PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 21
pag. 229-244

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE SFERICHE SMORZATE E FORZATE COL CALCOLO OPERATORIO (*)

PIERO CALDIROLA e PIETRO SILLANO

SVMMARIVM. — Ostendunt Auctores quo modo aequatio differentialis

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U - k U = X ,$$

si opportune condiciones in exordio et in ambitu statuantur, integrari possit per calculum qui vocatur operatorialis, secundum expressionem a Doetsch datam, quae innititur proprietatibus transformatae Laplacianae. Hac ratione sine magna difficultate eadem solutionis formula obtinetur, quae antea a TONOLO, per integrandi rationem a VOLTERRA et TEDONE inventam, constituta est. Formula solutionis deinde applicatur ad peculiares quosdam casus, qui summo opere physicorum intersunt.

Nella fisica matematica interesse notevole presenta l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$[1] \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U - kU = X \qquad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

detta delle onde sferiche smorzate e forzate, la quale fra l'altro contiene come casi particolari l'equazione dei potenziali elettromagnetici ritardati ($k = 0$) e quella del campo mesonico ($k = -\chi^2$ con χ reale) che si incontra nelle odierne teorie delle forze nucleari.

L'integrazione della [1] è stata eseguita dal TONOLO (1) seguendo il metodo di VOLTERRA-TEDONE. Se σ è una superficie chiusa che limita una porzione S dello spazio ordinario e se U è una soluzione regolare della [1], la formula finale a cui arriva il TONOLO assegna i valori di U nei punti interni di S e per qualsiasi valore del tempo t in

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 7 agosto 1946.

(1) TONOLO, *Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate.* « Rend. Semin. Mat. Univ. Padova », IV, 1933.

funzione dei valori che U e la sua derivata rispetto al tempo assumono all'istante iniziale nello spazio S, e dei valori che U e la sua derivata normale prendono in ogni istante di tempo nei punti della superficie σ. La formula risolutiva in discorso è precisamente la seguente:

$$4\pi \mathrm{U}(x_1, y_1, z_1, t_1) = k \int_{\mathrm{S}} \left[\mathrm{U} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\mathrm{I}_1(\rho)}{\rho} - \frac{\mathrm{I}_1(\rho)}{\rho} \frac{d\mathrm{U}}{dn} \right]_{t_0} d\mathrm{S} +$$

$$+ k \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - r} \left[\mathrm{U} \frac{d}{dn} \left(\frac{\mathrm{I}_1(\rho)}{\rho} \right) - \frac{\mathrm{I}_1(\rho)}{\rho} \frac{d\mathrm{U}}{dn} \right] dt - \frac{k}{2} \int_{\sigma} \mathrm{U}(t_1 - r) \frac{dr}{dn} d\sigma -$$

$$- \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{d\mathrm{U}}{dn} - \mathrm{U} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \right]_{t_1 - r} d\sigma + k \int_{\mathrm{S}} d\mathrm{S} \int_{t_0}^{t_1 - r} \frac{\mathrm{I}_1(\rho)}{\rho} \mathrm{X}\, dt + \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{X}(t_1 - r)}{r} d\mathrm{S}$$

dove si è posto:

$$\rho = \sqrt{k} \sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}$$

e dove $\mathrm{I}_1(\rho)$ rappresenta la funzione di Bessel non oscillante di ordine uno.

Ci proponiamo in questa nota di mostrare come si possa arrivare con relativa facilità all'integrale [2] di Tonolo facendo uso del calcolo operatorio. Il metodo seguito è quello di Doetsch (²) il quale fa uso sistematico della trasformazione di Laplace la cui importanza nel calcolo operatorio fu però indicata molto prima da Giorgi nei suoi fondamentali lavori (³).

Riassumiamo in breve il procedimento seguito poichè esso si scosta alcun poco dal metodo di Doetsch.

(²) Doetsch, *Theorie und Andwendung der Laplace Transformation*. Springer, Berlin, 1937.

(³) Oltre che nei lavori fondamentali: *Il metodo simbolico nello studio delle correnti variabili.* « Atti Ass. Elettr. Ital. », 1904; *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate nei problemi di elettrodinamica.* « Atti Ass. Elettr. Ital. », 1905, l'argomento è discusso più a fondo specie per quanto riguarda i fondamenti matematici, nel corso del Prof. Giorgi, *Fisica Matematica* (Dispense litografate), Roma, 1928.

1. Integrazione di un'equazione differenziale col metodo di Doetsch. – La trasformazione di Laplace:

[3] $$f(p) = \mathrm{L}[\mathrm{F}(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{F}(t)\,dt\ ,$$

le cui proprietà sono ben note, può essere pensata come una trasformazione funzionale che ad una certa funzione $\mathrm{F}(t)$ (che chiameremo brevemente funzione L) fa corrispondere un'altra funzione $f(p)$ (che chiameremo brevemente funzione l). Ricorrendo alla nozione più generale di spazio funzionale la trasformazione di Laplace può essere interpretata come una trasformazione che allo spazio funzionale delle funzioni L nella variabile reale t (spazio Λ) faccia corrispondere lo spazio delle funzioni l (spazio λ) nella variabile complessa p. Essa viene impiegata per la soluzione, per via indiretta, di numerosi problemi secondo lo schema seguente:

a) Dato un problema (Problema 1°) nella variabile reale t (ed in eventuali altre variabili o parametri) esso può essere pensato come una relazione fra funzioni L, nello spazio funzionale Λ. Applicando ai legami analitici che esprimono il problema 1° la trasformazione di Laplace si ottiene un nuovo legame fra funzioni della variabile complessa p (e delle rimanenti altre variabili o parametri che in generale permangono) e che può essere interpretato come un problema fra funzioni l nello spazio λ (Problema 2°);

b) Si risolve il problema 2° ottenendo per soluzione una funzione risolvente $r(p)$ che è ancora una funzione l;

c) A mezzo della trasformazione inversa di quella di Laplace:

[3'] $$\mathrm{L}^{-1}[r(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\,r(p)\,dp = \mathrm{R}(t)$$

si ritorna nello spazio L ottenendo la corrispondente $\mathrm{R}(t)$ della funzione $r(p)$. La $\mathrm{R}(t)$ in molti casi (cioè quando sono verificate opportune condizioni) è la risolvente del problema originale 1°.

Il procedimento può essere sintetizzato nello schema seguente:

$$\begin{tikzcd} \text{Spazio } \Lambda \text{ (oggetto)} & \text{Problema } 1^\circ \arrow[d] \arrow[r, dotted, no head] & \text{Soluzione } R(t, x, \dots) \\ \text{Spazio } \lambda \text{ (immagine)} & \text{Problema } 2^\circ \arrow[r] & \text{Soluzione } r(p, x, \dots) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

e può essere applicato con successo alla soluzione di numerosi problemi in quanto il « problema 2° » è in generale più semplice del « problema 1° ».

Nel caso delle equazioni alle derivate parziali, che ci interessa, l'applicazione è senz'altro vantaggiosa perchè la trasformazione di Laplace riduce di uno il numero delle variabili e trasforma il problema 1°, con condizioni iniziali e al contorno, in un problema 2° con sole condizioni al contorno, e quindi più semplice.

Nel caso particolare dell'equazione [1] per l'applicabilità del metodo si richiede:

– che le funzioni $U, \dfrac{dU}{dn}, \dfrac{\partial U}{\partial t}$, ecc. siano tali che l'integrale [2] converga per $t > 0$ (cioè, come suol dirsi, che esse siano funzioni L);

– che le funzioni trasformate siano tali per cui gli integrali che compaiono nella soluzione della equazione corrispondente nel problema 2° convergano per $t > 0$ (e cioè siano funzioni l);

– che tutte le funzioni siano tali per cui le trasformazioni L e L^{-1} risultino commutabili con Δ_2, con $\dfrac{d}{dn}$, con le integrazioni eseguite nelle variabili spaziali, e con l'operazione di passaggio al limite per $P \to P_\sigma$ (indicando con $P = P(x, y, z)$ un punto generico di S e con P_σ un punto del contorno σ).

È interessante notare come i metodi del calcolo operatorio ordinario si presentino come un caso particolare del metodo suesposto. Ad esempio, se, nell'equazione in oggetto, le condizioni iniziali fossero nulle l'equazione l corrispondente all'equazione data è la stessa che

si scriverebbe colle note regole e sarebbe risolubile coi classici metodi operatori (4).

In pratica il procedimento da noi seguito nell'integrazione della [1] si sposta lievemente da quello del DOETSCH nel senso che, nell'applicare la trasformazione L^{-1}, ci si è giovati di integrali già eseguiti – cioè di operatori già valutati – combinandoli con le regole dell'ordinario calcolo operatorio che, in sostanza, interpretano le proprietà della trasformazione L^{-1} (5), (6).

---

(4) Come es. di applicazione del calcolo operatorio ordinario all'integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali in uno spazio a più dimensioni si veda:

D. GRAFFI, *Sulla dimostrazione della formula dei potenziali ritardati col metodo degli operatori funzionali.* «Rend. R. Acc. Lincei», IX, pag. 997, 1929; P. CALDIROLA, *Integrazione delle equazioni del campo mesonico*, «La Ric. Scient.», XIII, pag. 195, 1942.

(5) È noto come la valutazione di un operatore $f(p)$ possa portare a due funzioni: «Funzione generatrice» $G(t)$ e «Funzione caratteristica» $H(t)$ secondo che l'operatore si immagina applicato all'impulso unitario $f_u(t)$ o alla funzione unitaria $1(t)$. La definizione matematica di queste due funzioni è:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p)e^{pt}dp = L^{-1}[f(p)] = \frac{\partial}{\partial t}H(t)$$

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(p)}{p}e^{pt}dp = L^{-1}\left[\frac{f(p)}{p}\right] = \int_0^t G(t)\,dt$$

(tenute presenti alcune restrizioni)

In molti trattati di «Calcolo operatorio» vengono date le funzioni H e G per gli operatori più comuni e delle regole per dedurre le H e G di operatori che non si trovano sulle tavole di quelli noti. La formula [*] alla nota (9) del § 3 è appunto una di queste. Tavole di operatori valutati si trovano nei trattati:

CARSON, *Electric circuit theory and operational Calculus*, Mc Graw Hill, New York, 1928; BUSCH, *Operation circuit analysis*, Jon Wyhley, New York, 1929; Mc LAHLAN, *Complex variable and operational Calculus*, Cambridge, 1935 e nelle altre pubblicazioni speciali: ANGELINI, *Calcolo operatorio e studio dei circuiti elettrici in regime transitorio*, Monografia da l'«Elettrotecnica», Milano, 1935; CAMPBELL, *Fourier integral for practical applications*, «B. S. T. J.», ottobre 1928; Mc LAHLAN-HUMBERT, *Formulaire pour le Calcul symbolique de Heaviside* (1939), che contengono ciascuno diverse continaia di formule, nonchè il trattato del DOETSCH [*loc. cit.* (2)] il quale dà una tavola di trasformazioni di Laplace che naturalmente può essere usata in senso inverso per la valutazione degli operatori.

(6) L'inversione della trasformazione di Laplace fatta con questo metodo porta la necessità di maneggiare anche funzioni improprie (impulsi, ecc.). L'uso di queste funzioni potrebbe però anche essere evitato ricorrendo per es. ad ar-

2. Trasformazione del problema 1° nel problema 2°. – Per quanto detto nel paragrafo precedente, il problema 1° consiste nell'integrazione dell'equazione differenziale [1]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U - kU = X(P, t) \tag{1}$$

assegnate le condizioni (iniziali e al contorno):

$$\left\{ \begin{array}{ll} [U(P, t)]_{t=0} = \varphi(P) & \left[\frac{\partial U(P, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = \psi(P) \\ [U(P, t)]_\sigma = F(P_\sigma, t) & \left[\frac{\partial U}{\partial n}\right]_\sigma = G(P_\sigma, t) \end{array} \right. \tag{4}$$

Applicando la trasformazione di Laplace la [1] si trasforma nella (7):

$$\Delta_2 u - (p^2 - k)u = -(x + p\varphi + \psi) \tag{4}$$

con le condizioni al solo contorno:

$$[u(P, p)]_\sigma = f(P_\sigma, p) \qquad \left[\frac{du(P, p)}{dn}\right]_\sigma = g(P_\sigma, p) \tag{4'}$$

---

tifici del tipo di quelli da noi impiegato (vedi § 3A) per valutare l'operatore $L^{-1}\left[f \frac{d}{dn} e^{-ar}\right]$; però, dove possibile senza oltrepassare i limiti dell'accettabilità, tale uso è stato conservato perchè molto rapido e caratteristico del metodo operatorio. Ad ogni modo una discussione sulla legittimità e convenienza dell'introduzione e del maneggio delle funzioni «improprie» nonchè dei limiti di validità del loro calcolo si trova, per es., in: Giorgi, *Fisica Matematica* (Disp. litogr.), Roma 1928 (già cit.). D'altronde l'uso della funzione impropria detta da Giorgi funzione impulsiva è diventato consueto anche in altri rami della fisica teorica odierna, dove tale funzione è nota sotto il nome di funzione di Dirac.

(7) Si ricordi la formula che dà la trasformata della derivata di una funzione:

$$L[F^{(n)}(t)] = p^n L[F(t)] - F(0)p^{n-1} - F'(0)p^{n-2} - \dots - F^{(n-1)}(0) \tag{*}$$

dove:

$$F^{(n)}(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} F(t) \qquad F^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} F^{(h)}(t)$$

Essa si ottiene ricordando la [3] e integrando per parti. Si dimostra che se per $t > 0$ esiste la $F(t)$ e se per p_0 reale e > 0 la $L[F(t)]$ converge, la [*] è valida per ogni $R(p) > p_0$.

dove, secondo l'uso, si è indicato con le lettere minuscole le trasformate delle funzioni del problema 1°, indicate con le corrispondenti lettere maiuscole.

Il problema trasformato (Problema 2°) consiste quindi nell'integrazione dell'equazione differenziale [5] (equazione di Helmoltz) con le condizioni al contorno [4']. È pertanto nota la formula risolutiva del problema trasformato, che del resto si stabilisce immediatamente ricorrendo al teorema di Green; essa è:

$$4\pi\, u(\mathrm{P}\,;p) = \int_{\mathrm{S}} \frac{e^{-ar}}{r}\left[x + p\varphi + \psi\right] d\mathrm{S} + \int_{\sigma}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{-ar}}{r}\right)\cdot f - \frac{e^{-ar}}{r}\, g\right] d\sigma$$

essendosi fatta la posizione:

$$p^2 - k = a^2$$

3. Ritorno dal problema 2° al problema 1°. – Si tratta ora di trasformare la soluzione [6] del problema 2° nella soluzione $\mathrm{U}(\mathrm{P}, t)$ del problema primitivo 1°; si tratta cioè di valutare i vari termini che compaiono nell'espressione [6] tenendo conto delle note proprietà dell'operatore p

Formalmente si ha:

$$4\pi\, \mathrm{U}(\mathrm{P}, t) = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{r}(x + p\varphi + \psi)\right] d\mathrm{S} + \int_{\sigma} \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{d\left(\dfrac{e^{-ar}}{r}\right)}{dn} f - \frac{e^{-ar}}{r}\, g\right] d\sigma$$

Le due funzioni integrande sono il risultato della valutazioni di singoli operatori che è necessario valutare uno per uno.

A) Consideriamo la funzione integranda del primo integrale: quello di volume. Ivi si hanno tre termini:

$$[9]\quad \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{r}\, x\right], \qquad [10]\quad \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{r}\, p\varphi\right], \qquad [11]\quad \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{r}\, \psi\right].$$

Il termine [9] si presenta come prodotto di due operatori (oltre che del fattore costante $\frac{1}{r}$):

$$L^{-1}\left[e^{-r\sqrt{p^2-k}}\right] \qquad e \qquad L^{-1}\left[x(P,p)\right].$$

Gli operatori fattori del prodotto si valutano immediatamente ricorrendo alle apposite tavole [8] e ricordando la definizione [3']. Si ha così:

$$L^{-1}\left[e^{-ar}\right]=f_u(t-r)+kr\frac{I_1(\sqrt{k}\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}1(t-r);L^{-1}\left[x(P,p)\right]=X(P,t).$$

La valutazione dell'operatore prodotto si consegue poi immediatamente ricordando le proprietà del prodotto integrale (*Faltung*) di due funzioni rispetto alla trasformazione di Laplace [9]. Si ha:

$$L^{-1}\left[e^{-ar}x\right]=\int_0^t f_u(\tau-r)X(P,t-\tau)d\tau+$$
$$+kr\int_0^t\frac{I_1(\sqrt{k}\sqrt{\tau^2-r^2})}{\sqrt{k}\sqrt{\tau^2-r^2}}X(P,t-\tau)1(\tau-r)d\tau \quad ;$$

il primo termine al secondo membro (per le note proprietà della f_u) vale:

$$\int_0^t f_u(\tau-r)X(P;t-\tau)d\tau=X(P;t-r)$$

([8]) Si veda ad es. CAMPBELL, *loc. cit.* ([5]), form. 863 di Tav. I. L'operatore e^{-ar} è stato discusso a fondo da GIORGI, *Sull'integrale dell'equazione di propagazione in una dimensione*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», LII, pag. 255, 1928.

([9]) Ricordiamo che dicesi prodotto integrale (*Faltung*) di due funzioni $F(t)$, $G(t)$ l'espressione

$$\int_0^t F(\tau)G(t-\tau)dt$$

e che tale prodotto gode della proprietà:

$$[*] \qquad L\left[\int_0^t F(\tau)G(t-\tau)d\tau\right]=L\left[F(t)\right]\cdot L\left[G(t)\right]=f(p)\cdot g(p)$$

Questa relazione fu stabilita originariamente da: BOREL, *Léçons sur les séries Divergentes*, Paris, 1901, e poi proposta e impiegata nel calcolo operatorio in modo sistematico da: CARSON, *loc. cit.* ([5]), pag. 41. DOETSCH, *loc. cit.* ([2]), ne completò lo studio considerandola come un'equazione integrale risolubile a mezzo della trasformazione di Laplace. Le condizioni generali per la sua validità non sono semplici; esse risultano però soddisfatte nei casi da noi studiati.

mentre il secondo, operando la sostituzione $\tau = t - \lambda$ e ricordando che la funzione $1[t-(\lambda+r)]$ è nulla quando l'argomento è <0 e cioè per $\lambda > t - r$, diviene:

$$\int_0^t \frac{I_1(\sqrt{k}\sqrt{(t-\lambda)^2 - r^2})}{\sqrt{k}\sqrt{(t-\lambda)^2-r^2}} X(P,\lambda)\, 1[t-(\lambda+r)]\, d\lambda = \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} X(P,\lambda)\, d\lambda$$

(dove si è fatto uso di notazioni analoghe a quelle della formula [1] e colla posizione $t_0 = 0$). In definitiva per l'operatore [9] si ha quindi:

$$\text{[12]} \qquad L^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{r} x\right] = \frac{X(P, t-r)}{r} + k\int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} X(P,\lambda)\, d\lambda \ .$$

Veniamo a valutare il termine [10]. Ricordando che se $f(0)=0$ è $p = \dfrac{\partial}{\partial t}$ la [*] della nota (7) dà:

$$\text{[13]} \qquad L^{-1}\left[p\,\frac{e^{-ar}}{r}\varphi\right] = \varphi\frac{\partial}{\partial t} L^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{r}\right] = \left[U(P,\lambda)\frac{\partial}{\partial t}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right]_{\lambda=0}$$

dove si sono trascurati i termini impulsivi per $t=0$ (10) e si è ricordata la definizione di φ.

Il termine [11], trascurando al solito gli impulsi all'istante iniziale, dà (per $t>r$):

$$\text{[14]} \quad L^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{r}\psi\right] = k\,\frac{I_1(\sqrt{k}\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{k}\sqrt{t^2-r^2}}\, 1(t-r)\,\psi = \left[\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial U(P,\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0}$$

B) Veniamo ora al calcolo del secondo integrale della [8]. Esso si può scrivere:

$$\text{[15]} \qquad \int_\sigma L^{-1}\left[e^{-ar} f\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{1}{r} f\,\frac{de^{-ar}}{dn} - \frac{e^{-ar}}{r} g\right] d\sigma \ ;$$

(10) Il trascurare i termini impulsivi per $t=0$ costituisce una regola assai usata di calcolo operatorio, che si giustifica subito intuitivamente osservando che per le funzioni L, che si ottengono trasformando le soluzioni del problema 2° non è richiesta l'esistenza per $t=0$ ma solo del $\lim_{t\to+0}$. Si assume cioè come soluzione all'istante iniziale quella data dal detto lim. A questo riguardo si veda: GIORGI, *loc. cit.* (6).

la funzione integranda si spezza quindi ancora nella somma di tre termini:

$$[16]\quad L^{-1}\left[e^{-ar} f \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right]; \qquad [17]\quad L^{-1}\left[\frac{f}{r}\frac{de^{-ar}}{dn}\right]; \qquad [18]\quad L^{-1}\left[-\frac{e^{-ar}}{r} g\right]$$

di cui ci proponiamo la valutazione.

Il primo termine [16] dà immediatamente, con il ragionamento già fatto per il termine [9] del primo integrale:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} L^{-1}\left[e^{-ar} f\right] =$$

$$= \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \int_0^t \left[f_u(\tau - r) + kr \frac{I_1(\sqrt{k}\sqrt{\tau^2 - r^2})}{\sqrt{k}\sqrt{\tau^2 - r^2}}\right] 1(\tau - r)\, F(P_o, t - \tau)\, d\tau =$$

$$= F(P_o, t - r)\frac{d\frac{1}{r}}{dn} + kr \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} F(P_o, \lambda)\, d\lambda = F(P_o, t - r)\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{k}{r}\frac{dr}{dn} I$$

(dove si è chiamato con I l'integrale al secondo termine del penultimo membro).

Il secondo termine [17] è più difficile da eseguirsi per via diretta perchè presenta derivazioni spaziali di elementi impulsivi rispetto all'argomento $(t - r)$. Si può però eseguire facilmente ricorrendo ad un semplice artificio:

$$[20]\qquad L^{-1}\left[f \frac{de^{-ar}}{dn}\right] = \frac{d}{dn} L^{-1}\left[pf \frac{e^{-ar}}{p}\right],$$

valutando separatamente i due operatori pf e $\frac{e^{-ar}}{p}$ e componendoli

per mezzo della formula [*] di nota ([9]). Si ha allora successivamente:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[pf\right]=\mathrm{F}'(\mathrm{P},t)-\mathrm{L}^{-1}\left[\mathrm{F}(0)\right]=\mathrm{F}'(\mathrm{P}_\sigma,t)-\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,0)f_u(t)$$

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{p}\right]=\int_0^t \mathrm{L}^{-1}\left[e^{-ar}\right]dt=1(t-r)\left[1+rk\int_r^t\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{k}\sqrt{\tau^2-r^2})}{\sqrt{k}\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau\right]$$

$$\mathrm{L}^{-1}\left[pf\frac{e^{-ar}}{p}\right]=\int_0^t\left[\mathrm{F}'(\mathrm{P}_\sigma,t-\tau)+\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,0)f_u(t-\tau)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1(\tau-r)+rk\,1(\tau-r)\int_r^t\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{k}\sqrt{\vartheta^2-r^2})}{\sqrt{k}\sqrt{\vartheta^2-r^2}}\,d\vartheta\right]d\tau$$

Sviluppando il prodotto sotto il segno di integrale si hanno così quattro termini, ciascuno dei quali dovrà poi essere ancora derivato rispetto la normale n. Si ha così:

a) per il primo termine:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dn}\int_0^t\mathrm{F}'(\mathrm{P}_\sigma,t-r)\,1(\tau-r)\,d\tau=\frac{1}{r}\frac{d}{dn}\int_r^t\mathrm{F}'(\mathrm{P}_\sigma,t-\tau)\,d\tau=-\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\mathrm{F}'(\mathrm{P}_\sigma,t-r)\,;$$

b) per il secondo:

$$\frac{d}{dn}\int_0^t\mathrm{F}'(\mathrm{P}_\sigma,0)\,1(\tau-r)\,f_u(t-\tau)\,d\tau=\frac{d}{dn}\mathrm{F}'(\mathrm{P}_\sigma,0)\,1(t-r)=0\,;$$

c) Il terzo termine dà origine a calcoli un poco complessi. Si ha successivamente, integrando per parti ricordando che $\mathrm{F}'=\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{F}$, e ponendo $\rho'=\sqrt{k}\sqrt{\vartheta^2-r^2}$

$$\int_0^t\mathrm{F}'(\mathrm{P}_\sigma,t-\tau)\left[rk\cdot1(\tau-r)\int_r^\tau\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta\right]d\tau=$$

$$=-\left[rk\,\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-\tau)\int_r^\tau\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta\cdot\right]_r^t+rk\,1(t-r)\int_r^t\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-\vartheta)\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta=$$

$$=rk\,\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,0)\int_r^t\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta+rk\,1(t-r)\int_r^t\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-\vartheta)\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta\,;$$

d) per quarto termine si ha:

$$rk\int_0^t d\tau\left[\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,0)f_u(t-\tau)\,1(\tau-r)\int_r^\tau \frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta\right]=rk\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,0)\int_r^t \frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta\,.$$

Eseguita la derivazione normale si vede che la somma del terzo e quarto termine di [20] risulta uguale a:

$$\frac{d}{dn}rk\int_r^t \mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-\vartheta)\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta=k\frac{d}{dn}r\mathrm{I}=k\mathrm{I}\frac{dr}{dn}+kr\frac{d\mathrm{I}}{dn}\quad;$$

l'ultimo termine al 2° membro può ancora trasformarsi nel seguente modo:

$$kr\frac{d\mathrm{I}}{dn}=-kr\frac{dr}{dn}\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-r)\lim_{\vartheta\to+0}\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}+kr\int_r^t \mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-\vartheta)\frac{d}{dn}\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}\,d\vartheta=$$

$$=-\frac{k}{2}r\frac{dr}{dn}\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-r)+kr\int_0^{t-r}\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,\lambda)\frac{d}{dn}\frac{\mathrm{I}_1(\rho)}{\rho}\,d\lambda\,.$$

In definitiva quindi la valutazione del termine [17] che compare nell'integrale superficiale [15] dà come risultato:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{f}{r}\frac{de^{-ar}}{dn}\right]=-\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-r)+\frac{k}{r}\frac{dr}{dn}\mathrm{I}-$$

[22]

$$-\frac{k}{2}\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,t-r)\frac{dr}{dn}+k\int_0^{t-r}\mathrm{F}(\mathrm{P}_\sigma,\lambda)\frac{d}{dn}\frac{\mathrm{I}_1(\rho)}{\rho}\,d\lambda\,.$$

Resta così da valutare il termine [18] che compare nella funzione integranda dell'integrale superficiale [15]. Con il solito procedimento si trova:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[-\frac{e^{-ar}}{r}g\right]=-\frac{1}{r}\int_0^t\left[f_u(\vartheta-r)+kr\frac{\mathrm{I}_1(\rho')}{\rho'}1(\vartheta-r)\right]\mathrm{G}(\mathrm{P}_\sigma,t-\vartheta)\,d\vartheta=$$

$$=-\frac{1}{r}\mathrm{G}(\mathrm{P}_\sigma,t-r)-k\int_0^{t-r}\frac{\mathrm{I}_1(\rho)}{\rho}\mathrm{G}(\mathrm{P}_\sigma,\lambda)\,d\lambda\,.$$

Esplicitando finalmente le funzioni integrande che compaiono nella formula [8], che costituisce la soluzione formale dell'equazione [1], si ottiene dopo facili trasformazioni la formula [2] che rappresenta l'integrale trovato da TONOLO col metodo diretto di Volterra-Tedone.

4. – CASI PARTICOLARI.

a) equazione dei potenziali elettromagnetici ritardati.

Ponendo nella [1] $k=0$ si ha l'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U = X \tag{24}$$

nota sotto il nome di equazione dei potenziali elettromagnetici ritardati. Il suo integrale ([11]), sempre colle condizioni iniziali e al contorno espresse dalle [4], si otterrà dalla [2] ponendovi $k=0$. Si ha:

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_S \frac{X(t_1 - r)}{r} dS - \int_\sigma \left[\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{dr}{dn} + \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial U}{\partial t}\right]_{t_1-r} d\sigma$$

b) equazione del campo mesonico.

Ponendo nella [1] $k=-\chi^2$ (con χ reale) si ottiene l'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U + \chi^2 U = X \tag{25}$$

detta del campo mesonico e che interviene nello studio delle forze nei nuclei atomici. Il suo integrale ([12]), sempre colle condizioni [4],

---

([11]) L'integrale della [24] con le condizioni: $U_\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t_0} = 0$ è stato ottenuto col calcolo operatorio ordinario da GRAFFI, *loc. cit.* ([4]).

([12]) L'integrale della [25] con le condizioni: $U_\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t_0} = 0$ è stato ottenuto col calcolo operatorio ordinario da CALDIROLA, *loc. cit.* ([4]).

si otterrà dalla [2] ponendovi $k = -\chi^2$. Dopo facili trasformazioni si ha:

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\chi^2 \int_S \left[U \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} \right) - \frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} \frac{dU}{dt} \right]_{t_0} dS -$$

$$-\chi^2 \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - r} \left[U \frac{d}{dn} \left(\frac{J_1 |\rho|}{|\rho|} \right) - \frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} \frac{dU}{dn} \right] dt + \chi^2 \int_\sigma U(t_1 - r) \frac{dr}{dn} d\sigma -$$

$$-\int_\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \frac{dU}{dt} \right]_{t_1 - r} d\sigma - \chi^2 \int_S dS \int_{t_0}^{t_1 - r} \frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} X\, dt + \int_S \frac{X(t_1 - r)}{r} dS$$

denotando $J_1(|\rho|)$ la funzione oscillante di Bessel di ordine uno.