PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X. - N. 2
pag. 21-42

CONSIDERAZIONI SULLA COMPATIBILITÀ DI UN SISTEMA DI POSTULATI E SULLA DIMOSTRABILITÀ DELLE FORMULE MATEMATICHE(*)

ETTORE CARRUCCIO

SVMMARIVM. — Problema decernendi, an omnes consequentiae quorundam postulatorum possint, quacumque semota repugnantia, una simul consistere an non, pluries occurrit in historia scientiarum, quousque nostris hisce temporibus mathematicus K. Gödel theorema protulit quod ita enuntiatur: Posito, quod aliqua de mathematica doctrina nullas contineat interiores contradictiones, impossibile est hanc eius proprietatem naturamque demonstrare, unico ipsiusmet doctrinae adhibito auxilio. Quamvis demonstratio sui theorematis, quam Gödel instituit, rem non adeo evincat, ut nil omnino obiici possit, tamen in presenti disquisizione nova argumenta exponuntur, quae ipsum theorema roborant, et simul singulares novae consequentiae derivantur, quas inter inprimis numerorum existentia, de quibus impossibile est demonstrare, an rationales aut irrationales sint appellandi.

§ 1. – Il problema di stabilire la non-contraddittorietà dei principi fondamentali della matematica (1) non poteva presentare vivo interesse per i pensatori dell'antichità che hanno esercitato influenza profonda e duratura sullo sviluppo della filosofia e della scienza: per Platone, ad esempio, assiomi, postulati, definizioni matematiche riflet-

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 29 marzo 1945.

(1) Sento il dovere di esprimere la mia viva gratitudine al Prof. F. Enriques, il quale durante l'anno 1944, anche in ore per lui e per me di pericolo, s'intratteneva a ragionare serenamente intorno a questioni di logica matematica su cui è ben nota la sua competenza, ascoltato dal suo antico allievo che gli esponeva il frutto dei suoi studi sugli argomenti trattati nel presente lavoro, nel quale quando si riferisce il pensiero del prof. Enriques senza indicare lo scritto in cui si trova espresso, si tratta di considerazioni svolte nei dialoghi ai quali si è ora accennato.

tevano una realtà trascendente superiore alla mente umana (1), ed era quindi escluso «a priori» il pericolo d'incontrare contraddizioni nelle conseguenze logiche di detti principi.

Ma quando in seguito all'evoluzione del pensiero matematico moderno (2) alla base di ogni sistema ipotetico-deduttivo (3) sono state poste proposizioni, dal punto di vista della logica formale, arbitrarie, il problema di garantire la non-contraddittorietà e compatibilità di un sistema di postulati divenne d'interesse fondamentale, acuito dagli sconcertanti paradossi della teoria degli insiemi (4).

Sul problema che stiamo esaminando vennero conseguiti risultati particolari assai notevoli: è stata ricondotta, ad esempio, la compatibilità dei postulati alla base di ciascuna delle geometrie non-euclidee alla non-contraddittorietà della geometria euclidea (5) e la non-contraddittorietà di questa ultima a quella dell'analisi (6).

Il problema generale venne inquadrato da F. Enriques nella sua concezione della logica, considerata come un ramo della psicologia, il

---

(1) V. per es. Platone (n. 428-7, m. 348-7 a. C.) *Eutidemo* 290*bc*: «i geometri... sono cacciatori; non creano essi medesimi le figure geometriche, ma vanno in cerca di quelle esistenti.» (trad. F. Zambaldi, ed. Laterza, Bari, 1927). Il realismo platonico si traduce nell'affermazione della oggettività della matematica (cfr. A. Frajese, *I dialoghi di Platone e la storia della matematica*; Riv. «Sophia» Padova, gennaio-marzo 1943). Dal pensiero platonico deriva il realismo di Aristotele (n. 384, m. 327 a. C): la logica considera i rapporti fra gli enti di un mondo intelligibile. La tesi realistica è stata ripresa dal logico matematico contemporaneo B. Russel (v. B. Levi, *Logica matematica*, art. dell'Enciclopedia Italiana Treccani, con relativa notevole aggiunta non firmata: *Il significato della logica*).

(2) V. F. Enriques, *Per la storia della logica*, (Bologna 1922), Cap. III, *La riforma della Logica contemporanea*; e *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da F. Enriques, parte I, vol. I (Bologna, 1924), art. I di F. Enriques, § 12.

(3) La locuzione: sistema-ipotetico-deduttivo è stata introdotta da M. Pieri (n. 1860, m. 1913), cfr. F. Enriques, *Per la storia della logica*, *op. cit.*, pag. 203.

(4) Sulle antinomie della logica v. p. es. B. Levi, art. già citato, e F. Waismann, *Introduzione al pensiero matematico* (Torino 1942), VI, pagg. 101-117.

(5) V. per es. R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Bologna, 1906; oppure art. XI dello stesso Autore sulle *Questioni*... raccolte da F. Enriques (*op. cit.*, part. I, Vol. II, Bologna, 1925); F. Enriques, *Conferenze di geometria non-euclidea*, Bologna, 1917; G. Fano, *Geometria non-euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività*, Bologna, 1925; F. Waismann, *op. cit.*, III, Aritmetica e geometria, pag. 35-41.

(6) V. F. Waismann, *op. cit.*, pagg. 41-43.

quale ha per oggetto la critica dei procedimenti elementari del pensiero esatto rispecchiantisi nei principi fondamentali del ragionamento, e prende in esame non soltanto le formule scritte, ma anche le convenzioni e le norme inespresse in simboli, le quali reggono i modi di combinare i simboli stessi [1]. Secondo tale visione della logica, intesa come teoria delle operazioni mentali non completamente traducibili in un sistema di segni, non devono sorprendere gli insuccessi degli indirizzi logici che intendono fornire un'espressione simbolica integrale delle teorie matematiche.

I tre principi della logica: d'identità, non-contraddizione, terzo escluso, vengono considerati come condizioni d'invarianza alle quali devono soddisfare gli oggetti del pensiero logico; le operazioni logiche eseguite a partire da oggetti in numero finito, effettivamente pensati, soddisfaconti a dette condizioni, come osserva l'Enriques, non possono condurre ad una contraddizione. Più difficile è il caso che si presenta di solito nelle teorie matematiche, in cui si tratta d'infiniti oggetti, non pensati effettivamente ad uno ad uno, ma tali da soddisfare a certe limitazioni (postulati) che definiscono i concetti stessi. Un giudizio sulla compatibilità di un tale sistema di postulati può basarsi, secondo l'Enriques, sulla esperienza fisica e psicologica, sull'intuizione, su di una dimostrazione logica, attribuendosi solo a quest'ultima il valore di prova rigorosamente certa di detta compatibilità; ma il valore di tale prova viene considerato relativo, in quanto si tratta di riconoscere che dalla supposta compatibilità dei rapporti che definiscono i concetti di un certo sistema, segue la compatibilità dei rapporti che definiscono i concetti del sistema su cui si deve esprimere il giudizio. Per quanto riguarda la compatibilità dell'aritmetica dei numeri naturali, la dimostrazione di Enriques si fonda sull'esperienza psicologica, secondo la quale si possono illimitatamente ripetere certi atti del pensiero, in modo di costruire una serie di oggetti che soddisfino ai noti postulati alla base dell'aritmetica: la successione

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots$$

---

(1) V. F. Enriques, *Problemi della Scienza*, Bologna, 1906, cap. III, § 3, pagg. 163, 168.

ottenuta considerando dapprima un oggetto a, poi b = pensiero di a, quindi c = pensiero di b e così di seguito all'infinito, soddisfa i postulati: ogni oggetto della successione possiede un successivo determinato ed un determinato precedente all'infuori del primo che non succede ad altri, e per questi oggetti vale il principio d'induzione matematica [1]. Ma l'ENRIQUES stesso, riflettendo sopra le antinomie che si sono riscontrate nell'uso della proprietà riflessiva del pensiero, e tenendo conto della teoria dei tipi di B. RUSSELL [2] preferisce ora basare la numerazione sopra un presupposto fisico:

« Si prendano come *date* più *serie* di oggetti:

$$\begin{array}{l} a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots \\ m,\ n,\ p,\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

delle quali si denotino i termini generali con A, M, ... Suppongasi per ciascuna serie che:

1) ogni oggetto abbia un successivo determinato;

2) ogni oggetto, all'infuori di uno (il *primo*), che non succede ad altri, abbia un determinato precedente;

3) valga la proprietà seguente (*principio d'induzione matematica*): se una classe di oggetti è tale che insieme ad ogni A contenga il suo successivo, e se contiene a, essa conterrà tutti gli elementi della serie $a, b, c,$ ...... (analogamente per le altre serie).

Possiamo formare le serie seguenti:

$$\begin{array}{llll} (a) & (ab) & (abc) & \ldots\ldots \\ (m) & (mn) & (mnp) & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

(1) V. F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*, *op. cit.*, cap. III, specialmente pag. 193-203, e *Per la Storia della Logica*, *op. cit.*, pagg. 210-212.

(2) V. B. RUSSELL, *Mathematical Logic as based on the theory of types*, « Amer. J. of Math. », 30 (1908); v. anche D. HILBERT e W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (ed. Springer, Berlino, 1928), cap. IV, § 5, pagg. 98 e segg.

Riunendo in una classe (composta) gli oggetti (classi) che si trovano in una medesima colonna del quadro precedente, definiamo, per astrazione, successivamente i numeri

1, 2, 3, ...

Lo sviluppo delle operazioni aritmetiche si lascia quindi fondare sopra gli assiomi logici e sui postulati 1), 2), 3) » (¹).

Ma una volta stabilita la compatibilità dei postulati dell'aritmetica, si può dimostrare rigorosamente la compatibilità dell'analisi? La risposta di K. Gödel in proposito sarebbe negativa: le sue ricerche lo avrebbero portato a concludere che è impossibile ricondurre la non contraddittorietà dei numeri reali a quella dei numeri interi (²).

Più fondati dubbi possono sorgere sulla compatibilità dei postulati alla base della teoria degli insiemi, in cui sono state prese da B. Russell precauzioni allo scopo di evitare i paradossi noti, ma s'ignora se si è al sicuro da nuove antinomie che potrebbero incontrarsi in successivi sviluppi (³).

Queste considerazioni ci riconducono al problema generale della compatibilità dei postulati alla base di un sistema ipotetico-deduttivo, e c'inducono a chiederci se è possibile superare il carattere relativo attribuito dall'Enriques alla dimostrazione logica della compatibilità di un sistema di postulati. Il problema fu ritenuto sulla via della sua completa risoluzione in seguito alle ricerche di Hilbert (⁴), le quali

---

(¹) V. F. Enriques, *Problemi della Scienza*, *op. cit.*, cap. III, § 19.

(²) V. F. Waismann, *op. cit.*, XIII, E, pag. 288, dove si trova enunciato il risultato ora esposto, ma non la sua dimostrazione, nè l'indicazione del lavoro del Gödel.

(³) V. F. Waismann, *op. cit.*, VI, pag. 110.

(⁴) V. p. es. D. Hilbert und W. Ackermann, *op. cit.*, specialmente a pag. 2 e 29-31; alle pagg. 116-118 trovasi una bibliografia sulla logica matematica; nel cap. I, § 12, pag. 29, un sistema di postulati vien detto non contraddittorio quando non è possibile dedurne due proposizioni X e $\overline{X}$ (negazione di X). Nel cap. I, § 12, pagg. 29-31 di detta opera, si dà una dimostrazione della non-contraddittorietà del sistema di postulati posto da Hilbert alla base della logica; ma tale dimostrazione si basa su di un'interpretazione aritmetica dei postulati in questione; presuppone quindi la compatibilità dell'aritmetica. Inoltre v. F. Waismann, *op. cit.*, pagg. 114-117 e pag. 141.

però furono seguite dall'Enriques (1) con uno scetticismo che apparve in seguito pienamente giustificato da uno sconcertante risultato del Gödel (2) che verrà esposto nel presente lavoro (§ 2) con alcune osservazioni critiche (§ 3); mentre nel § 4 si vedrà che dal risultato del Gödel sull'impossibilità di dimostrare la non-contraddittorietà di un qualsiasi sistema ipotetico-deduttivo, si deducono singolari conseguenze nel campo dell'analisi matematica.

§ 2. Risultati del Gödel relativi all'esistenza di affermazioni indecise, ed all'indimostrabilità della compatibilità di un sistema di postulati. – Un'affermazione A si dice indecisa in un determinato sistema ipotetico-deduttivo quando è impossibile dimostrare tanto A quanto la negazione di A, che s'indica con $\bar{A}$. Il Gödel, nel già citato articolo del 1931 fornisce due dimostrazioni del suo risultato relativo all'esistenza di affermazioni indecise: la prima dimostrazione, considerata dal suo autore senza pretese di rigore, si riferisce ad un qualsiasi sistema ipotetico-deduttivo S che soddisfi a condizioni assai poco restrittive; la seconda, il pensiero fondamentale della quale era stato delineato nella prima, viene svolta dettagliatamente, ma presenta tuttavia ancora qualche lacuna, rilevata dall'autore stesso, ed è dedicata in modo particolare al sistema P, fondato sui 5 assiomi dell'aritmetica di Peano, e su quelli alla base dei «principia mathematica» di A. Whithead e B. Russell (Cambridge, 1925) mentre si dà un cenno sulle applicazioni agli altri sistemi.

Il Gödel nel suo citato articolo preannuncia la pubblicazione in un suo successivo lavoro, della dimostrazione rigorosa e completa del risultato in questione; non mi risulta tuttavia che tale pubblicazione sia effettivamente avvenuta (nel libro del Waismann, *Introduzione al pensiero matematico*, traduzione edita a Torino nel 1942, si cita soltanto lo scritto del Gödel del 1931).

---

(1) V. F. Enriques, *Problemi della Scienza*, *op. cit.*, cap. III, § 19, pag. 203.

(2) K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter*, Systeme I (Monatshefte für mathematik und physik, Leipzig, 1931, pag. 173-198) e F. Waismann, *op. cit.*, pag. 142-144.

Per semplicità ci riferiremo al ragionamento del GÖDEL esposto sotto la prima forma, di cui daremo la seguente esposizione, riserbando al prossimo § le osservazioni critiche in proposito.

Un sistema ipotetico-deduttivo S è costituito da postulati e teoremi (1) espressi mediante un insieme di formule (2), le quali sono successioni di segni fondamentali [variabili, costanti logiche, come: ε (appartiene), $\equiv$ (significa) etc.] (3); e si ammette di poter riconoscere quali successioni di segni hanno un senso e quali non lo hanno. Analogamente le dimostrazioni, dal punto di vista formale si presentano come successioni finite di formule con speciali caratteristiche. Possiamo rappresentare i segni fondamentali mediante dei numeri naturali, perciò una formula si presenterà come una successione finita di numeri naturali, ed una dimostrazione come una successione finita di successioni finite di numeri naturali. I concetti e i teoremi relativi alla dimostrabilità delle formule di un sistema S, ed in particolare alla dimostra-

(1) Le definizioni in un sistema formale si considerano soltanto come modi di scrivere abbreviato e quindi sono principi superflui ai fini del presente lavoro (cfr. K. GÖDEL, art. citato, nota (6) a pag. 174 di detto articolo. Sullo sviluppo storico del concetto di definizione, che nei sistemi ipotetico-deduttivi, secondo la logica moderna, ha assunto carattere esclusivamente nominale, v. F. ENRIQUES, *Per la storia della Logica* (già citata), specialmente Cap. III; *La definizione come problema scientifico*, in «Periodico di matematiche», 1925; *Definizione* (art. dell'*Enciclopedia Italiana Treccani*).

(2) Tentativi di costruire una ideografia logica, di tradurre cioè in simboli le relazioni logiche, risalgono a G. G. LEIBNIZ (n. 1646, m. 1716), che chiamò detta ideografia *characteristica universalis*. Il programma di LEIBNIZ venne raccolto da G. PEANO (n. 1858, m. 1932), che a partire dal 1895, con la collaborazione di amici e discepoli espresse mediante il suo simbolismo nel *Formulario Mathematico* estesi campi dell'analisi (v. B. LEVI, *Peano, Giuseppe*, articolo dell'*Enciclopedia Italiana Treccani*, con bibliografia sull'argomento).

(3) *Ogni sistema ipotetico-deduttivo S in cui compaiono simboli $s_0 s_1 \ldots s_{x-1}$ può essere anche espresso mediante 2 soli simboli.* Infatti: osserviamo innanzi tutto che è possibile far corrispondere ad ogni simbolo di S una lettera e scrivere queste lettere con punti e linee secondo l'alfabeto Morse. Ma in questa scrittura esistono gl'intervalli quindi i simboli impiegati sono 3. Per impiegare effettivamente due soli simboli facciamo corrispondere ad s_0 un punto, ad s_1 due punti... ad s_{x-1} x punti. Tra una di queste successioni di punti e l'altra intercaliamo una linea; tra una formula e l'altra due linee ecc. Così l'intento viene raggiunto. Si potrebbe obbiettare che il punto e la linea (o due altri qualsiasi segni differenti) non sono simboli logici; tuttavia esaminando la questione, non sembra che esista una differenza sostanziale tra punto e linea da una parte e gli altri simboli logici dall'altra.

bilità della compatibilità del sistema stesso, diventano così esprimibili mediante i concetti e i teoremi relativi ai numeri naturali ed alle successioni di essi.

Dimostriamo ora il *Teorema I: Si può formulare un'affermazione A tale che nè A, nè la negazione di A è dimostrabile in S.*

A questo scopo stabiliamo una corrispondenza biunivoca tra la serie naturale dei numeri e le formule aventi senso in S e contenenti una sola variabile che varia nel campo dei numeri naturali, ed indichiamo con $R(m)$ l'ennesima di tali formule (1).

Indichiamo con $[R(m); n]$ la formula ottenuta a partire da $R(m)$, quando al posto della variabile si sostituisce il numero naturale n.

Definiamo ora una classe K di numeri naturali nel modo seguente: Un numero naturale n appartiene alla classe K, quando e soltanto quando non è dimostrabile in S la formula $R(n)$ in cui al posto della variabile è stato sostituito il numero n; ciò che si esprime in simboli scrivendo:

$$[1] \qquad n \varepsilon K \equiv \overline{\mathrm{Dim}}\,[R(n); n]$$

Fra le formule del tipo $[R(m); n]$ dovrà anche esistere quella che s'interpreta: il numero naturale n appartiene alla classe K; sia $R(q)$ tale formula, in simboli:

$$R(q) \equiv n \varepsilon K$$

In particolare per il numero naturale q:

$$[2] \qquad [R(q); q] \equiv q \varepsilon K$$

(1) Il Gödel propone di ordinare le formule R(m) secondo somme crescenti dei numeri che compaiono in dette formule, e in caso di parità secondo « somme lessicografiche ». Sembra che questa proposta s'interpreti nel modo seguente: se s ed s' sono le somme dei numeri che rappresentano rispettivamente le formule f ed f', allora se $s < s'$ allora f precede f'. Se poi $s = s'$, sostituiamo ai numeri $1, 2, 3, \ldots$ le lettere $a, b, c, \ldots$ in ordine alfabetico (aggiungendo se occorre altre lettere convenzionali) nelle formule f ed f', delle quali faremo precedere quella che precede in ordine alfabetico (come in un vocabolario).

Si dimostra precisamente che l'affermaziane $q \varepsilon K$ è indecisa: supponiamo infatti che sia dimostrabile $q \varepsilon K$, cioè

$$[3] \qquad \mathrm{Dim}\,(q \varepsilon K)$$

Allora $q \varepsilon K$ sarebbe valida in S e quindi per la [1] in cui ad n si sostituisce q:

$$\overline{\mathrm{Dim}}\,[R(q);\, q]$$

cioè per la [2]

$$\overline{\mathrm{Dim}}\,(q \varepsilon K)$$

in contraddizione con l'ipotesi [3].

Se invece fosse dimostrabile la negazione di $q \varepsilon K$ avremmo:

$$[4] \qquad \mathrm{Dim}\,(\overline{q \varepsilon K})$$

quindi sarebbe valida in S

$$\overline{q \varepsilon K}\,.$$

Ma allora sostituendo nella [1] q ad n, e ricordando che due negazioni applicate ad una proposizione si elidono, abbiamo:

$$\mathrm{Dim}\,[R(q);\, q]$$

cioè per la [2]

$$\mathrm{Dim}\,(q \varepsilon K)$$

Ma per l'ipotesi [4] la formula $q \varepsilon K$ risulterebbe dimostrabile insieme con la sua negazione ciò che è assurdo. Si conclude che l'affermazione $q \varepsilon K$ è indecisa c. v. d.

Il teorema del Gödel sull'impossibilità di dimostrare la non-contraddittorietà di un sistema ipotetico-deduttivo S, viene ottenuto da detto autore come una conseguenza del risultato di cui sopra sulle affer-

mazioni indecise, esposte sotto la seconda forma, cioè per il sistema P e con qualche lacuna. Tuttavia, anche basandosi sull'esposizione precedente (I^a forma) è facile ricavare il risultato fondamentale in questione. Si ottiene cioè il seguente *Teorema II: Non è dimostrabile la non-contraddittorietà di un sistema ipotetico-deduttivo, servendosi soltanto di mezzi offerti dal sistema stesso.*

Infatti: nel teorema precedente è stato stabilito che se si ammette la non-contraddittorietà di S, si deve escludere la validità della formula

$$[5] \qquad \mathrm{Dim}\,(q \varepsilon K)\ ;$$

quindi se si dimostra la non-contraddittorietà di S, si dimostra anche che la [3] conduce all'assurdo; si dovrebbe dunque concludere che è dimostrata la sua negazione

$$[5] \qquad \overline{\mathrm{Dim}}\,(q \varepsilon K)\ .$$

ma per la [2] e per la [1] nella quale al posto di n è stato sostituito q si avrà che in tal caso risulta dimostrata la formula

$$q \varepsilon K$$

cioè

$$\mathrm{Dim}\,(q \varepsilon K)$$

che è in contraddizione con l'ipotesi [5]. Si conclude che la possibilità di dimostrare la non-contraddittorietà di S, conduce ad una contraddizione nel sistema S stesso.

Secondo il Gödel la compatibilità dei postulati alla base di un sistema ipotetico-deduttivo S, non si può dunque dimostrare con i soli mezzi offerti dal sistema S. Si può aggiungere che secondo quest'ordine d'idee è impossibile dare alla dimostrazione logica della compatibilità di un sistema S, un valore maggiore di quello relativo attribuitogli dall'Enriques (v. § 1 del presente lavoro).

Infatti supponiamo di essere riusciti a dimostrare la compatibilità di S coi mezzi offerti da un'altro sistema T; questa dimostrazione rag-

giungerebbe effettivamente il suo scopo, se si potesse dimostrare la compatibilità di T; ma ciò non è possibile con i mezzi offerti da T; si dovrebbe quindi ricorrere ad un'altro sistema U, e così via. Sia che in questo procedimento s'incontrino sempre nuovi sistemi, sia che nella successione S, T, U, ... si ricada in qualche sistema già incontrato nella successione stessa, la dimostrazione delle compatibilità di S non può arrivare ad una conclusione definitiva; ma tale compatibilità può soltanto venir stabilita, se si vuole, mediante un postulato in base all'esperienza fisica o psicologica od all'intuizione.

§ 3. Osservazioni critiche sui risultati del Gödel. – Non ci possiamo nascondere quanto siano delicati i ragionamenti esposti nel precedente § e la giustificata diffidenza che dette argomentazioni ispirano ai matematici al corrente delle antinomie già presentatesi nel mondo della logica. Lo stesso Gödel (1) rileva l'analogia che sussiste fra il suo risultato relativo all'esistenza di affermazioni indecise (esposto nel teorema I del presente lavoro) e i paradossi del « Bugiardo » e di Richard (2).

Esaminiamo dunque alcune obbiezioni alle quali prestano il fianco i ragionamenti del Gödel con osservazioni in proposito.

Ci chiediamo in primo luogo: è possibile riconoscere quali successioni di simboli costituiscono formule dotate di senso e quali no? La questione è piuttosto delicata: nell'opera di Hilbert e Ackermann, già citata nella nota (2) a pag. 24, la nozione « aver senso », assunta come primitiva, non viene ulteriormente approfondita (v. pag. 3 di detta opera).

Sull'argomento si possono fare le seguenti riflessioni:

Possiamo intendere che *un'affermazione ha senso in S*, quando si riferice ad oggetti del pensiero logico, tali cioè da soddisfare alle condizioni espresse dai tre principi della logica: identità, non contrad-

(1) K. Gödel, art. già citato, § 1.

(2) Il paradosso del « bugiardo » consiste nel notare che se qualcuno dice « io mento », egli mente se dice la verità e dice la verità se mentisce. Il paradosso di Richard concerne « il minimo numero che non si può definire con meno di cento parole » e che appunto così viene invece definito con meno di cento parole. Cfr. scritti citati nella nota (1) a pag. 22 del presente lavoro.

dizione, terzo escluso; quindi se A è un'affermazione avente senso deve essere valida in S una ed una sola delle due affermazioni: A, $\bar{A}$. Ciò significa che hanno senso le affermazioni relative ad oggetti del pensiero che compaiono nei postulati dai quali vengono implicitamente definiti, oppure sono stati costruiti mediante operazioni logiche consentite dai postulati stessi.

Notiamo che un'affermazione priva di senso in un sistema S può aver senso in un sistema T. Per es. l'uguaglianza

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}$$

per $|x| > 1$ è priva di senso nella teoria dei numeri reali ed ha senso nella teoria dei numeri complessi. I postulati ed i teoremi di S, le loro negazioni, e le altre eventuali affermazioni che soddisfano le condizioni di cui sopra hanno senso in S: per es. il V postulato di EUCLIDE ha senso rispetto ai principi precedentemente introdotti, pur essendo indimostrabile insieme con la sua negazione, rispetto ad essi.

Si può però intendere la nozione « avere senso » in modo più restrittivo, dal punto di vista neo-positivista secondo il quale il criterio esposto per stabilire quali affermazioni hanno un senso, viene ritenuto troppo largo ed infido, e se ne sostiene un altro, che attribuisce un senso soltanto ai postulati, ai teoremi dimostrati ed alle loro negazioni, in quanto si possa dimostrare che non sono validi in S, non attribuendosi un senso alle affermazioni indecise.

Vediamo per chiarire meglio i termini della questione come viene applicato in un caso particolare, ma di notevole interesse, quest'ultimo criterio dal WAISMANN, seguendo la corrente neo-positivista del « circolo viennese » di cui L. WITTGENSTEIN fu l'ideatore. Si tratta di stabilire quando è che ha un senso un'affermazione relativa ad un numero reale. Consideriamo ad esempio il numero

$$n = 0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \ldots$$

dove a_n è uguale ad 1 se l'equazione di FERMAT

$$x^n + y^n = z^n$$

è risolubile con numeri interi, mentre $a_n = 0$ nel caso contrario.

Per il momento non sappiamo se $n = 0,11$ o se è maggiore.

Se il teorema di FERMAT fosse indimostrabile e fosse anche indimostrabile la sua negazione, secondo il WAISMANN il simbolo $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ non rappresenterebbe un numero, non avrebbe senso. Lo stesso autore ritiene che anche se di un decimale illimitato si sanno calcolare le successive cifre decimali, non per questo si può attribuire a tale decimale il nome di numero reale, perchè non è detto che si possa stabilire se si tratta di un numero razionale o irrazionale (1).

Se noi seguiamo quest'ordine d'idee dobbiamo rinunciare ad attribuire un senso alle affermazioni indecise, anzi dobbiamo bandire dai nostri ragionamenti quegli enti matematici intorno ai quali si possono enunciare affermazioni indecise; risulteranno quindi infirmate le dimostrazioni dei teoremi I e II del GÖDEL (v. § 2 del presente lavoro), perchè la classe K non avrebbe senso in S, dato che non si può stabilire con i mezzi offerti da S, se q appartiene o no alla classe K stessa. Una critica analoga potrebbe essere rivolta a qualunque dimostrazione dei teoremi I e II che stiamo esaminando, svolgendo le considerazioni seguenti: se dimostriamo che l'affermazione A « S non è contraddittorio » è indecisa, allora A non ha senso, cioè non ha senso di parlare in S di non contraddittorietà di S; ma noi ci possiamo valere in un ragionamento, solo di un sistema per il quale abbia senso la non contraddittorietà, anzi sia non contraddittorio, quindi noi non possiamo valerci di S in un ragionamento, in particolare in quello che conduce a concludere che A è indecisa; naturalmente nemmeno potremo dimostrare che A è indecisa senza valerci di S, dato che A si riferisce appunto ad S; si conclude che in nessun modo si può stabilire che A è indecisa, se le affermazioni indecise si considerano prive di senso. A rigore sembra che un neo-positivista non dovrebbe accettare la dimostrazione del teorema II del GÖDEL ma restare in dubbio circa la sua validità fino a che si fosse eventualmente dimostrata la negazione del teorema stesso; notiamo però che WAISMANN accetta i risultati del GÖDEL (2). Questo dubbio circa le possibilità di dimo-

(1) V. F. WAISMANN, *op. cit.*, pagg. 178, 286, 287. A pag. 284-286 dell'opera stessa si esamina un limite, che secondo l'interpretazione dell'intuizionista BROUWER fornisce l'esempio di un numero reale che non è positivo, nè nullo, nè negativo.

(2) V. F. WAISMANN, *op. cit.*, pagg. 142-144.

strare la compatibilità di un sistema ipotetico-deduttivo S, basterebbe per rendere al neo-positivista malsicura qualunque sua deduzione nell'ambito di un sistema S.

In particolare il neo-positivista dovrà evitare di trattare di quei numeri per cui non è stato finora dimostrato se sono razionali o irrazionali, p. es. dovrà bandire dai suoi ragionamenti la costante di Eulero, perchè in tali numeri potrebbe annidarsi un non senso .... Ma la vastità del campo a cui si può estendere la critica neo-positivista non potrebbe forse costituire una sua debolezza? Dove il matematico sarebbe al sicuro dai non sensi? E allora non sarebbe meglio ritornare ad ammettere che un'affermazione indecisa può possedere un senso, purchè soddisfi alle condizioni precedentemente esposte, ed applicando il pricipio del terzo escluso dire che un sistema S è contradditorio, o non non-contradditorio, che un numero ben definito è razionale o irrazionale, e così via anche se non possiamo stabilire quale eventualità si verifica?

Si potrebbe ritornare così con una consapevolezza nuova alla concezione antica dell'obiettività della matematica, la quale risulterebbe costituita da tutti gl'infiniti sistemi ipotetico-deduttivi compatibili.

Una seconda questione è la seguente: le formule $R(n)$ formano un sistema della potenza del numerabile? Sembra che la risposta debba essere affermativa, dato che ognuna di dette formule è costituita da un numero finito di simboli; e se si può superare la difficoltà di riconoscere quali formule hanno senso e quali non l'hanno, è facile poi ordinarle.

In terzo luogo ci si può domandare: esistono fondati motivi per dubitare che la formula $n \varepsilon K$ s'identifica con una delle formule $R(q)$? Tali dubbi sarebbero fondati, sembra, soltanto nel caso in cui non si fosse certi che la classe K è dotata di senso. Ora il modo con il quale detta classe è stata definita non è tale da rendere perfettamente tranquilli in proposito, anzi sembra addirittura che si giunga ad un'antimonia.

Abbiamo già visto che l'ipotesi di $\mathrm{Dim}(q \varepsilon K)$ conduce all'assurdo. D'altra parte sembra invece che si possa dimostrare che $q \varepsilon K$. Infatti: supponiamo che q non appartenga a K, allora per la [1] e la [2]

$$\overline{q \varepsilon K} \equiv \overline{\overline{\mathrm{Dim}}}(q \varepsilon K) \equiv \mathrm{Dim}(q \varepsilon K)$$

quindi $q \varepsilon K$ contro l'ipotesi.

Si può però rispondere che questa dimostrazion sarebbe valida soltanto se si fosse dimostrato che il sistema S è non contraddittorio.

Questo ragionamento non sarebbe un'antinomia ma viceversa proverebbe che è impossibile dimostrare la non-contraddittorietà di S, perchè qualora questa fosse dimostrata se ne ricaverebbe l'assurdo ora considerato.

Ma l'obbiezione forse più grave riguarda il modo con il quale è stata definita la classe K. Si nota che in genere una classe viene considerata ben definita in un certo sistema S quando è dato un criterio in virtù del quale si può stabilire in S, con numero finito di passaggi logici, se un elemento appartiene o meno alla classe stessa. Ora, proprio secondo il ragionamento esposto nella dimostrazione del teorema I del precedente §, non si può stabilire in S se q appartiene o meno a K.

Non ostante le riserve di carattere critico cui danno luogo le dimostrazioni del Gödel dell'esistenza di affermazioni indecise o dell'impossibilità di dimostrare la non-contraddittorietà di un sistema S tuttavia si è indotti a ritenere sostanzialmente giusto il risultato del teorema II in base alle seguenti considerazioni.

Ammesso, come nota l'Enriques, che abbia un senso parlare di conseguenze immediate c_1, di un certo sistema p di proposizioni, sviluppiamo il sistema ipotetico-deduttivo basato sulle proposizioni p prese come postulati, facendo seguire alle p le c_1, alle c_1 le conseguenze immediate c_2 di p e c_1, a c_2 le conseguenze immediate di p, c_1 e c_2, e così di seguito. Si osservi innanzi tutto che per quanto si proceda in queste deduzioni senza incontrare contaddizioni, non si può per tal via acquistare la certezza di non incontrarne in seguito.

L'Enriques osserva inoltre, che se si pronunciasse in seno ad un sistema S un giudizio relativo alla non-contraddittorietà del sistema S (giudizio che si riferisce anche al giudizio stesso) si trascurerebbero le cautele proposte dalla teoria dei tipi di B. Russel, costruita per evitare antinomie logiche.

Infine sempre allo stesso proposito si può considerare a mio parere la seguente argomentazione: supponiamo di essere riusciti a dimostrare con mezzi forniti esclusivamente dal sistema S che S stesso non è contraddittorio. Tale dimostrazione anche se formalmente perfetta, non può renderci certi della non-contraddittorietà di S, perchè se S fosse contraddittorio, sarebbe dimostrabile in S qualunque pro-

posizione [1], in particolare che S non è contraddittorio. Perchè una dimostrazione in S sia valida, occorre già sapere che S è non-contraddittorio, ma se ciò è proprio quello che si vuol dimostrare risulta che una dimostrazione di non contraddittorietà di S con mezzi offerti dal sistema S è sempre viziata di circolo e quindi impossibile.

§ 4. – Alcune conseguenze del risultato del Gödel relativo all'impossibilità di dimostrare la non contraddittorietà di un sistema ipotetico deduttivo. – Se si ammette la validità del risultato del Gödel esposto nel teorema II del § 2, ritengo di poterne dedurre alcune singolari conseguenze. Ricordando le considerazioni svolte a proposito delle affermazioni aventi senso, introduciamo due definizioni ed un postulato al fine di esporre nel modo più semplice e chiaro le deduzioni alle quali si è accennato (teoremi IV, V, VI).

Definizione I. – Chiameremo ben definito un numero del quale è possibile calcolare valori con un approssimazione prefissata.

Sono quindi ben definiti i numeri per i quali è possibile calcolare le successive ridotte del loro sviluppo in frazione continua, i numeri

---

(1) Dimostriamo questo risultato seguendo in sostanza D. Hilbert e W. Ackermann (cfr. *op. cit.*, cap. I, § 9, pag. 21). Si dice somma logica di due proposizioni A e B, che s'indica con $A \,\&\, B$ e si legge A e B, la proposizione che è vera quando e soltanto quando A e B sono entrambe vere. Si dice prodotto logico di due proposizioni A e B che s'indica con AB e si legge A o B, la proposizione che è vera quando e soltanto quando almeno una delle proposizioni A e B è vera. Quindi se è vera la proposizione A, sarà vera la AB, (anche se per caso la B fosse falsa). Se si accettano come valide le proposizioni A e C sarà quindi valida anche la proposizione

$$AB \,\&\, CB$$

e sempre nelle stesse ipotesi si otterrà la proposizione equivalente:

$$B(A \,\&\, C);$$

(vale la proprietà distributiva del prodotto logico rispetto alla somma logica). In un sistema ipotetico-deduttivo in cui si trovassero due proposizioni A e $\bar{A}$ (negazione di A), e B fosse una proposizione qualsiasi, si ricaverebbe, ponendo $\bar{A}$ in luogo di C:

$$AB \,\&\, \bar{A}B$$

$$B(A \,\&\, \bar{A})$$

Ma $A \,\&\, \bar{A}$ è certo falsa; risulta dunque dimostrata la B.

espressi medianle sviluppo in serie convergente, oppure mediante numero decimale illimitato, di cui si sanno calcolare le successie cifre etc.

Postulato: Ogni numero ben definito è un oggetto del pensiero logico; hanno quindi un senso le affermazioni riguardanti tali numeri.

Definizione II. – Chiamiamo ultrarazionale un numero intero del quale non si può dimostrare che è razionale nè che è irrazionale. – Dimostreremo nel teorema IV che tali numeri esistono. Alla dimostrazione dell'esistenza di numeri ultrarazionali premettiamo il seguente:

Teorema III: Un sistema ipotetico-deduttivo S può essere sviluppato in modo che l'insieme delle proposizioni che ad esso appartengono come postulati o come teoremi dedotti dai postulati di S venga posto in corrispondenza biunivoca con la serie naturale dei numeri.

Infatti: ai simboli fondamentali del sistema S presi in un certo ordine

$$s_0 s_1 \dots s_{x-1}$$

facciamo corrispondere i numeri

$$0, 1 \dots x-1\,;$$

e ad ogni formula il numero espresso nel sistema di numerazione in base x, secondo il noto principio di posizione applicato nella consueta numerazione decimale; cioè se ad una formula corrisponde la successione di numeri (tutti minori di x)

$$a_0 a_1 \dots a_n$$

a questa successione e quindi alla formula data corrisponde il numero

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Consideriamo il sistema dei postulati p alla base di S, i quali verranno ordinati secondo l'ordine di grandezza, dei numeri che rappresentano le formule esprimenti detti postulati. Dai postulati p che sono in numero finito, ricaviamo tutte le conseguenze immediate c_1

che saranno anch'esse in numero finito [1]; tra le conseguenze immediate di date proposizioni, annoveriamo anche le proposizioni stesse, e ciò per essere sicuri di poter precedere indefinitamente nella deduzione. Le formule c_1 verranno ordinate con lo stesso criterio adottato per le formule p e dopo queste; dalle proposizioni p e c_1 ricaviamo tutte le conseguenze immediate c_2 e le ordiniamo nella solita maniera

---

[1] Per brevità rinunciamo nel presente lavoro ad un esame approfondito di quest'ultima affermazione, la quale risulta evidente, quando si pensi che nei nostri sistemi ipotetico-deduttivi le conseguenze immediate di premesse in numero finito vengono ricavate applicando leggi logiche in numero finito.

Per esempio nella logica tradizionale dalla proposizione «tutti gli A sono B» si ricava «qualche A è B»; dalla maggiore e dalla minore di un sillogismo si ricava una sola conclusione ecc.

Un'analisi del ragionamento matematico, la quale ci conduce a ritenere in numero finito le conseguenze immediate di un numero finito di premesse, trovasi in S. ZAREMBA, *La logique des mathématiques*, (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. XV, Paris, 1926); da detto lavoro riassumiamo le considerazioni seguenti:

Si dice funzione logica ogni espressione $F(x, y, z, \ldots)$ che acquista un significato determinato almeno per alcuni sistemi di significati delle $x, y, z, \ldots$ detti punti logici, per cui è definita. Una dimostrazione si dice completa quando ogni passaggio da una proposizione all'altra viene eseguito mediante l'applicazione di uno di questi due principi: principio di sostituzione e «modus ponens».

Principio di sostituzione. – Sapendo che una funzione logica $F(x, y, z, \ldots)$ fa corrispondere una proposizione vera ad ogni punto logico per cui è definita, si ha il diritto di portare sulla lista delle proposizioni vere, ogni proposizione ottenuta mediante la sostituzione ad $x, y, z, \ldots$ dei simboli $a, b, c, \ldots$ relativi ad un qualsiasi significato particolare di $x, y, z, \ldots$; per cui $F(x, y, z, \ldots)$ è definita.

Principio «modus ponens». – Date due proposizioni p e q, sapendo che

$$p \supset q$$

(cioè da p si deduce q) e che p è una proposizione vera, si ha il diritto di mettere anche q nella lista delle proposizioni vere.

Postulato. – Si ammette che ogni dimostrazione logica corretta sia sostituibile mediante una dimostrazione completa, in cui cioè si applicano soltanto i principi sopra enunciati.

Osserviamo che nell'applicazione di questi due principi (che si possono ricondurre alla teoria del sillogismo) da due premesse si ricava una determinata conseguenza: per il principio di sostituzione da «$F(x, y, z, \ldots)$ è una funzione logica» e da «$a, b, c, \ldots$ è un punto logico per cui è definita $F(x, y, z, \ldots)$» si si deduce $F(a, b, c, \ldots)$; e per il «modus ponens» da «ogni conseguenza di una proposizione vera è vera» e da «q è una proposizione conseguenza della proposizione vera p» si ricava «q è una proposizione vera». V. anche D. HILBERT e W. ACKERMANN, *op. cit.*, cap. I, § 10, pagg. 22 a 23.

dopo le c_1; ricaviamo quindi tutte le conseguenze di p c_1 e c_2, le ordiniamo, e così di seguito all'infinito.

Teorema IV. Esistono numeri ben definiti ultrarazionali.

Infatti: consideriamo l'insieme delle formule che esprimono i postulati ed i teoremi dimostrabili di un sistema ipotetico-deduttivo S, formule poste in corrispondenza biunivoca con la serie naturale dei numeri, come è stato indicato nel teorema precedente. Ad ogni preposizione

$$f, f_1 \dots f_n \dots\dots$$

che non sia in contraddizione con una delle precedenti, facciamo corrispondere con una determinata legge i numeri naturali diversi da zero

$$a, a_1 \dots a_n \dots\dots \tag{7}$$

(i quali possono anche essere presi per semplicità eguali fra loro).

Formiamo ora la frazione continua

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \, a_n + \ddots}} \tag{8}$$

Se s'incontra nella successione delle formule di S una formula in contraddizione con una delle precedenti, s'interrompe la successione [7] arrestandoci al termine a_n corrispondente all'ultima formula del sistema S che non dà luogo ad esplicita contraddizione. La frazione continua [8] sarà uguale in ogni caso ad un numero reale ben definito, razionale se la successione [7] è limitata, irrazionale nel caso contrario.

Ora se il sistema S non è contraddittorio non si potrà dimostrare la sua non contraddittorietà (v. teorema II del § 3), nè prevedere quindi che la successione [7] sarà illimitata e che il numero espresso dalla frazione continua [8] risulterà irrazionale. Neppure si potrà dimostrare

che il numero in questione è razionale, perchè ciò equivarrebbe a dire che S è contraddittorio, contro quanto abbiamo supposto.

Esistono dunque numeri ben definiti ultrarazionali.

Osservazione. Per alcuni numeri reali ben definiti, nonostante le ricerche effettuate in proposito dai matematici, non si è finora dimostrato che sono razionali e neppure che sono irrazionali. Questo caso si presenta ad esempio per la costante di Eulero

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}577215 \ldots\ldots$$

Potrebbe darsi che C ed altri numeri per cui si verifica circostanza analoga fossero ultrarazionali.

Teorema V. Esistono coppie di numeri ben definiti a e b tali che non si può dimostrare che

$$a = b$$

e neppure che

$$a \neq b \ .$$

Sia per fissare le idee

$$a = 0{,}777 \ldots\ldots$$

(numero decimale periodico semplice di cui la parte intera è 0 e il periodo è 7).

b sia uguale ad un numero del quale la parte intera è zero e le successive cifre sono uguali a 7, se le formule di un sistema ipotetico deduttivo S, con cui dette cifre vengono poste in corrispondenza biunivoca, non sono in contraddizione con qualcuna delle formule precedenti; ma se s'incontra una contraddizione la successione dei 7 s'interrompe in corrispondenza della formula precedente a quella che dà luogo ad esplicita contraddizione. Dunque se il sistema S è contraddittorio $a \neq b$ e lo si può dimostrare, ma se S non è contraddittorio, pur essendo $a = b$, non sarà possibile dimostrare detta uguaglianza,

perchè se la si dimostrasse si dimostrerebbe anche la non-contraddittorietà di S ciò che è impossibile.

Teorema VI. – Esistono serie certamente convergenti o divergenti, per le quali tuttavia non è possibile dimostrare quale dei due casi effettivamente si verifica. – Facciamo corrispondere alle formule del sistema ipotetico-deduttivo S ordinate nella maniera già spiegata, i termini di una serie armonica finchè in S non s'incontrano contraddizioni:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots$$

Sarà divergente se S non è contraddittorio.

Se invece S è contraddittorio, se all'ultima formula prima d'incontrare una contraddizione, corrisponde il termine $\frac{1}{n}$, alla prima formula che dà luogo ad una contraddizione facciamo corrispondere $\frac{1}{n^2}$ alla successiva $\frac{1}{n^3}$ e così via; la serie da un certo punto in poi si trasformerà in serie geometrica di ragione minore di 1; quindi la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots\ldots$$

sarà convergente.

Se la serie è convergente si potrà dimostrare che è convergente, perchè in tal caso la contraddizione S si dovrà incontrare dopo un numero finito di passaggi, ma se è divergente non si potrà dimostrare che è divergente (e naturalmente nemmeno che è convergente).

Esempi analoghi a quelli considerati nei teoremi IV, V, VI si possono moltiplicare.

I delicati problemi piuttosto proposti che risolti nel presente lavoro, potranno fornire argomento di nuove ricerche e suggestive meditazioni a chi desidera esplorare le ragioni di confine tra matematica e filosofia.