PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 22
pag. 245-266

IL CALCOLO DELLA PIASTRA ANULARE SPESSA (*)

RENATO GIOVANNOZZI

SVMMARIVM. — Solutiones adhibens, quae iam notae sunt quod attinet ad functiones cylindricas et ad functiones rationales et trascendentes, Auctor perpendit laminam anularem spissam, quae inaequali oneri et vinculo sit subiecta.
Functionum cylindricarum, quae crebrius in calculis adhibentur, evolutiones in seriem persequens, concludit Auctor eas tarde convergere, ideoque formulas obtineri quae commodius in doctrinae elucubrationibus, quam in artium usu, adhiberi possint.

1. Premesse generali. Argomento del presente lavoro. – Il problema della piastra di spessore costante ma non trascurabile rispetto alle altre dimensioni, cioè, come suol dirsi, il problema della piastra spessa, è stato finora fatto oggetto di numerose ricerche che hanno condotto a un certo numero di soluzioni esatte o approssimate del problema stesso. Una completa trattazione del problema generale dal punto di vista matematico si trova in un ampio lavoro di Woinowsky-Krieger (1).

Per il caso, particolarmente importante nelle applicazioni, di piastra circolare caricata con simmetria assiale, le equazioni generali si semplificano notevolmente e se ne conoscono finora due tipi di soluzioni.

(*) Nota presentata da S. E. l'Accademico Pontificio Enrico Pistolesi il 27 giugno 1946.

(1) S. Woinowsky-Krieger, *Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten*, «Ingenieur Archiv», IV Band, 1933, pagg. 203-226 e 305-331.

La prima soluzione, indicata da A. E. Love (1) e successivamente sviluppata da A. Timpe (2) per un buon numero di casi importanti, è una soluzione in termini finiti, basata sull'uso dei polinomi di Legendre; e si presta a risolvere il problema di un cilindro circolare pieno o cavo sulle cui facce cilindriche siano assegnate le tensioni normali e tangenziali in serie di potenze della coordinata assiale z.

La seconda soluzione, applicata da N. Filon (3), A. Nadai (4), e recentemente, da R. Ohlig (5), si basa sull'uso delle funzioni di Bessel e si presta a risolvere il problema quando siano assegnate le distribuzioni del carico normale e tangenziale sulle facce piane di un cilindro circolare pieno o cavo.

Ambedue le soluzioni si basano sull'ipotesi che il carico assiale complessivo sia equilibrato da tensioni tangenziali agenti sulle facce cilindriche, ma con leggi di distribuzione diverse in ciascuna soluzione; e ambedue le soluzioni sono in un certo senso incomplete, perchè permettono che siano soddisfatte certe condizioni arbitrarie solo sulle facce cilindriche (1ª soluzione) o sulle facce piane (2ª soluzione). Occorre perciò in generale combinare le due soluzioni, benchè ciò a rigore non sia esatto, essendo, come si è detto, diverse nei due casi le distribuzioni di tensioni tangenziali sulle facce cilindriche.

Gli studi finora compiuti con le soluzioni del secondo tipo si sono limitati al caso della piastra senza foro centrale, vincolata sulla faccia cilindrica; nel presente lavoro estenderemo la ricerca al caso praticamente più importante della piastra spessa con foro centrale, tenendo conto sia di condizioni di vincolo già considerate in altri studi, sia di altre che riteniamo di maggior interesse pratico. Esamineremo infine le possibilità di applicazione pratica dei calcoli svolti.

---

(1) A. E. H. Lowe, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge 1927, pag. 276.

(2) A. Timpe, *Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, IV Vol., 1924, pagg. 361-376.

(3) L. N. G. Filon, *On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under Certain Practical Systems of Load*, « Philosophical Transactions of the Royal Society of London », Serie A, Vol. 198, pagg. 148-233.

(4) A. Nadai, *Die Elastische Platten*, pagg. 308 e segg., Editore Springer, Berlino, 1925.

(5) R. Ohlig, *Die achsensymmetrische belastete dicke Kreisplatte*, « Ingenieur Archiv », XIII Band, 1942, pagg. 155-162.

2. Le equazioni fondamentali del problema. – Le equazioni fondamentali del problema sono note. Detti ξ, ρ, gli spostamenti di un punto generico della piastra rispettivamente in senso assiale e radiale, r il raggio generico, z la coordinata secondo l'asse della piastra, misurata a partire dal piano medio della piastra, ν il reciproco del modulo di Poisson, valgono le equazioni indefinite di equilibrio seguenti:

$$
[1] \qquad \begin{aligned} &(1-2\nu)\Delta\xi + \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \\ &(1-2\nu)\left(\Delta\rho - \frac{\rho}{r^2}\right) + \frac{\partial e}{\partial r} = 0 \ , \end{aligned}
$$

in cui Δ è l'operatore:

$$
[2] \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \ ,
$$

mentre e è la dilatazione cubica:

$$
[3] \qquad e = \frac{\rho}{r} + \frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{\partial\xi}{\partial z} \ ,
$$

che soddisfa alla:

$$
[4] \qquad \Delta e = \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial e}{\partial r} = 0 \ .
$$

Da queste equazioni, con opportuna separazione delle variabili, si deducono per ξ, e ρ le due equazioni separate del quarto ordine;

$$
[6] \qquad \begin{aligned} &\Delta\Delta\xi = 0 \\ &\left(\Delta - \frac{1}{\rho^2}\right)\left(\Delta\rho - \frac{\rho}{r^2}\right) = 0 \ , \end{aligned}
$$

di cui sono soluzioni particolari le seguenti, prodotti di una funzione della sola r per una funzione della sola z:

$$
[7] \quad \rho = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{A}\,\mathrm{Cos}\,\lambda z + \mathrm{B}\,\lambda z\,\mathrm{Cos}\,\lambda z + \mathrm{C}\,\mathrm{Sen}\,\lambda z + \mathrm{D}\,\lambda z\,\mathrm{Sen}\,\lambda z)\,Z_1(\lambda r)
$$

$$
[8] \quad \xi = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{A}'\,\mathrm{Cos}\,\lambda z + \mathrm{B}'\lambda z\,\mathrm{Cos}\,\lambda z + \mathrm{C}'\,\mathrm{Sen}\,\lambda z + \mathrm{D}'\lambda z\,\mathrm{Sen}\,\lambda z)\,Z_0(\lambda r) \ .
$$

In esse λ; A, B, ..., A′, B′, ... sono costanti di determinare con le condizioni ai limiti, mentre Z_1, Z_0 sono funzioni cilindriche di ordine rispettivamente uno e zero:

$$Z_1(\lambda r) = J_1(\lambda r) + kN_1(\lambda r) \tag{9}$$

$$Z_0(\lambda r) = J_0(\lambda r) + kN_0(\lambda r)\ , \tag{10}$$

cioè combinazioni lineari secondo uno stesso coefficiente k (anch'esso da determinare con le condizioni ai limiti) delle funzioni di Bessel e di Neumann dello stesso ordine.

Sostituendo nella [4] e nella prima delle [1], si trovano quattro relazioni fra le costanti A, B, ..., A′, B′, ..., di cui pertanto solo 4 risultano in definitiva indipendenti. Tenendo conto di tali relazioni e posto per semplicità:

$$\lambda z = \zeta \tag{11}$$

le espressioni di ρ e di ξ assumono l'aspetto seguente:

$$\rho = \sum \frac{1}{\lambda}(A \operatorname{Cos}\zeta + B\zeta \operatorname{Cos}\zeta + C \operatorname{Sen}\zeta + D\zeta \operatorname{Sen}\zeta)\, Z_1(\lambda r) \tag{12}$$

$$\xi = \sum \frac{1}{\lambda}\{(-A \operatorname{Sen}\zeta + B[(3-4\nu)\operatorname{Cos}\zeta - \zeta \operatorname{Sen}\zeta] - C \operatorname{Cos}\zeta + \\ + D[(3-4\nu)\operatorname{Sen}\zeta - \zeta\operatorname{Cos}\zeta]\}\, Z_0(\lambda r)\ . \tag{13}$$

Per ogni valore di λ si trovano corrispondentemente certi valori delle costanti A, B, C, D, k. Perchè le soluzioni del tipo [7], [8] possano soddisfare alle condizioni ai limiti del problema, λ deve essere in generale radice di una certa equazione trascendente. La sommatoria si intende, ora e in seguito, estesa a tutte le infinite soluzioni del tipo [7], [8], che chiameremo per brevità « soluzioni elementari », corrispondenti alle radici λ dell'equazione relativa al problema particolare che si considera, poste in ordine di grandezza crescente. Le costanti A, B, C, D, sono adimensionali.

Nel caso della piastra piena le funzioni di Neumann, infinite nell'origine, sono evidentemente da escludere e le funzioni Z_0, Z_1 si riducono alle sole funzioni di Bessel.

Le [12], [13] possono scriversi più concisamente nella forma:

$$\rho = \sum \frac{1}{\lambda} R(\lambda z)\, Z_1(\lambda r) \tag{14}$$

$$\xi = \sum \frac{1}{\lambda} Z(\lambda z)\, Z_0(\lambda r)\,. \tag{15}$$

Indicando con apici le derivate delle funzioni $R(\lambda z)$, $Z(\lambda z)$ rispetto all'argomento λz, le espressioni delle tensioni normali σ_r, σ_t, e σ_z (rispettivamente tensione radiale, tensione in senso tangenziale e tensione assiale) e della tensione tangenziale τ si scrivono come segue:

$$\sigma_r = 2\,G\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\nu e}{1-2\nu}\right) = \frac{2\,G}{1-2\nu} \sum [(1-\nu) R + \nu Z']\, Z_0 - 2\,G \sum \frac{1}{\lambda r} R Z_1 \tag{16}$$

$$\sigma_t = 2\,G\left(\frac{\rho}{r} + \frac{\nu e}{1-2\nu}\right) = \frac{2\,G}{1-2\nu} \sum (R + Z')\, Z_0 + 2\,G \sum \frac{1}{\lambda r} R Z_1 \tag{17}$$

$$\sigma_z = 2\,G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\nu e}{1-2\nu}\right) = \frac{2\,G}{1-2\nu} \sum [\nu R + (1-\nu) Z']\, Z_0 \tag{18}$$

$$\tau = G\left(\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) = G \sum (R' - Z)\, Z_1\,. \tag{19}$$

3. Le condizioni ai limiti. – Per risolvere i vari problemi possibili relativi alla piastra anulare spessa occorre disporre delle sei costanti λ, k, A, B, C, D, che si hanno a disposizione per ogni soluzione elementare in modo da soddisfare alle condizioni ai limiti.

In generale, nei casi più comuni di sollecitazione e di vincolo, dovranno su ognuna delle quattro facce della piastra anulare essere soddisfatte due condizioni riguardanti: sulle facce piane, i valori delle tensioni normali e tangenziali; sulle facce cilindriche, i valori di tali tensioni, oppure i valori degli spostamenti assiali e radiali.

Mentre le quattro costanti A, B, C, D, permettono di soddisfare a tutte le quattro condizioni dette sulle facce piane, manca invece la possibilità di fare altrettanto sulle facce cilindriche, nelle quali rimangono disponibili due sole costanti, λ e k, per soddisfare a queste condizioni.

Per la risoluzione completa dei vari problemi occorre perciò in generale combinare le soluzioni così ottenute con le soluzioni di TIMPE, relative appunto, come si è detto, a varie condizioni di carico sulle facce cilindriche.

Negli studi precedenti prima citati eseguiti mediante soluzioni del secondo tipo è stata assunta come condizione ai limiti per la piastra spessa senza foro «appoggiata liberamente al contorno» l'annullarsi dello spostamento assiale in tutti i punti della faccia cilindrica, condizione questa che corrisponde poco all'idea di un appoggio, dato che dà luogo a tensioni tangenziali sulla faccia cilindrica, e non si vede nemmeno bene come potrebbe essere realizzata in pratica.

Anche la soluzione di TIMPE per il caso della piastra appoggiata al contorno e caricata da un carico ripartito uniforme, oppure da un carico ripartito sopra una circonferenza, pur non coincidendo esattamente, per le ragioni prima dette, con la soluzione analoga del secondo tipo, dà sempre luogo a tensioni tangenziali sulle facce cilindriche.

Il caso che si presenta in pratica e che pertanto abbiamo ritenuto opportuno di prendere in esame nel presente lavoro, oltre ai casi, già considerati da altri, prima detti, è invece quello in cui il carico agente su di una faccia piana è equilibrato da un carico con risultante uguale ed opposta agente sull'altra faccia, non essendo le facce cilindriche sottoposte ad alcuna tensione tangenziale.

4. STUDIO DI VARI CASI POSSIBILI DI VINCOLO E DI SOLLECITAZIONE. — Con queste premesse, passiamo allo studio del nostro problema. Siano $2h$ lo spessore della piastra; a; b, i raggi esterno ed interno. L'asse z abbia, come si è detto, l'origine a metà spessore della piastra stessa.

Consideriamo in quanto segue un certo numero di casi possibili di vincolo e di sollecitazione.

A) *Piastra anulare, vincolata sulle facce cilindriche secondo la condizione:*

$$\xi = 0 \quad \text{per} \quad r = a\,; \quad \xi = 0 \quad \text{per} \quad r = b\,, \tag{20}$$

caricata sulla base $z = h$ *da una pressione* $p = p(r)$ *e sulla base* $z = -h$ *da una pressione* $p' = p'(r)$.

Dalla [20], tenendo presente l'espressione [15] di ξ e la [10], segue per λ l'equazione trascendente:

$$J_0(\lambda a)\,N_0(\lambda b) - J_0(\lambda b)\,N_0(\lambda a) = 0 \quad , \tag{21}$$

e per k il valore:

$$k = -\frac{J_0(\lambda a)}{N_0(\lambda a)} = -\frac{J_0(\lambda b)}{N_0(\lambda b)} \ . \tag{22}$$

La determinazione delle costanti A, B, C, D, corrispondenti a una data soluzione elementare si effettua dopo avere sviluppato le funzioni $p(r)$, $p'(r)$ in serie di funzioni cilindriche di ordine zero:

$$Z_0(\lambda r) = J_0(\lambda r) + k N_0(\lambda r) \quad , \tag{10 rip.}$$

essendo λ e k definiti dalle [21] e [22], mediante gli sviluppi:

$$p(r) = -4\,G \sum S\,Z_0(\lambda r) \tag{23}$$

$$p'(r) = -4\,G \sum S'\,Z_0(\lambda r) \ . \tag{24}$$

Come già detto, le sommatorie si intendono estese a tutti i valori di λ che soddisfano alla [21] in ordine di grandezza crescente.

Per una data soluzione elementare, le condizioni determinatrici delle costanti A, B, C, D sono allora le seguenti (con $\sigma_z{}^*$ indichiamo adesso la sola parte di σ_z che corrisponde alla radice λ):

$$\text{per} \quad z = h \qquad \sigma_z{}^* = 4\,G\,S\,Z_0(\lambda r) \quad , \tag{25}$$

$$\text{per} \quad z = -h \qquad \sigma_z{}^* = 4\,G\,S'\,Z_0(\lambda r) \ . \tag{26}$$

Posto:

$$\lambda h = \omega \quad , \tag{27}$$

dalle due condizioni esprimenti l'annullarsi della τ sulle facce piane si deduce:

$$C = B\,[(1-2\nu) - \omega\,\mathrm{Tg}\,\omega] \qquad A = D\,[(1-2\nu) - \omega\,\mathrm{Cot}\,\omega] \ . \tag{28}$$

Sostituendo nelle [12], [13], [18], si trova:

$$[29] \qquad \frac{\sigma_z^*}{2\,G\,Z_0(\lambda r)} = B[(1+\omega\,Tg\,\omega)\,Sen\,\zeta - \zeta\,Cos\,\zeta] + D\,[(1+\omega\,Cot\,\omega)\,Cos\,\zeta - \zeta\,Sen\,\zeta]\,.$$

Facendo quindi uso delle due condizioni relative alla σ_z^*, si ha:

$$[30] \qquad B = \frac{S - S'}{Sen\,\omega\left(1 - \frac{2\,\omega}{Sen\,2\,\omega}\right)} \qquad D = \frac{S + S'}{Cos\,\omega\left(1 + \frac{2\,\omega}{Sen\,2\,\omega}\right)}\,.$$

Le espressioni complessive delle tensioni risultano le seguenti:

$$[31] \qquad \frac{\sigma_z}{2\,G} = \sum \big\{ B\,[(1+\omega\,Tg\,\omega)\,Sen\,\zeta - \zeta\,Cos\,\zeta] + D\,[(1+\omega\,Cot\,\omega)\,Cos\,\zeta - \zeta\,Sen\,\zeta] \big\}\,Z_0(\lambda r)$$

$$[32] \qquad \frac{\sigma_t}{2\,G} = 2\nu \sum [B\,Sen\,\zeta + D\,Cos\,\zeta]\,Z_0(\lambda r) + \sum \frac{1}{\lambda r} \Big\{ B\,\big\{\zeta\,Cos\,\zeta + [(1-2\nu) - \omega\,Tg\,\omega]\,Sen\,\zeta\big\} + D\,\big\{\zeta\,Sen\,\zeta + [(1-2\nu) - \omega\,Cot\,\omega]\,Cos\,\zeta\big\} \Big\}\,Z_1(\lambda r)$$

$$[33] \qquad \frac{\sigma_r}{2\,G} = \sum \big\{ B[\zeta\,Cos\,\zeta + (1-\omega\,Tg\,\omega)\,Sen\,\zeta] + D[\zeta\,Sen\,\zeta + (1-\omega\,Cot\,\omega)\,Cos\,\zeta] \big\}\,Z_0(\lambda r) - \sum \frac{1}{\lambda r} \Big\{ B\,\big\{\zeta\,Cos\,\zeta + [(1-2\nu) - \omega\,Tg\,\omega]\,Sen\,\zeta\big\} + D\,\big\{\zeta\,Sen\,\zeta + [(1-2\nu) - \omega\,Cot\,\omega]\,Cos\,\zeta\big\} \Big\}\,Z_1(\lambda r)$$

$$[34] \qquad \frac{\tau}{2\,G} = \sum [B\,(\zeta\,Sen\,\zeta - \omega\,Tg\,\omega \cdot Cos\,\zeta) + D\,(\zeta\,Cos\,\zeta - \omega\,Cot\,\omega \cdot Sen\,\zeta)]\,Z_1(\lambda r)\,.$$

Da osservare la perfetta simmetria dei coefficienti di B e di D, che si ottengono l'uno dall'altro scambiando ovunque il seno e la tangente iperbolici col coseno e con la cotangente rispettivamente e viceversa.

Per il caso particolare in cui una sola delle facce, ad esempio la superiore, sia caricata, basta fare ovunque $p' = 0$, $S' = 0$.

Il sistema di tensioni così ottenuto non soddisfa alla condizione di avere tensioni normali nulle sulle facce cilindriche. Per realizzare approssimativamente tale condizione, occorre sovrapporre al sistema trovato un sistema che abbia sulle facce cilindriche di raggi a, b,

forze radiali risultanti $R(a)$, $R(b)$ e momenti flettenti risultanti $M(a)$, $M(b)$ (forze e momenti si intendono naturalmente riferiti all'unità di lunghezza delle circonferenze di raggi a, b) uguali ed opposti a quelli del sistema trovato.

Si ha facilmente:

$$R(a) = -\int_{-h}^{h} (\sigma_r)_{r=a}\, dz = 8\, G\nu \sum D \frac{Z_1(\lambda a)}{\lambda^2 a} \tag{35}$$

[36]

$$M(a) = -\int_{-h}^{h} (\sigma_r)_{r=a}\, z\, dz = -4\, G \sum \frac{S-S'}{\lambda^2} \left[Z_0(\lambda a) + \frac{Z_1(\lambda a)}{\lambda a} \left(1 + 2\nu \frac{1-\omega \operatorname{Cot}\omega}{1 - \dfrac{2\omega}{\operatorname{Sen} 2\omega}} \right) \right] ,$$

e, analogamente:

$$R(b) = 8\, G\nu \sum D \frac{Z_1(\lambda b)}{\lambda^2 b} \tag{37}$$

$$M(b) = -4\, G \sum \frac{S-S'}{\lambda^2} \left[Z_0(\lambda b) + \frac{Z_1(\lambda b)}{\lambda b} \left(1 + 2\nu \frac{1-\omega \operatorname{Cot}\omega}{1 - \dfrac{2\omega}{\operatorname{Sen} 2\omega}} \right) \right] . \tag{38}$$

Dalle [35], [36], [37], [38], appare che le forze radiali dipendono dalle somme dei coefficienti degli sviluppi in serie di p, p'; i momenti flettenti dalle loro differenze. Se le due facce piane fossero caricate ugualmente, mancherebbero i momenti flettenti.

Si vede anche che nel nostro caso, in base alle ipotesi di vincolo ammesse, le [36], [38] si semplificano per essere $Z_0(\lambda a) = Z_0(\lambda b) = 0$.

Le tensioni corrispondenti alle forze $R(a)$, $R(b)$ e ai momenti $M(a)$, $M(b)$ valgono, come si deduce dal citato lavoro di A. Timpe:

Forza $R(a)$ *al bordo esterno:*

$$\sigma_r = \frac{R(a)}{2h} \frac{a^2}{a^2-b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \qquad \sigma_t = \frac{R(a)}{2h} \frac{a^2}{a^2-b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) , \tag{39}$$

Forza $R(b)$ *al bordo interno:*

$$\sigma_r = \frac{R(b)}{2h} \frac{b^2}{a^2-b^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \qquad \sigma_t = -\frac{R(b)}{2h} \frac{b^2}{a^2-b^2} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) : \tag{40}$$

Momento $M(a) = M$ *al bordo esterno:*

[41] $$\sigma_r = \frac{3}{2} M \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \frac{z}{h^3} \qquad \sigma_t = \frac{3}{2} M \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \frac{z}{h^3} \; ;$$

Momento $M(b) = M$ *al bordo interno:*

[42] $$\sigma_r = \frac{3}{2} M \left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right) \frac{z}{h^3} \qquad \sigma_t = -\frac{3}{2} M \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) \frac{z}{h^3} \; .$$

B) *Piastra anulare vincolata sulla faccia cilindrica esterna secondo la condizione:*

[43] $$\xi = 0 \quad \text{per} \quad r = a \; ,$$

caricata da una pressione $p(r)$ *sulla faccia* $z = h$ *e da una pressione* $p'(r)$ *sulla faccia* $z = -h$.

Per definire il valore di λ, alla condizione:

[44] $$J_0(\lambda a) + k\, N_0(\lambda b) = 0$$

aggiungeremo l'altra che siano nulle le tensioni tangenziali sulla faccia cilindrica $r = b$, cioè la condizione:

[44'] $$J_1(\lambda b) + k N_1(\lambda b) = 0 \; .$$

Dalle [43], [44] segue per λ l'equazione trascendente:

[45] $$J_0(\lambda a)\, N_1(\lambda b) - J_1(\lambda b)\, N_0(\lambda a) = 0 \; ,$$

e per k il valore:

[46] $$k = -\frac{J_0(\lambda a)}{N_0(\lambda a)} = -\frac{J_1(\lambda b)}{N_1(\lambda b)} \; .$$

Tutte le altre formule sono formalmente identiche a quelle del caso A). Continuano pertanto a valere le formule da [23] a [41], purchè si intenda che in esse i valori di λ e di k siano adesso definiti dalle [45], [46] anzichè dalle [21], [22]. Le [36], [38] si semplificano per essere nella [36] $Z_0(\lambda a) = 0$, nella [38] $Z_1(\lambda b) = 0$. La $R(b)$ data dalla [37] si annulla.

C) *Piastra anulare vincolata sulla faccia cilindrica interna secondo la condizione:*

$$\xi = 0 \quad \text{per} \quad r = b \,, \tag{47}$$

caricata da una pressione $p_0(r)$ *sulla faccia* $z = h$ *e da una pressione* $p'(r)$ *sulla faccia* $z = h$.

Imponendo la condizione $\tau = 0$ per $r = a$, si trova ancora che valgono tutte le formule del caso A), purchè in esse si intendano adesso λ e k definiti dalle relazioni:

$$J_0(\lambda b)\, N_1(\lambda a) - J_1(\lambda a)\, N_0(\lambda b) = 0 \tag{48}$$

$$k = -\frac{J_1(\lambda a)}{N_1(\lambda a)} = -\frac{J_0(\lambda b)}{N_0(\lambda b)} \,. \tag{49}$$

Le [36], [38] si semplificano per essere nella [38] $Z_1(\lambda a) = 0$ e nella [36] $Z_0(\lambda b) = 0$. La $R(a)$ data dalla [35] si annulla.

D) *Piastra anulare, libera sulle facce cilindriche, caricata sulle facce piane* $z = \pm h$ *rispettivamente da distribuzioni di pressione* $p(r), p'(r)$, *tali da avere risultante complessiva nulla, cioè tali da soddisfare alla relazione:*

$$\int_b^a (p - p')\, r\, dr = 0 \,. \tag{50}$$

Per definire λ e k assumiamo adesso le condizioni:

$$\tau = 0 \quad \text{per} \quad r = a \quad \text{e per} \quad r = b \,, \tag{51}$$

cioè:

$$J_1(\lambda a)\, N_1(\lambda b) - J_1(\lambda b)\, N_1(\lambda a) = 0 \tag{52}$$

$$k = -\frac{J_1(\lambda a)}{N_1(\lambda a)} = -\frac{J_1(\lambda b)}{N_1(\lambda b)} \tag{53}$$

Continuano a valere tutte le formule relative al caso A) in cui però si intenda che λ e k siano definiti dalle [52], [53] anzichè dalle [21], [22].

Le [36], [38] si semplificano per essere $Z_1(\lambda a) = Z_1(\lambda b) = 0$. Le $R(a)$, $R(b)$ date dalle [35], [37] si annullano.

Occorre tener presente che in questo caso il sistema di tensioni corrispondente a una data radice λ non è in generale equilibrato. Si ottiene l'equilibrio solo tenendo conto della sommatoria di tutti i sistemi di tensioni corrispondenti alle radici λ.

Come caso particolare, potrà essere caricata una sola faccia da una distribuzione di pressione avente risultante nulla, essendo l'altra faccia scarica. Supponendo che la faccia carica sia la faccia $z=h$, sarà cioè:

$$[50'] \qquad p'(r)=0 \qquad \int_b^a p(r)\, r\, dr = 0 \; .$$

Le formule relative a questo caso particolare si ottengono facendo ovunque $S'=0$.

E) *Piastra anulare caricata da una distribuzione di tensioni tangenziali $\tau(r)$ sulla faccia piana $z=h$ e da una distribuzione $-\tau'(r)$ sulla faccia $z=-h$.*

I valori di λ e k sono ancora definiti dalle [52], [53]. Le condizioni per la determinazione delle costanti A, B, C, D sono le seguenti:

$$[54] \qquad \text{per} \quad z=h \qquad \sigma_z=0 \qquad \tau=\tau(r)$$

$$[55] \qquad \text{per} \quad z=-h \qquad \sigma_z=0 \qquad \tau=\tau'(r) \; .$$

Dalle condizioni relative alle σ_z si deduce, per una data radice λ:

$$[56] \qquad A=D[2(1-\nu)-\omega \operatorname{Tg}\omega] \qquad C=B[2(1-\nu)-\omega \operatorname{Cot}\omega] \; .$$

Sostituendo nelle [12], [13], [19] si trova, indicando con τ^* la parte della τ totale che corrisponde alla radice λ:

$$[57] \quad \frac{\tau^*}{2\,G\,Z_1(\lambda r)}=B[\zeta \operatorname{Sen}\zeta+(1-\omega \operatorname{Cot}\omega)\operatorname{Cos}\zeta]+D[\zeta \operatorname{Cos}\zeta+(1-\omega \operatorname{Tg}\omega)\operatorname{Sen}\zeta],$$

nella quale espressione è da osservare che si passa dal coefficiente di B a quello di D sostituendo ovunque coseno e cotangente a seno e tangente e viceversa.

Sviluppate in serie di funzioni cilindriche di primo ordine le distribuzioni $\tau(r)$, $\tau'(r)$ mediante gli sviluppi:

$$[58] \qquad \tau(r)=4\,G \sum T\, Z_1(\lambda r)$$

$$[59] \qquad \tau'(r)=4\,G \sum T'\, Z_1(\lambda r) \; ,$$

per una data soluzione elementare si hanno quindi le condizioni seguenti determinatrici delle costanti A, B, C, D:

[60] per $z = h$ $\tau^* = 4 G T Z_1(\lambda r)$

[61] per $z = -h$ $\tau^* = 4 G T' Z_1(\lambda r)$.

Con semplici calcoli si trova:

[62] $$B = \frac{T + T'}{\text{Cos}\,\omega\left(1 - \dfrac{2\omega}{\text{Sen}\,2\omega}\right)} \qquad D = \frac{T - T'}{\text{Sen}\,\omega\left(1 + \dfrac{2\omega}{\text{Sen}\,2\omega}\right)} .$$

Le espressioni complessive delle tensioni risultano le seguenti:

[63] $$\frac{\sigma_z}{2G} = \sum[B(\omega\,\text{Cot}\,\omega\cdot\text{Sen}\,\zeta - \zeta\,\text{Cos}\,\zeta) + D(\omega\,\text{Tg}\,\omega\cdot\text{Cos}\,\zeta - \zeta\,\text{Sen}\,\zeta)]\,Z_0(\lambda r)$$

[64] $$\frac{\sigma_t}{2G} = 2\nu\sum(B\,\text{Sen}\,\zeta + D\,\text{Cos}\,\zeta)\,Z_0(\lambda r) + \sum\frac{Z_1(\lambda r)}{\lambda r}\Big\{B\big\}\zeta\,\text{Cos}\,\zeta + [2(1-\nu) - \omega\,\text{Cot}\,\omega]\,\text{Sen}\,\zeta\big\{ + D\big\}\zeta\,\text{Sen}\,\zeta + [2(1-\nu) - \omega\,\text{Tg}\,\omega]\,\text{Cos}\,\zeta\big\{\Big\}$$

[65] $$\frac{\sigma_r}{2G} = \sum\Big\{B[\zeta\,\text{Cos}\,\zeta + (2-\omega\,\text{Cot}\,\omega)\,\text{Sen}\,\zeta] + D[\zeta\,\text{Sen}\,\zeta + (2-\omega\,\text{Tg}\,\omega)\,\text{Cos}\,\zeta]\Big\}Z_0(\lambda r) + \sum\frac{Z_1(\lambda r)}{\lambda r}\Big\{B\big\}\zeta\,\text{Cos}\,\zeta + [2(1-\nu) - \omega\,\text{Cot}\,\omega]\,\text{Sen}\,\zeta\big\{ + D\big\}\zeta\,\text{Sen}\,\zeta + [2(1-\nu) - \omega\cdot\text{Tg}\,\omega]\,\text{Cos}\,\zeta\big\{\Big\}$$

[66] $$\frac{\tau}{2G} = \sum\big\}B[\zeta\,\text{Sen}\,\zeta + (1-\omega\,\text{Cot}\,\omega)\,\text{Cos}\,\zeta] + D[\zeta\,\text{Cos}\,\zeta + (1-\omega\,\text{Tg}\,\omega)\,\text{Sen}\,\zeta]\big\{\,Z_1(\lambda r).$$

Le forze radiali risultanti che occorre applicare al sistema trovato per avere risultante radiale nulla, sono, tenuto conto che, per le [51], $Z_1(\lambda a) = Z_1(\lambda b) = 0$:

[67] $$R(a) = 4G\sum\frac{T - T'}{\lambda} Z_0(\lambda a) \qquad R(b) = 4G\sum\frac{T - T'}{\lambda} Z_0(\lambda b)\ ;$$

mentre i momenti da applicare per avere momento risultante nullo valgono:

[68] $$M(a) = 4Gh\sum\frac{T + T'}{\lambda} Z_0(\lambda a) \qquad M(b) = 4Gh\sum\frac{T + T'}{\lambda} Z_0(\lambda b) .$$

Si vede dunque che le forze radiali dipendono dalla differenza delle distribuzioni di tensioni tangenziali sulle facce superiore e inferiore; i momenti dalla loro somma.

Nel caso particolare in cui la sola faccia superiore sia carica e la inferiore scarica basta fare ovunque $T'=0$. Dal confronto delle [67], [68] appare anche che le distribuzioni di tensioni tangenziali applicate sulle facce $z=\pm h$ dànno luogo a forze radiali risultanti per unità di lunghezza del contorno agenti nei piani di tali facce.

5. Gli sviluppi in serie di funzioni cilindriche. – La soluzione del problema nei vari casi considerati importa sempre, come si è visto, uno o più sviluppi di determinate funzioni $f(r)$ in serie di funzioni cilindriche di ordine zero ed uno nell'intervallo $b \leqslant r \leqslant a$:

[69] $$f(r)=\sum c_i Z_0(\lambda_i r)$$ [70] $$f(r)=\sum c_i Z_1(\lambda_i r)$$

essendo gli « autovalori » λ_i del problema definiti da determinate equazioni trascendenti (le [21], [45], [48], [52]).

Le formule di tali sviluppi sono note, ma raramente riportate nei trattati; riteniamo perciò opportuno riportarle qui nella forma che esse assumono per i casi che a noi interessano.

Per lo sviluppo [69] valgono le relazioni seguenti:

[71] $$c_i=\frac{1}{C_i}\int_b^a f(r)\, Z_0(\lambda_i r)\, r\, dr$$

[72] $$C_i=\frac{1}{2}\Big\{a^2[Z_0^2(\lambda_i a)+Z_1^2(\lambda_i a)]- \\ - b^2[Z_0^2(\lambda_i b)+Z_1^2(\lambda_i b)]\Big\},$$

mentre per lo sviluppo [70] valgono le relazioni:

[73] $$c_i=\frac{1}{C_i}\int_b^a f(r)\, Z_1(\lambda_i r)\, r\, dr$$

[74] $$C_i=\frac{1}{2}\Big\{a^2\Big[Z_0^2(\lambda_i a)+Z_1^2(\lambda_i a)-\frac{2}{\lambda_i a}Z_0(\lambda_i a)\,Z_1(\lambda_i a)\Big]- \\ - b^2\Big[Z_0^2(\lambda_i b)+Z_1^2(\lambda_i b)-\frac{2}{\lambda_i b}Z_0(\lambda_i b)\,Z_1(\lambda_i b)\Big]\Big\}.$$

Le espressioni [72], [74] di C_i si possono naturalmente semplificare quando, per le condizioni ai limiti, si annullano per $r=a$ o $r=b$ le funzioni $Z_0(\lambda_i r)$ o $Z_1(\lambda_i r)$.

La possibilità di calcolare la funzione primitiva degli integrali che compaiono nella [71], [73] dipende naturalmente dalla forma analitica della funzione $f(r)$.

Per il caso $f(r)=$ cost. l'integrale [70] si calcola subito, essendo:

$$\int Z_0(\lambda_i r)\, r\, dr = \frac{r}{\lambda_i} Z_1(\lambda_i r) \quad , \tag{75}$$

mentre l'integrale [73] si riduce, mediante la relazione:

$$\int r\, Z_1(\lambda_i r)\, dr = -\frac{r}{\lambda_i} Z_0(\lambda_i r) + \frac{1}{\lambda_i^2}\int Z_0(\lambda_i r)\, d(\lambda_i r) \tag{76}$$

al calcolo dell'integrale:

$$\int Z_0(r)\, dr \quad ,$$

integrale che non si sa fare in forma finita.

Se la funzione $f(r)$ è lineare si presentano gli integrali:

$$\begin{aligned} \int r^2 Z_0(\lambda_i r)\, dr &= \frac{1}{\lambda_i}\left[r^2 Z_1(\lambda_i r) - \int r\, Z_1(\lambda_i r)\, dr\right] = \\ &= \frac{1}{\lambda_i}\left[r^2 Z_1(\lambda_i r) + \frac{r}{\lambda_i} Z_0(\lambda_i r) - \frac{1}{\lambda_i^2}\int Z_0(\lambda_i r)\, d(\lambda_i r)\right] \end{aligned} \tag{77}$$

$$\int r^2 Z_1(\lambda_i r)\, dr = \frac{r^2}{\lambda_i}\left[\frac{2}{\lambda_i r} Z_1(\lambda_i r) - Z_0(\lambda_i r)\right] , \tag{78}$$

il primo dei quali si riduce ancora al calcolo, da farsi per integrazione numerica, dell'integrale $\int Z_0(r)\, dr$.

Agli integrali fondamentali considerati ci si riduce anche, con integrazioni per parti, quando devono eseguirsi integrali del tipo $\int r^m Z_0(r)\, dr$, $\int r^m Z_1(r)\, dr$, essendo m un numero intero maggiore di 2.

6. Il calcolo degli autovalori λ. – Le equazioni trascendenti [21], [45], [48], [52], di cui per lo svolgimento dei calcoli occorre determi-

nare le radici, sono sostanzialmente, posto [1]:

[79] $$\frac{a}{b} = k \qquad b = x \, ,$$

dei tre tipi seguenti:

[80] $$f_0(x) \;= J_0(x)\,N_0(kx) - J_0(kx)\,N_0(x)$$

[81] $$f_{0,1}(x) = J_0(x)\,N_1(kx) - J_1(kx)\,N_0(x)$$

[82] $$f_1(x) \;= J_1(x)\,N_1(kx) - J_1(kx)\,N_1(x) \, .$$

Consideriamo dapprima il caso di una radice x così piccola che non possano usarsi per le funzioni di BESSEL e di NEUMANN di cui essa è argomento gli sviluppi asintotici.

In tal caso, calcolato un valore approssimato $\bar{x}$ della radice e posto:

[83] $$x = \bar{x} + \varepsilon \, ,$$

si può scrivere, arrestando lo sviluppo in serie di TAYLOR ai primi tre termini:

[84] $$f(x) = f(\bar{x} + \varepsilon) = f(\bar{x}) + \varepsilon f'(\bar{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(\bar{x}) = 0 \, .$$

Si ha così una equazione di secondo grado, che risolta fornisce il valore di ε. In questo caso un tale procedimento sembra preferibile all'uso ripetuto della formula di NEWTON, per il fatto che le tabelle (KEIIKI KAYASHI, *Fünfstellige Funktionentafeln*, Springer, 1930) dànno, per argomento fino a 16,00, i valori delle funzioni J_0, N_0, J_1, N_1 con 5 decimali, di 0,01 in 0,01.

Prendendo come valore di partenza un valore delle tavole, il trascurare il cubo di ε porta a un errore certamente minore di 10^{-6},

---

(1) Allo scopo di conservare le notazioni di JAHNKE EMDE: *Funktionentafeln*, si usa in questo paragrafo, e in questo paragrafo solamente, un simbolo k definito dalla prima delle [79], che ha un significato diverso dal k definito dalle [9], [10], che compare in tutti gli altri paragrafi precedenti e seguenti il presente paragrafo.

cioè minore dell'errore con cui sono riportate le funzioni nelle tavole stesse. Si ottiene perciò il valore esatto (nei limiti della precisione delle tavole) fino dal primo calcolo, mentre invece con la formula di NEWTON occorre calcolare successivamente funzione e sua derivata prima per valori di x non contenuti nelle tavole.

Le espressioni delle $f'(x), f''(x)$, che per brevità non stiamo qui a scrivere per i vari casi possibili, si trovano facilmente ricordando che valgono le relazioni:

[85] $$J_0'(x) = -J_1(x) \qquad J_0''(x) = -J_0(x) + \frac{J_1(x)}{x}$$

[86] $$J_1'(x) = -J_0''(x) \qquad J_1''(x) = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) J_1(x) - \frac{J_0(x)}{x}$$

e le analoghe per le funzioni $N_0(x)$, $N_1(x)$.

Per trovare un primo valore approssimato di x si può, per le funzioni f_0, f_1, interpolare nelle tabelle che dànno le loro prime sei radici per varii valori di k in JAMKE-EMDE, *Funktionentafeln*, pagg. 274-276. Per la $f_{0,1}$ si può far uso delle citate tabelle di KEIICHI HAYASHI.

Per il calcolo dei valori più elevati delle radici x si propone come più conveniente il procedimento seguente, basato sugli sviluppi asintotici di HANKEL.

Per le funzioni di BESSEL J_p e di NEUMANN N_p di ordine p tali sviluppi si scrivono notoriamente nel modo seguente:

[87] $$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[A_p(x) \cos \theta_p(x) - B_p(x) \operatorname{sen} \theta_p(x)\right]$$

[88] $$N_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[A_p(x) \operatorname{sen} \theta_p(x) + B_p(x) \cos \theta_p(x)\right]$$

in cui:

[89] $$\theta_p(x) = x - p\,\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

[90] $$A_p(x) = 1 - \frac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)}{2^4 \cdot 2!\,(2x)^2} + \frac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)(4p^2-5^2)(4p^2-7^2)}{2^8 \cdot 4!\,(2x)^4} - \ldots$$

$$B_p(x) = -\frac{(4p^2-1)}{2^2 \cdot 1!\,(2x)} + \frac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)(4p^2-5^2)}{2^6 \cdot 3!\,(2x)^3} - \ldots\ldots .$$

Sostituendo nelle [80], [82], in cui si intenda che sia rispettivamente $p=0$, $p=1$, si trova, tenuto della [89], l'equazione seguente determinatrice delle radici x:

$$\text{[91]} \qquad \operatorname{tg}[(k-1)x] = \frac{A_p(kx)\,B_p(x) - A_p(x)\,B_p(kx)}{A_p(kx)\,A_p(x) + B_p(kx)\,B_p(x)} \; .$$

Poichè gli A_p sono dell'ordine di grandezza dell'unità, mentre i B_p sono dell'ordine di grandezza di $\frac{1}{x}$, cioè, essendo per ipotesi x grande, piccoli del primo ordine, il secondo membro della [91] è piccolo del primo ordine. Perciò anche la $\operatorname{tg}[(k-1)x]$ sarà piccola del primo ordine e potrà quindi confondersi col proprio argomento diminuito di $m\pi$, essendo m quell'intero che fa più avvicinare allo zero la differenza $[(k-1)x - m\pi]$.

Calcolati per un valore approssimato $\bar{x}$ di x il primo e il secondo membro della [91], l'incremento:

$$\text{[92]} \qquad \varepsilon = x - \bar{x}$$

da aggiungere al valore $\bar{x}$ di prima approssimazione per ottenere un valore più approssimato x della radice produrrà, per quanto si è visto, nel secondo membro della [91] una variazione dell'ordine di grandezza di $\frac{\varepsilon}{x^2}$, cioè piccola del secondo ordine e quindi, nelle nostre ipotesi, trascurabile, e nel primo membro una variazione uguale circa a $[(k-1)\varepsilon]$.

Il valore di ε risulta perciò definito dalla relazione:

$$\text{[93]} \qquad \varepsilon = \backsim \frac{1}{k-1}\left[\frac{A_p(k\bar{x})\,B_p(\bar{x}) - A_p(\bar{x})\,B_p(k\bar{x})}{A_p(k\bar{x})\,A_p(\bar{x}) + B_p(k\bar{x})\,B_p(\bar{x})} - (k-1)\bar{x} + m\pi\right] .$$

Per radici molto grandi si ha, ancora più semplicemente:

$$\text{[93']} \qquad \varepsilon = \backsim \frac{B_p(\bar{x}) - B_p(k\bar{x})}{k-1} - \bar{x} + \frac{m\pi}{k-1} \; .$$

A un risultato perfettamente analogo si giunge sostituendo gli sviluppi [87], [88] nella [81]. La condizione determinatrice delle radici risulta adesso la seguente:

$$[94]\qquad \operatorname{tg}\left[(k-1)\,x-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{A_1(k\bar{x})\,B_0(\bar{x})-A_0(\bar{x})\,B_1(k\bar{x})}{A_1(k\bar{x})\,A_0(\bar{x})+B_1(k\bar{x})\,B_0(\bar{x})}\ .$$

L'incremento ε da dare a un primo valore approssimato della x per trovare un valore più approssimato dalla radice stessa è dato adesso dalla:

$$[95]\quad \varepsilon=\backsim\frac{1}{k-1}\left[\frac{A_1(k\bar{x})\,B_0(\bar{x})-A_0(\bar{x})\,B_1(k\bar{x})}{A_1(k\bar{x})\,A_0(\bar{x})+B_1(k\bar{x})\,B_0(\bar{x})}-(k-1)\,\bar{x}+\frac{\pi}{2}+m\pi\right]$$

e, se x è molto grande, dalla:

$$[95']\qquad \varepsilon=\backsim\frac{B_0(\bar{x})-B_1(k\bar{x})}{k-1}-\bar{x}+\frac{\pi}{2(k-1)}+\frac{m\pi}{k-1}\ ,$$

essendo m il numero intero che fa maggiormente avvicinare allo zero la differenza

$$\left[(k-1)\,x-\frac{\pi}{2}-m\pi\right].$$

Al tendere di x all'infinito le radici tendono ai valori limiti:

$$[96]\qquad x=\frac{n\pi}{k-1}\quad \text{per le equazioni [80], [82]}$$

$$[97]\qquad x=\frac{(2n+1)\,\pi}{2(k+1)}\quad \text{per l'equazione [81],}$$

essendo n un numero intero positivo. I valori delle radici dati dalla [96], [97] possono servire in ogni caso per avere l'ordine di grandezza o addirittura un valore di prima approssimazione delle radici cercate.

Applicabilità pratica dei risultati ottenuti. – Pur facendo uso degli accorgimenti e dei metodi sopra esposti per il calcolo degli autovalori e quindi dei coefficienti degli sviluppi in serie di funzioni cilindriche, si deve purtroppo constatare che l'applicazione delle formule ottenute richiede, salvo casi speciali, una mole di calcoli numerici così imponente, che può essere giustificata solo dalla particolare im-

portanza del problema che interessa risolvere ed esclude in generale una comoda applicazione tecnica delle formule stesse.

Questo fatto è dovuto essenzialmente in primo luogo alla estrema lentezza della convergenza degli sviluppi in serie di funzioni cilindriche (i trattati matematici omettono di solito di chiarire questo punto, fondamentale per le applicazioni tecniche), in secondo luogo alla mancanza di tabelle abbastanza estese per i valori delle funzioni di Bessel e di Neumann.

Il primo motivo è il più grave, Si vede facilmente, tenendo presenti le espressioni asintotiche [87], [88], che i coefficienti degli sviluppi in serie sono dell'ordine di grandezza di $1/\sqrt{x}$, cioè, poichè, per valori abbastanza elevati delle radici x, esse crescono circa proporzionalmente ai numeri naturali, i coefficienti decrescono con proporzionalità inversa alla radice quadrata dei numeri naturali. Siccome poi, negli sviluppi, essi sono moltiplicati per funzioni cilindriche, che sono dell'ordine di grandezza di $1/\sqrt{x}$, in definitiva ogni termine dello sviluppo decresce con proporzionalità inversa ai numeri naturali, cioè molto lentamente.

Per veder meglio la cosa, consideriamo ad esempio il caso in cui valgano le condizioni ai limiti [51]. Per valori di x abbastanza grandi, tali condizioni, ricordando le [87], [88], si scrivono:

$$[98] \qquad \begin{aligned} \cos\theta_1(\lambda_i b) + k \operatorname{sen}\theta_1(\lambda_i b) &= 0 \\ \cos\theta_1(\lambda_i a) + k \operatorname{sen}\theta_1(\lambda_i a) &= 0 \end{aligned}$$

o anche:

$$[99] \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen}\theta_0(\lambda_i b) - k \cos\theta_0(\lambda_i b) &= 0 \\ \operatorname{sen}\theta_0(\lambda_i a) - k \cos\theta_0(\lambda_i a) &= 0 \end{aligned}$$

Per le [87], [88] in cui si faccia $p = 0$, $B_0 = 0$, si ha allora:

$$[100] \qquad \begin{aligned} Z_0(\lambda_i b) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i b}}\left[\cos\theta_0(\lambda_i b) + k \operatorname{sen}\theta_0(\lambda_i b)\right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i b}}(1 + k^2)\cos\theta_0(\lambda_i b) \\ Z_0(\lambda_i a) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i a}}(1 + k^2)\cos\theta_0(\lambda_i a)\,. \end{aligned}$$

Sostituendo nella [72], in cui si tenga presente essere $Z_1(\lambda_i b) = Z_1(\lambda_i a) = 0$, e tenendo presente che, come si deduce subito dalle [99], è

$$[101] \qquad \cos^2 \theta_0(\lambda_i b) = \cos^2 \theta_0(\lambda_i a) \ ,$$

si ha:

$$[102] \qquad C_i = \frac{b}{\pi \lambda_i} (1+k^2)^2 \cos^2 \theta_0(\lambda_i b) \left(\frac{a}{b} - 1\right) ,$$

e quindi, per la prima delle [99]:

$$[102'] \qquad C_i = \frac{b}{\pi \lambda_i} (1+k^2) \left(\frac{a}{b} - 1\right) .$$

Nell'ipotesi $f(r) = \text{cost.} = 1$ si vede poi facilmente che il numeratore della [71] risulta non superiore a:

$$\frac{a}{\lambda_i} 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i b}} (1 + |k|)$$

e pertanto i coefficienti dello sviluppo risultano non superiori a:

$$\frac{2a}{b^{3/2}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1 + |k|}{(1+k^2)\left(\frac{a}{b} - 1\right)} .$$

D'altra parte essi sono poi moltiplicati per le funzioni $Z_0(\lambda_i r)$, le quali sono, in valore assoluto, non superiori a:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_i b}} (1 + |k|) .$$

Perciò in definitiva i termini dello sviluppo non superano il valore:

$$\frac{4a}{b(a-b)} \frac{1}{\lambda_i} \frac{(1 \pm k)^2}{(1+k^2)} = \frac{4a}{b(a-b)} \frac{1}{\lambda_i} \left(1 \pm \frac{2k}{1+k^2}\right) .$$

E poichè il valore del termine entro parentesi varia poco, oscillando fra 0 e 2, l'ordine di grandezza dei termini dello sviluppo è definito da $1/\lambda_i$, cioè dal reciproco dei numeri naturali, come si era affermato.

Per avere termini dell'ordine di grandezza di 1/100 occorre dunque calcolare 100 termini della serie, ciò che, evidentemente, non è affatto pratico.

La seconda difficoltà a cui si è accennato richiede che per valori dell'argomento superiori a 16 le funzioni di Bessel e di Neumann vengano calcolate mediante i loro sviluppi asintotici.

Per avere il diagramma completo delle tensioni e degli spostamenti occorre dunque, anche conoscendo già i coefficienti degli sviluppi in serie, calcolare un gran numero di valori di tali funzioni mediante tali sviluppi. Questa difficoltà potrà essere superata mediante la costruzione, tutt'altro che difficile, di estese tabelle delle funzioni di Bessel e di Neumann, ma allo stato attuale sussiste e non c'è mezzo di evitarla.

Si conclude pertanto che, come già affermato in precedenza, la soluzione ottenuta, come pure, più generalmente, le soluzioni che richiedono lo sviluppo di funzioni arbitrarie in serie di funzioni cilindriche, non si presta a una comoda applicazione tecnica e può perciò essere conveniente farne uso solo in casi di grande importanza, quando si disponga di speciali sussidi per i complessi calcoli numerici che occorre svolgere.