



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 14
pag. 143-154

SULLE ONDE DI RAYLEIGH IN UN MEZZO ELASTICO, FIRMO-VISCOSO INDEFINITO (*)

(Con due figure)

PIETRO CALOI

SUMMARY. — Cum Auctor investigaverit quid efficiat firmo-viscositas in undarum Rayleigh propagationem per aliquam solidam substantiam, demonstrat, inter alia, interiorem attritum vim suam exserere in verticalem motus componentem, quam valde reducit, praesertim si periodus adeo parva sit ut relatio inter verticalem et horizontalem componentes ad unitatis ordinem pertineat. Haec conclusio magis cum observatis congruit, quam doctrina Railegh-Lamb, quae respicit ad propagationem per substantiam omnino elasticam. Animadvertendum est undas Rayleigh in substantia omnino elastica constanti velocitate propagari; in substantiis autem firmo-elasticis mutata periodo velocitas quoque mutatur, ita ut, ex velocitate quae nulla esset si periodus nulla esse posset, mox tendat ad eam velocitatem quae propria est substantiarum elasticarum, si periodus augeatur (quoque magis elasticitas vincit firmitatem eo magis velocitas crescit).

Com'è noto, una delle maggiori difficoltà che si oppongono alla identificazione delle onde superficiali costituenti la così detta fase principale di un sismogramma (generalmente indicata con M) con le onde superficiali studiate da RAYLEIGH, è costituita dalla sensibile disparità fra i valori osservati per il rapporto della componente verticale a quella orizzontale e quelli calcolati con la teoria di RAYLEIGH. Quest'ultima [1] prevede un valore costante per detto rapporto, mentre l'osservazione fornisce valori variabili entro larghi limiti. I valori osservati generalmente risultano inoltre, e in modo sensibile, inferiori a quello richiesto dalla teoria, che è dell'ordine di 1,47 (fatto uguale a 0,25 il coefficiente di Poisson).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Vercelli il 15 giugno 1946.

Le modificazioni ed estensioni portate alla teoria di RAYLEIGH non hanno risolto che in parte la questione, anche se hanno chiarito altri aspetti, in apparenza contrastanti, fra teoria ed osservazione. La variabilità dei valori del rapporto Z/H fra spostamenti in senso verticale e in senso orizzontale, è stata così giustificata anche in teoria, se si considera il fenomeno in un mezzo stratificato, anziché in uno indefinito [2].

Le ricerche finora compiute sull'argomento si sono limitate a considerare un mezzo puramente elastico. È noto però che la materia costituente la Terra non è esclusivamente elastica: essa presenta, in proporzioni più o meno notevoli, altre caratteristiche, particolarmente sensibile quella derivante dall'azione dell'attrito interno, nota sotto il nome di *firno-viscosità* [3].

Mi propongo qui di vedere a quali conclusioni conduce l'introduzione nella classica teoria di RAYLEIGH — propagazione alla superficie di un solido elastico indefinito, limitato da una superficie piana — dei termini richiesti dall'azione della *firno-viscosità*.

1. — Consideriamo il caso di un solido *firno-viscoso* semi-infinito, limitato dal piano $z=0$ e giacente dal lato positivo di questo piano.

Il fenomeno interessa il solo piano verticale xz . Siano u , w le componenti dello spostamento in detto piano. Sarà, al solito,

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad 2\eta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad ,$$

ϑ ed η esprimendo rispettivamente la dilatazione e l'angolo di distorsione nel piano di propagazione. Siano λ , μ le costanti di LAMÉ ed indichiamo con λ' , μ' i coefficienti dell'attrito interno di volume ed equivoluminale. Le componenti delle tensioni normale e tangenziale assumono le espressioni:

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + 2\mu' \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad , \\ [1] \quad N_3 &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda' \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + 2\mu' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \quad , \\ T_2 &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad , \end{aligned}$$

Le equazioni del moto in un mezzo isotropo elastico firmo-viscoso, di densità ρ , divengono allora (limitatamente al piano xz)

$$[2] \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left\{ (\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial x} - 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} , \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left\{ (\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial z} - 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} . \end{aligned}$$

Queste equazioni sono soddisfatte da

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} ,$$

dove Φ è funzione caratteristica per le onde longitudinali e ψ per quelle trasversali. Con questi valori di u , w le [2] conducono alle equazioni

$$[3] \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} + \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Delta_2 \Phi , \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Delta_2 \psi , \end{aligned}$$

dove Δ_2 è l'operatore di LAPLACE.

In caso di moto armonico semplice, essendo e^{ipt} il fattore tempo (p , pulsazione), le [3] assumono la forma

$$\begin{aligned} \left(\Delta_2 + \frac{p^2}{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} + ip \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho}} \right) \Phi &= 0 , \\ \left(\Delta_2 + \frac{p^2}{\frac{\mu}{\rho} + ip \frac{\mu'}{\rho}} \right) \psi &= 0 ; \end{aligned}$$

oppure, posto

$$[4] \quad h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu + ip(\lambda' + 2\mu')} ; \quad k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu + ip\mu'} ,$$

$$[5] \quad \begin{cases} (\Delta_2 + h^2) \Phi = 0 \\ (\Delta_2 + k^2) \psi = 0 . \end{cases}$$

In forza delle [5], le [1] si possono scrivere

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (\mu + ip\mu') \left\{ -k^2 \Phi - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right\} \\
 N_3 &= -(\mu + ip\mu') \left\{ k^2 \Phi + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right\} \\
 T_2 &= (\mu + ip\mu') \left\{ 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - k^2 \Psi' \right\}
 \end{aligned}
 \quad [6]$$

Date queste premesse, possiamo senz'altro seguire, con le opportune modifiche, la teoria sviluppata da LAMB sulla propagazione di oscillazioni alla superficie di un solido elastico [4]. Poniamo, a meno del solito fattore tempo,

$$\Phi = A e^{-\alpha z} \cdot e^{i\xi x}, \quad \psi = B e^{-\beta z} \cdot e^{i\xi x}$$

dove A, B sono costanti i cui valori vengono determinati mediante le [6], in base alle condizioni stabilite per le tensioni sul contorno. Ad ogni soluzione di particolari problemi, legati a determinati valori assegnati alle tensioni, possiamo sovrapporre un sistema di onde libere superficiali, aventi lunghezza d'onda determinata dall'imposto periodo $2\pi/p$. Sono queste le onde studiate da RAYLEIGH. Seguendo un procedimento analogo a quello stabilito da LAMB, arriviamo alla seguente espressione dell'equazione di RAYLEIGH:

$$1 - 8 \frac{\xi^2}{k^2} + \left(24 - 16 \frac{h^2}{k^2} \right) \frac{\xi^4}{k^4} - 16 \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \right) \frac{\xi^6}{k^6} = 0. \quad [7]$$

Questa equazione, di terzo grado in ξ^2/k^2 , ammette certamente una radice reale fra 1 e ∞ , essendo (limitatamente alla parte reale) $k^2 > h^2$; Le così dette onde di RAYLEIGH corrispondono a soluzioni reali della [7], comprese fra 1 e ∞ .

Studiando il caso di forze concentrate verticali e orizzontali applicate alla superficie, LAMB perviene a determinare, in forma esplicita, le espressioni spettanti alle corrispondenti onde di RAYLEIGH. A noi interessa qui limitarci alla considerazione del rapporto delle ampiezze

degli spostamenti verticali e orizzontali, relativi a queste onde. Il rapporto in questione è del tipo

$$\frac{K + K'}{H + H'} ,$$

K, K' riguardando gli spostamenti verticali dei due diversi tipi di sollecitazione; H, H' quelli orizzontali. È

$$H = \frac{\left(2 \frac{\xi_1^2}{k^2} - 1\right)^3}{16 \frac{\xi_1^2}{k^2} \left\{1 - \left(6 - 4 \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^2}{k^2} + 6 \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^4}{k^4}\right\}} ;$$

$$K = \frac{\sqrt{1 - \frac{h^2}{k^2} \frac{\xi_1^2}{k^2}} \left(2 \frac{\xi_1^2}{k^2} - 1\right)^2}{8 \left\{1 - \left(6 - 4 \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^2}{k^2} + 6 \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^4}{k^4}\right\}} ;$$

$$H' = \frac{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\xi_1^2}} \left(2 \frac{\xi_1^2}{k^2} - 1\right)^2}{8 \left\{1 - \left(6 - 4 \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^2}{k^2} + 6 \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^4}{k^4}\right\}} ; \quad K' = H ,$$

dove $\frac{\xi_1^2}{k^2}$ è la soluzione della [7] corrispondente alle onde di RAYLEIGH.

2. - Prima di passare alle applicazioni, vediamo che espressione assume la velocità delle onde di RAYLEIGH in un mezzo elastico firmo-viscoso. Analogamente alle [4], poniamo

$$\xi_1 = \frac{p}{c} ;$$

c è la velocità di propagazione delle onde di RAYLEIGH. Ricordando l'espressione di k^2 e limitandoci alla parte reale si ottiene

$$[9] \quad c = \frac{k}{\xi_1} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} k^2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \frac{\mu^2}{\rho^2} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^3 \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^6 + \dots \right\} .$$

Quando $\mu' = 0$ si ha per c l'espressione che la velocità assume nella teoria RAYLEIGH-LAMB. Poichè $k^2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2$ è sempre minore dell'u-

nità (escluso il caso $T=0$), l'espressione tra parentesi rappresenta una serie totalmente convergente. Pertanto, la velocità, da un valore teoricamente infinito (per $T=0$), tende rapidamente, per periodi crescenti, al valore che le compete in un mezzo puramente elastico; tanto più rapidamente, quanto maggiore è il valore del rapporto μ/μ' .

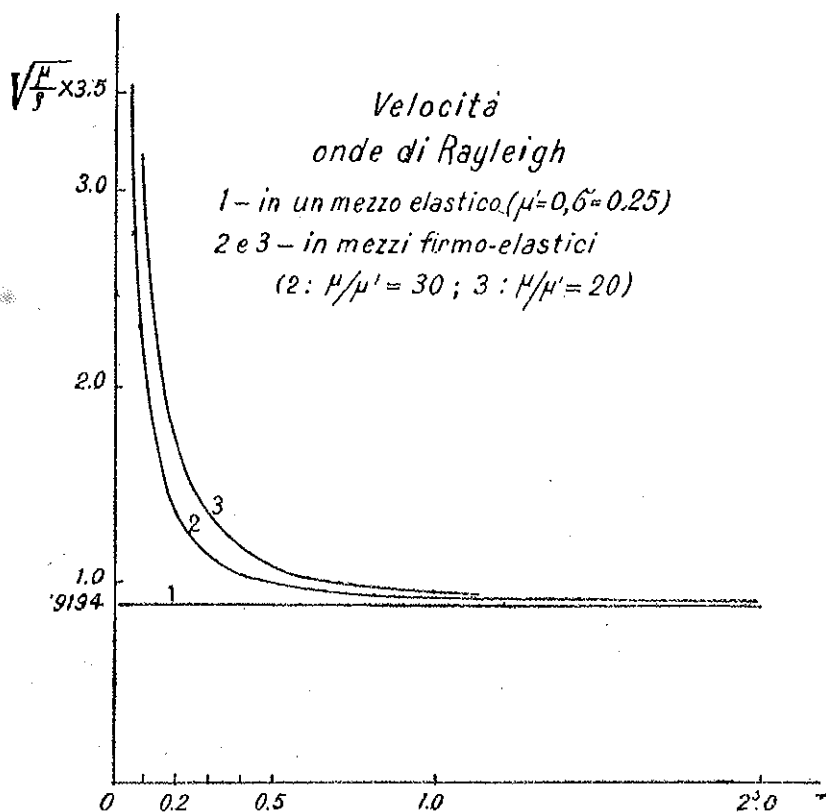


Fig. 1

La fig. 1 - dove si prescinde dall'assorbimento del mezzo - dà l'andamento del fenomeno per i casi $\mu/\mu' = 30$, $\mu/\mu' = 20$. Per l'uso della [9] si osservi che

$$k^2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 = \frac{p^2}{p^2 + \left(\frac{\mu}{\mu'} \right)^2}$$

Nei calcoli si è fatto il coefficiente σ di Poisson uguale a 0,25. È allora, come è noto, $\lambda = \mu$. Si dimostra inoltre che [5]

$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'.$$

Consegue per il rapporto k^2/h^2 , limitatamente alla parte reale,

$$[10] \quad \frac{k^2}{h^2} = 3 \left\{ 1 - \frac{5}{9} \frac{p^2}{\frac{9}{4} \left(\frac{\mu}{\mu'} \right)^2 + p^2} \right\}$$

Il valore di k^2/h^2 dipende quindi anche dal periodo, sia pure in misura rapidamente decrescente al crescere di questo.

Furono assegnati al rapporto μ/μ' i seguenti valori: 2, 3, 7, 20, 30.

I valori più elevati sembrano esprimere in modo attendibile il rapporto μ/μ' , relativamente agli strati superficiali della crosta terrestre [6].

L'unita tabella contiene i valori ottenuti per ξ_1^2/k^2 , determinati risolvendo la [7], tenuto conto della [10] - assegnando al rapporto μ/μ' uno dei valori su riportati - e facendo variare opportunamente il periodo $T = 2\pi/p$. Le [8] consentono di ottenere i corrispondenti valori del rapporto $\frac{K + K'}{H + H'}$.

3. - Dall'esame dei risultati (parzialmente diagrammati nella fig. 2), si possono trarre le seguenti conclusioni.

Per p tendente all'infinito ($T \rightarrow 0$), k^2/h^2 tende al valore costante 1,3333. Tendono quindi a valori costanti le grandezze ξ_1^2/k^2 , $\frac{K + K'}{H + H'}$, indipendentemente dal variare del rapporto μ/μ' . Per p tendente a zero ($T \rightarrow \infty$), k^2/h^2 tende a 3, valore che assume nell'equazione classica di RAYLEIGH, propria di un mezzo isotropo indefinito, puramente elastico. Per valori intermedi del periodo, l'azione della firma-viscosità è tanto maggiore quanto più piccolo è il periodo: massima per periodi prossimi allo zero, essa tende ad annullarsi per periodi tendenti ad aumentare oltre ogni limite, giusto il contrario di quanto si verifica per l'azione della viscosità.

La firmo-viscosità determina una sensibile riduzione della componente verticale del moto, riduzione che è tanto maggiore quanto più piccoli sono il rapporto μ/μ' e il periodo proprio dell'onda: per onde originanti con grossi periodi, l'azione della firmo-viscosità sul rapporto

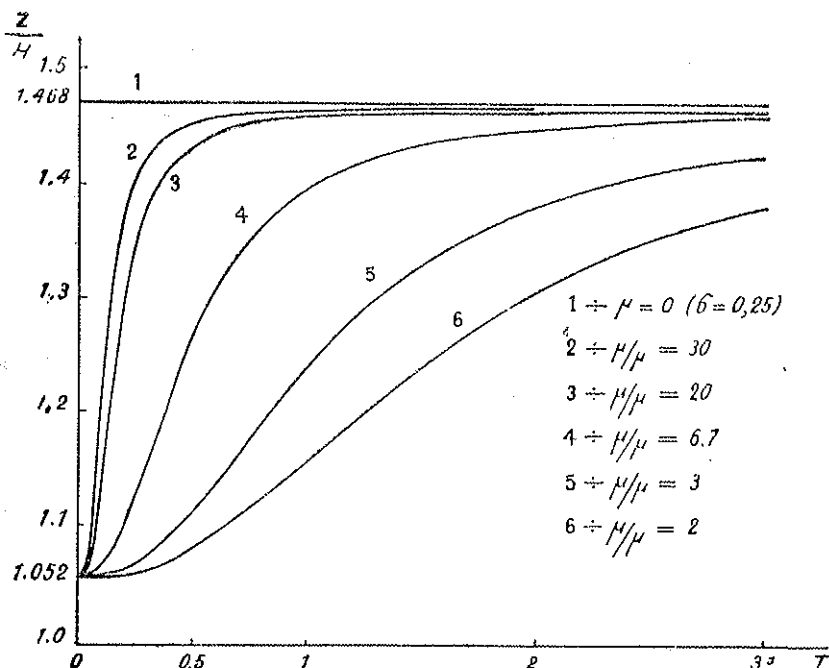


FIG. 2.

Valori del rapporto Z/H in funzione del periodo per $\mu' = 0$ (1), $\mu/\mu' = 30$ (2), $\mu/\mu' = 20$ (3), $\mu/\mu' = 7$ (4), $\mu/\mu' = 3$ (5) o $\mu/\mu' = 2$ (6), fatto $\sigma = 0,25$.

delle ampiezze è pressocchè nulla e il mezzo si comporta come puramente elastico⁽¹⁾.

L'azione della firmo-viscosità può quindi far variare il rapporto delle ampiezze Z/H da un valore prossimo all'unità a 1,47, valore che la teoria RAYLEIGH-LAMB assegna a quel rapporto per $\sigma = 0,25$.

(¹) Per quanto riguarda i periodi, è bene tener presente che essi sono relativi alle onde considerate nella loro origine. È noto infatti che un'altra azione della firmo-viscosità è quella di far aumentare, con la distanza, il periodo dell'onda [7]: aumento che, per una larga gamma di valori del periodo, è sensibile. In generale, quindi, i periodi osservati sono, in misura più o meno apprezzabile, più lunghi di quanto non siano all'origine.

TABELLA

$\frac{\mu}{\nu}$ T	2		3		7		20		30	
	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$
0*	2.1072	1.0522	2.1072	1.0522	2.1072	1.0522	2.1072	1.0522	2.1072	1.0522
0.05	—	—	—	—	—	—	1.8216	1.0808	1.6324	1.1145
0.1	2.09165	1.0583	2.0730	1.0547	1.9560	1.0648	1.4940	—	1.34305	1.2420
0.2	2.0478	1.05665	1.9824	1.0622	1.6980	1.1017	1.2767	1.6465 $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	1.22545	1.3802
0.3	—	—	—	—	1.4973	1.1558	1.2255	—	1.2021	1.4245
0.4	—	—	—	—	1.3779	1.2166	1.2070	—	—	—
0.5	1.8216	1.0808	1.6324	1.1145	1.3090	1.2720	—	—	1.1897	1.4518
0.6	—	—	—	—	1.2769	1.3066	1.1937	1.0332	—	—
0.7	—	—	—	—	1.2519	1.3390	—	—	1.1865	1.4594
0.8	—	—	—	—	1.23605	1.3627	1.1890	—	—	—
1.0	1.4940	1.15705	1.8405	1.2420	1.2171	1.3950	1.1869	0.9621	—	—

Segue: TABELLA

$\frac{w}{h^2}$ T	2		3		7		20			20		
	ξ_1^2/k^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ_1^2/k^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ_1^2/k^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ_1^2/k^2	c	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ_1^2/k^2	c	$\frac{K+K'}{H+H'}$
1.5	1.3480	1.2420	—	—	1.1983	1.4326	—	—	—	—	—	—
2.0	1.2767	1.3068	1.2255	1.3802	1.1916	1.4474	—	—	—	1.1834	0.9243	1.4669
2.5	1.2438	1.3507	—	—	1.1901	1.4509	—	—	—	—	—	—
3.0	1.2255	1.3801	1.2021	1.4245	1.1869	1.4586	—	—	—	—	—	—
4.0	1.2070	1.4144	—	—	1.1852	1.4625	1.1833	0.9221	1.4672	—	—	—
5.0	—	—	1.1897	1.4518	—	—	—	—	—	—	—	—
6.0	1.1937	1.4426	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7.0	—	—	1.1865	1.4594	—	—	—	—	—	—	—	—
8.0	1.1890	1.4534	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10.0	1.18685	1.4585	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
∞	1.1880	1.4679	1.1880	1.4679	1.1880	1.4679	1.1880	$0.9194 \sqrt{\frac{2}{e}}$	1.4679	1.1880	$0.9194 \sqrt{\frac{2}{e}}$	1.4679

Come si è detto l'osservazione mostra tutta una serie di valori per quel rapporto. GALITZIN, in una ventina di osservazioni, ottenne 0,90: MAINKA [8], come media di 80 valori, 0,91 e, in una serie di 413 osservazioni microsismiche, 0,83 ⁽¹⁾. Lo stesso MAINKA, esaminando 280 sismogrammi, ottenne 534 valori singoli, così classificati: il 31% compresi fra 0,91 e 1,00; e il 28% fra 1,21 e 1,50; altri valori furono compresi fra un minimo di 0,5 e un massimo di 2,0. Successive osservazioni confermarono la grande varietà dei risultati, con prevalenza fra 0,9 e 1,2.

L'azione della firno-viscosità in un mezzo elastico indefinito è quindi sufficiente a render ragione del variare del rapporto Z/H , conformemente ai dati dell'osservazione; non basta però a spiegare i valori di detto rapporto sensibilmente inferiori all'unità, forniti dall'osservazione.

In un prossimo lavoro mi propongo di vedere se il problema trova completa soluzione considerando la propagazione in un mezzo elastico, firno-viscoso stratificato.

⁽¹⁾ Relativamente ai microsismi, una precedente ricerca [9] avrebbe provato il pieno accordo fra teoria di RAYLEIGH e osservazione. Tale risultato è però reso illusorio da un'erronea impostazione dei calcoli.

BIBLIOGRAFIA

- [1] RAYLEIGH LORD, *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.*
«Scientific Papers», II, pag. 441-447.
- [2] SUZUKI T., *Amplitude of Rayleigh waves on the surface of a stratified medium.*
«Bulletin of the Earthquake Research Institute», Tokyo Imperial University, vol. XI, 1933.
- [3] SEZAWA K., *On the decay of waves in visco-elastic solid bodies.* «Bull. Earth. Res. Inst.», Tokyo, vol. III, 1927.
- [4] LAMB H., *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.*
«Philosophical Transactions» vol. CCIII-A.-1904.
- [5] GUTENBERG B., *Die Viskosität und die innere Reibung im Erdinnern.* «Handbuch der Geophysik», Band II, Lief. 1^o.
- [6] — *Internal Constitution of the Earth.* «Mc Graw-Hill Book Company», 1939.
CALOI P., *Sull'attrito interno nella crosta terrestre.* «La ricerca scientifica», Anno XIV, n. 1, 1943.
- [7] — *Sopra alcuni nuovi sistemi di onde sismiche, oscillanti nel piano principale.* «Rendiconti Accademia d'Italia», Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VII, vol. II, 1940.
- [8] MAINKA K., *Physik der Erdbebenwellen.* «Borntraeger», Berlin, 1923, pag. 44-45.
- [9] ANDREOTTI G., *Azione dinamica del moto ondoso dell'Adriatico sulla costa.*
«Atti Istituto Veneto», Tomo XCI - Parte seconda, 1932.