PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 3
pag. 43-46

INTEGRALI DI STIELTJES, E VALUTAZIONE PLANIMETRICA DI ESPRESSIONI SIMBOLICHE NEL CALCOLO OPERATORIO (*)

GIUSEPPE APRILE

SVMMARIVM. — Adhibito planimetrico integralium Stieltjesianorum calculo, secundum Nyström, Auctor exhibet rationem qua generica expressio symbolica calculi operatorii functionalis per numeros perpendi possit, dummodo nota sit generatrix integralis $H(t)$ operatoris, et operanda $V(t)$.

1. - Il NYSTRÖM ha indicato (1) un procedimento planimetrico pel calcolo numerico di integrali di STIELTJES, del tipo:

$$[1] \qquad S = \int_a^b g(\vartheta)\, d h(\vartheta)$$

Con un metodo derivante da detto procedimento, può utilmente venir compiuta la valutazione numerica di espressioni simboliche come la seguente:

$$[2] \qquad W(t) = f(\Delta)\, V(t) = \int_0^t V(t-\vartheta)\, G(\vartheta)\, d\vartheta$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi il 3-4-1946.

(1) E. J. NYSTRÖM, *Planimetrische Auswertung von Stieltjesintegralen*, «Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.», 1934, pag. 276.

nella quale $G(t)$ è la *funzione generatrice* dell'operatore $f(\Delta)$, essendo $\Delta \equiv \dfrac{d}{dt}$, e $V(t)$ l'*operanda* (1). (Tanto $G(t)$ che $V(t)$ si suppongono nulle per $t < 0$).

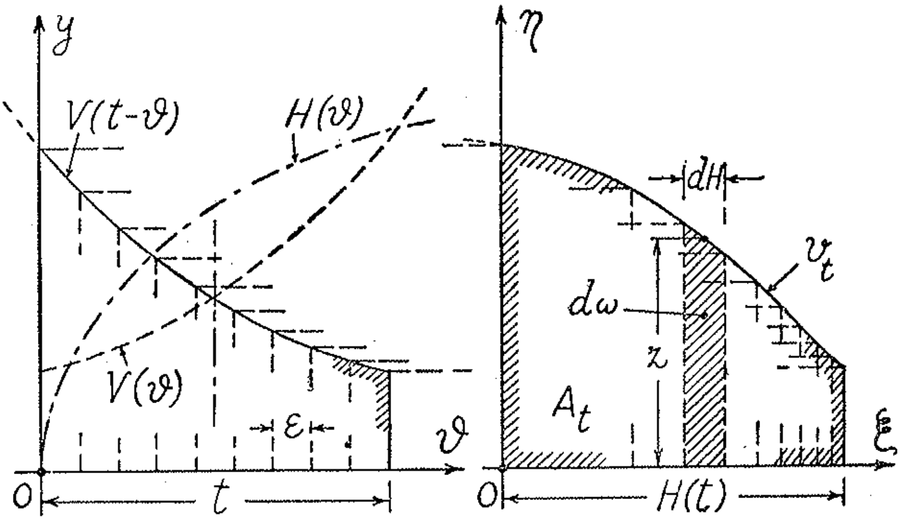

FIG. 1.

Si ha difatti, introducendo la *generatrice integrale* $H(t) = f(\Delta)\,1(t)$ dell'operatore $f(\Delta)$:

$$G(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} H(\vartheta) \quad ; \quad G(\vartheta)\, d\vartheta = d\,H(\vartheta)$$

e quindi:

$$W(t) = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=t} V(t-\vartheta)\, d\,H(\vartheta) \tag{3}$$

con che la [2] è ricondotta alla forma [1].

(1) Vedi ad esempio: G. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali*, ecc., ristampato sul «Boll. Tecn. dell'Istituto Mil. Sup. delle Trasmissioni», 1940, n. 3-4, pag. 95. Alle notazioni ivi usate si fa qui riferimento.

2. – Dato il grafico della funzione $y = V(\vartheta)$ in coordinate cartesiane $\}\vartheta, y\{$, si consideri il particolare sistema di coordinate $\}\xi, \eta\{$ che si ottiene mediante la trasformazione:

$$\xi = H(\vartheta) \quad , \quad \eta = y$$

Per ogni valore di t, allora, alla curva $y = V(t-\vartheta)$ corrisponderà, nella rappresentazione $\}\xi, \eta\{$, una curva v_t. L'area A_t compresa fra v_t e gli assi ξ, η, misura il valore $W(t)$, (fig. 1).

Difatti A_t è composta di tante aree elementari $d\omega$, o striscioline, ottenibili con rette dividenti parallele all'asse η. Ogni elemento $d\omega$ si estende sull'ascissa per dH, e la sua altezza media vale $z = V(t-\vartheta)$.

Talchè si ha:

$$A_t = \int_0^{A_t} d\omega = \int_0^t V(t-\vartheta)\, dH(\vartheta) = W(t) \;; \qquad \text{c. d. d.}$$

3. Ciò posto, per la valutazione planimetrica della [2] si può procedere praticamente come segue. Fissato un intervallo temporale ε (pic-

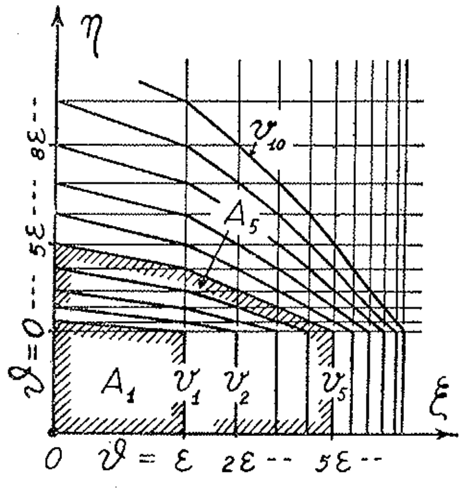

Fig. 2.

colo compatibilmente col graficismo da impiegare nel disegno) si considerino i tempi in progressione aritmetica: $\vartheta_j = j \times \varepsilon$, $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Si portino in ascissa ξ i valori $H(\vartheta_j)$, e in ordinata η i valori $V(\vartheta_j)$, (fig. 2). Per i punti così ottenuti su ciascun asse, si conducano le parallele all'altro asse. Si traccino quindi le spezzate v_j come nella figura 2 è mostrato in modo ovvio [1].

Si noti che ogni spezzata v_j (la quale tende ad una curva se $\varepsilon \to 0$) collega, sugli assi, punti relativi ad uno stesso valore $t = j\varepsilon$ di ϑ.

Il valore del risultato $W(t)$, per $t = j\varepsilon$, è misurato dall'area A_j (nella figura 2 sono segnate, con tratteggio al contorno, le aree A_4 e A_5). Mediante misura planimetrica delle A_j, può quindi ricavarsi, per punti, l'andamento di $W(t)$.

[1] Nelle figure si è supposto che la $H(t)$ abbia ordinata zero all'origine dei tempi, ossia che la funzione generatrice $G(t)$ non contenga all'origine un elemento impulsivo, ma ciò non è essenziale.