita su BC considerato fisso nella posizione B_1C_1 . Per determinare quest'azione è sufficiente conoscere l'espressione del potenziale relativo al moto di AB nei punti di B_1C_1 : i limiti d'integrazione rispetto a X saranno perciò $x-1$ e x (l'unità di misura è sempre la corda AB).

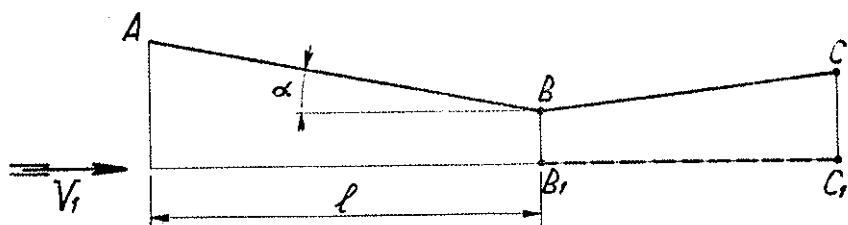


FIG. 5.

Considerando, come sopra, i soli due primi termini degli sviluppi, si ha una portanza applicata nel punto di mezzo di B_1C_1 :

$$c_p = - \frac{2}{\lambda(\lambda^2 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{l}{V_s} \frac{d\alpha}{dt}$$

9. - Supponiamo che il profilo possa oscillare attorno al punto O dell'asse x (fig. 6) e che esista un'azione elastica che cerca di trattenerlo in una data posizione. È ovvio che, come conseguenza della linearità delle azioni aerodinamiche ed elastiche, basta considerare il caso della lamina piana, la cui posizione d'equilibrio sia nella giacitura della corrente assintotica.

Lo studio del moto del profilo risulta assai semplice se assumiamo per l'azione aerodinamica l'espressione approssimata, data da F_1 [8] e $F_1 F_2$ [10], e si trascurano le azioni smorzanti di natura dissipativa.

È immediato che l'equilibrio è instabile, già dal punto di vista statico, se è $a > 1/2$ (asse d'oscillazione situato posteriormente al punto di mezzo del profilo) e contemporaneamente l'azione elastica è incapace a contrastare l'azione aerodinamica.

Escluso questo caso, si trova nel modo approssimato suaccennato, che per $a > 2/3$ il moto è smorzato se $\lambda > \lambda_c$, esaltato se $\lambda < \lambda_c$; λ_c è funzione di a , e assume il suo valore massimo 1,58 per $a = 1/3$.

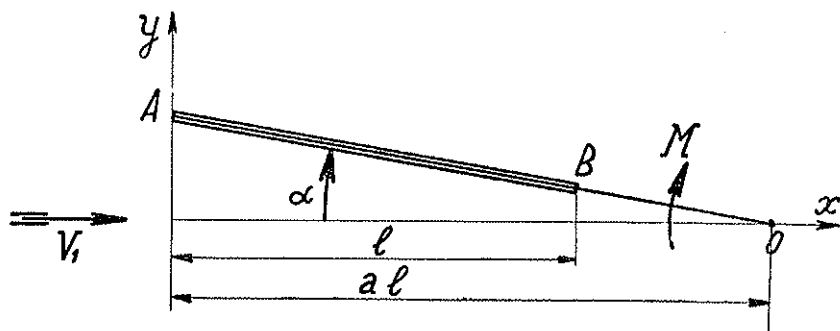


FIG. 6.

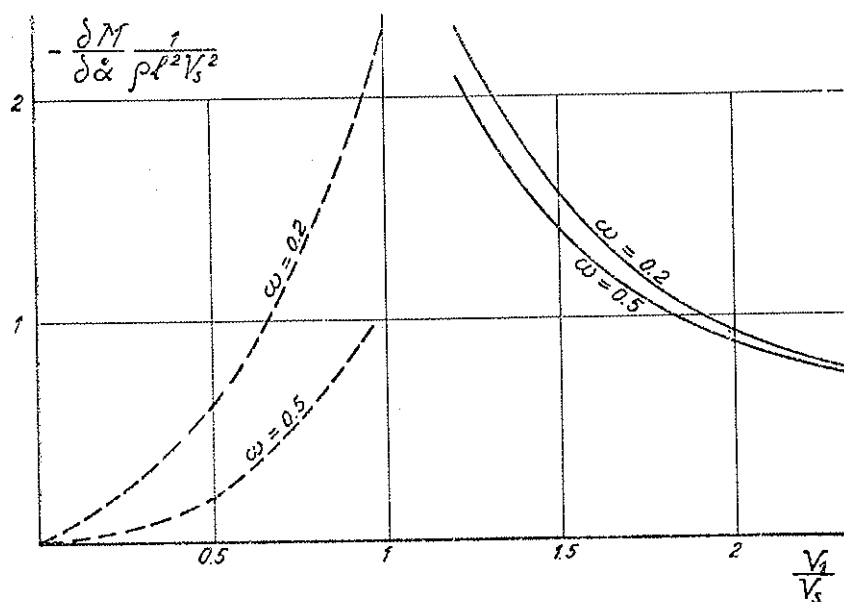


FIG. 7.

Per avere un confronto fra i risultati relativi al fluido compressibile a velocità ipersonora e quelli relativi al fluido incompressibile, si sono riportati nella figura 7, per il caso di $\alpha = 1$, cioè di oscillazioni attorno al bordo d'uscita, i valori ⁽¹⁾ del momento aerodinamico proporzionale alla velocità $\frac{dx}{dt}$ (momento smorzante).

Dalla figura si rileva che, mentre nel caso del fluido incompressibile lo smorzamento cresce colla velocità V_1 con una legge di tipo parabolico, per il fluido compressibile lo smorzamento diminuisce tendendo ad un valore assintotico. Nel caso della figura questo valore è due terzi ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Calcolati in base alle espressioni esatte di c_p e c_m .

⁽²⁾ Si deve notare che il coefficiente considerato ha le dimensioni di un tempo: l'unità è il tempo in cui è percorsa la corda alare alla velocità del suono.