

CALCOLO DELLE STRUTTURE COMPOSTE DI ELEMENTI IN STATO DI COAZIONE E DI ELEMENTI ALLO STATO NATURALE NON DEFORMATO (*)

FRANCO LEVI

SVMMARIVM. — Perpendit Auctor quas figuras sumere possit diagramma tensionum in structura, quae constet ex duobus elementis, quorum alterum sit antea compressum, alter non. Ex quo perspicitur quomodo haec structura se habeat, si onus super imponatur, et ratio indicatur qua determinari possit quo onere imposito ipsa fragantur; ita statuitur quomodo aptior huiusmodi structurarum ratio inveniri possit.

Prendiamo in esame un solaio in calcestruzzo armate composto da una trave allo stato precompresso associata ad una soletta allo stato naturale non deformato. (Fig. 1).

La figura 2 rappresenta anzitutto il diagramma delle tensioni nella struttura in assenza di sollecitazione esterna. Per effetto della pretesione TT' , imposta all'armatura, la trave si trova precompressa e il piano di riferimento $A'B$ si dispone in $C'D$. Le tensioni di coazione tanto nel calcestruzzo quanto nell'armatura vanno lette a partire dalla fondamentale $C'D$ tenendo conto dei rispettivi valori del modulo (¹).

Applichiamo ora all'assieme una sollecitazione esterna ed ammettiamo che sia ancora verificata l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane.

Sotto l'azione dello sforzo esterno, il piano CD che taglia tanto la trave quanto la soletta, assume la posizione EF . Sempre ch  si tenga conto dei vari valori del modulo, le tensioni sulle singole fibre,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. G. Colonnetti il 29-7-1943.

(¹) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 1942.

andranno sommate nella trave alle tensioni di coazione. Questo è precisamente il caso rappresentato dalla retta EF della fig. 2. Appena però nascono, in un punto qualsiasi della sezione, delle tensioni positive, secondo le ipotesi correntemente usate nello studio del calcestruzzo armato, bisognerà ammettere che la sezione si parzializzi.

Nelle figg. 3, 4, 5, 6, 7, abbiamo tracciato vari aspetti che potrà allora assumere il diagramma delle tensioni, secondo la forma del diagramma di precompressione, secondo le caratteristiche della sollecitazione esterna e infine secondo le posizioni relative dei due elementi della struttura.

Si nota così che, secondo i casi, l'asse di separazione fra zona reagente e zona parzializzata potrà essere reale nella trave e virtuale nella soletta (fig. 3). Potrà invece avvenire che al crescere della sollecitazione esterna sopravvengano due assi reali di separazione, uno in ciascun elemento (fig. 4 e fig. 7). In altri casi l'asse di separazione, potrà essere reale nella soletta, virtuale nella trave (figg. 5 e 5 bis). Infine nella figura 6 abbiamo segnalato un caso particolare dove già per valori molto piccoli del momento flettente applicato appaiono due assi di separazione reali situati rispettivamente al bordo inferiore della soletta e al bordo superiore della trave; al crescere del carico quello relativo alla soletta tende ad innalzarsi come già negli altri casi esaminati, mentre quello relativo alla trave si abbassa.

Nelle varie figure abbiamo tratteggiato verticalmente le tensioni di compressione sopportate dalla trave, e orizzontalmente quelle sopportate dalla soletta.

In linea generale, si può dire che, dato che la deformazione risultante è rappresentata da un piano unico, mentre i piani di riferimento dei due elementi sono distinti, vi saranno sempre due assi di separazione. Ma questi due assi potranno, secondo i casi, essere reali, virtuali, in certi casi anche sovrapposti o respinti all'infinito. Data la grande varietà dei casi possibili, la soluzione generale del problema della determinazione del diagramma delle tensioni per una sollecitazione data appare assai arduo.

Nel caso particolare della fig. 5 nel quale tutte le tensioni di compressione sono riportate sulla soletta, il problema può venir risolto per estensione del metodo già indicato dal Prof. COLONNETTI per le

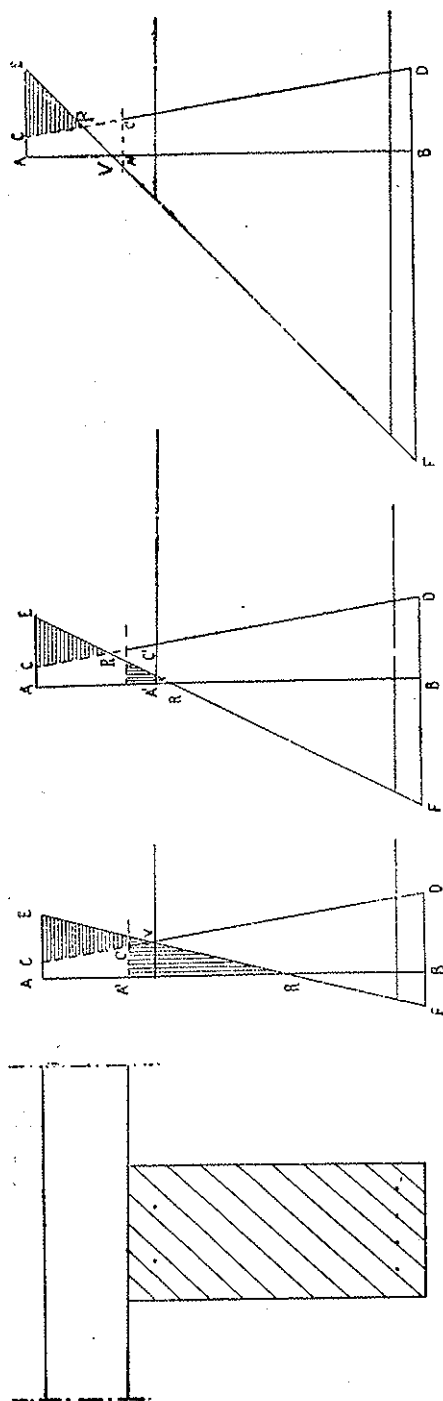


FIG. 345.

travi interamente precomprese (¹). Questa disposizione del diagramma di tensione è precisamente quella che viene a verificarsi, nella più gran parte delle strutture associate, al limite della loro resistenza. Questa soluzione presenta dunque un grande interesse dal punto di vista della determinazione dei margini di sicurezza.

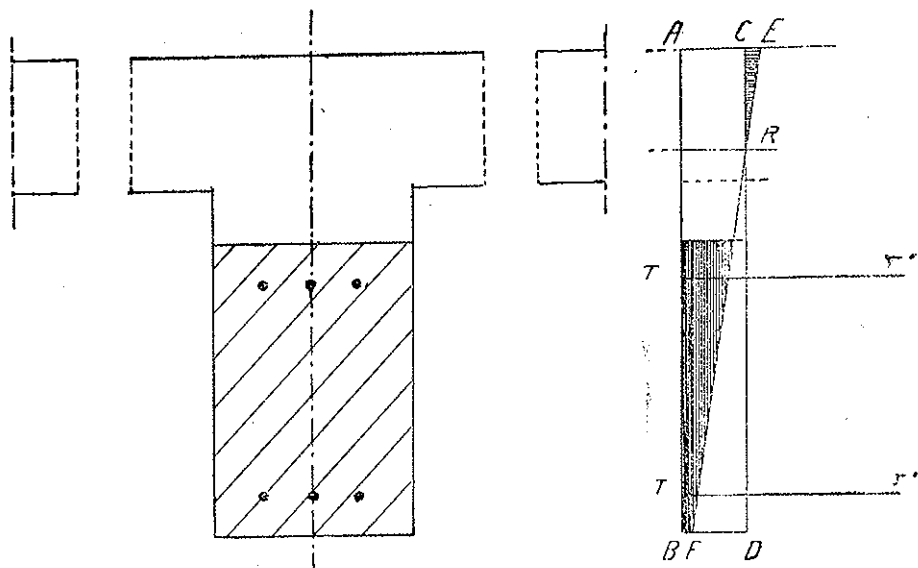


FIG. 5bis.

Invece nel caso della fig. 5bis, l'asse R è evidentemente baricentrico rispetto alla sezione reagente formata dalla soletta compressa, dall'intera trave precompressa e dalle armature.

* * *

Quando il diagramma di tensione assume l'andatura rappresentata nella fig. 3, ossia quando non vi sia che un solo asse di separazione reale R situato nella trave, un metodo di ragionamento indiretto permette di determinare, per questo asse supposto noto, il diagramma di

(¹) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese. Il problema delle sezioni precomprese solo parzialmente*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. VII, 1943.

tensione passante per quel punto e corrispondente ad uno sforzo esterno ridotto ad una coppia. Una volta costruito questo diagramma, sarà facile calcolare il valore della coppia corrispondente; con che per ogni asse di separazione nella trave, si verrà a conoscere il momento flettente applicato che lo determina. Nella fig. 8, per un asse di separazione R dato, abbiamo tracciato in EF il diagramma di tensione ricer-

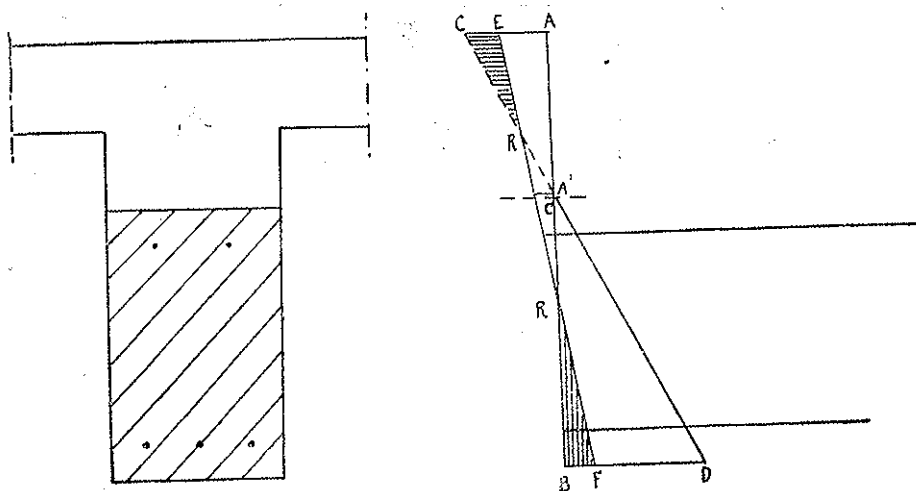


FIG. 6.

cato, che corrisponde ad uno sforzo esterno ridotto ad una coppia M ignota.

Dire che R è l'asse di separazione, equivale a dire che, sotto l'effetto del momento M , gli elementi della sezione della struttura che reagiscono effettivamente sono: l'area di calcestruzzo AR e le armature. Ora, se si fa astrazione delle pretensioni $\overline{TT'}$ e $\overline{T_1''T_1'}$, si nota che il diagramma di tensione EF , riferito nel suo intero al piano di riferimento AB , corrisponde ad una distribuzione di tensioni lineare sulla sezione reagente. La tensione unitaria gg' che questa distribuzione implica per il baricentro della sezione reagente, sarà eguale all'intensità della risultante della distribuzione lineare suddetta divisa per l'area della sezione reagente.

L'intensità di questa risultante non è altro che la somma algebrica delle seguenti forze: risultante delle compressioni $CEC'E'$ applicate alla soletta, risultante C_s delle compressioni fittizie $ACA'C'$ applicate pure alla soletta, risultante delle compressioni $A'E'R'$ applicate alla trave, risultanti delle tensioni $\overline{T''T'}$, $\overline{T_i''T_i'}$ applicate alle armature.

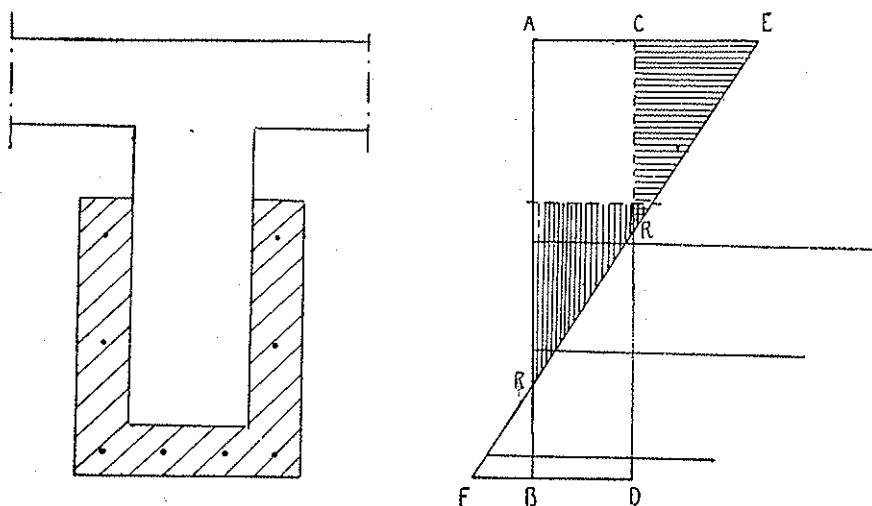


FIG. 7.

Ora, riprendendo in esame il diagramma delle tensioni effettivamente applicate alle varie parti della struttura associata sotto l'azione del momento M , si nota che la somma delle risultanti delle compressioni $CEC'E'$ applicate alla soletta e $A'E'R'$ applicate alla trave, devono far equilibrio alle risultanti delle tensioni $\overline{T''T'}$ e $\overline{T_i''T_i'}$ applicate alle armature.

Con chè il valore della risultante cercata si potrà scrivere:

$$(C_s)_{R}^{\text{soletta}} - (\overline{T''T'})_{R}^{As} - (\overline{T_i''T_i'})_{R}^{As} + (\overline{T''T'})_{R}^{As} + (\overline{T_i''T_i'})_{R}^{As}$$

(le parentesi e l'indice R significano che il termine va inteso come una risultante estesa all'elemento di sezione indicato in esponente;

A_i e A_s rappresentano le sezioni rispettive dell'armatura inferiore e dell'armatura superiore).

Sommando si ottiene:

$$(C_s)_{\text{soletta}} - (\overline{T} \overline{T})_R^{A_i} - (\overline{T}_i \overline{T}_i)_R^{A_s}$$

L'intensità della risultante cui equivale la distribuzione lineare di tensioni EF sarà dunque la somma della intensità della risultante nota C_s e della intensità della risultante pure nota delle trazioni imposte alle varie armature, cambiata di segno.

In pratica, la ricerca del momento M che determina un asse di separazione dato R sarà effettuata nel seguente modo: si determinerà il baricentro della sezione reagente g , indi si porterà da questo punto la tensione:

$$gg' = \frac{C_s + (\text{risultante trazioni imposte, cambiata di segno})}{\Omega_R}$$

Ω_R essendo l'area della sezione reagente. Si tratterà allora il diagramma EF e se ne dedurrà il valore del momento M .

A proposito di questo metodo va notato che:

a) se i due elementi della struttura si compenetrano, le tensioni fittizie vanno naturalmente estese a tutta la soletta e non limitate, come nel caso volutamente particolare della fig. 8, al bordo superiore della trave;

b) se una parte di queste tensioni fittizie risultano positive, ciò che avviene quando il piano CD taglia il piano AB nell'interno della soletta, la risultante corrispondente va considerata come negativa nel computo della C_s ;

c) appena nasca un asse di separazione reale nella soletta, il procedimento non è più valido perchè il valore della risultante delle tensioni fittizie da introdurre nel calcolo della gg' è diverso per ogni posizione dell'asse di separazione nella soletta.

È facile invece dimostrare che il procedimento può venir esteso ai casi in cui, pur assumendo il diagramma l'andatura della fig. 4, non vi sia tuttavia che un unico asse di separazione reale, situato nella trave, la soletta continuando a reagire elasticamente a trazione.

Questa osservazione riveste una certa importanza perchè condanna senz'altro tutti i tentativi che si potrebbero fare di studiare le strutture composte in esame con dei procedimenti analoghi a quelli leciti nel cemento armato ordinario: ampliando i vari elementi componenti secondo certi fattori n . Tale modo di procedere attribuirebbe infatti alle strutture composte un momento di inerzia fisso in regime di parzializzazione della parte precompressa e ciò sarebbe certamente erroneo poichè sappiamo che gli assi di separazione, e dunque l'area della sezione reagente, variano col mutare dello sforzo esterno.

Risulta invece molto vantaggioso, per lo studio generale dei sistemi composti, il tracciare due poligoni funicolari colleganti rispettivamente le aree della soletta e della trave, supposte equivalenti a delle forze orizzontali applicate nei rispettivi baricentri (fig. 9). Questo metodo è una estensione ai sistemi associati di quello indicato dal Prof. COLONNETTI per lo studio delle travi intieramente precomprese⁽¹⁾.

Siano H_T , H_s le distanze polari utilizzate. Siano y'' , y' le ordinate degli assi di separazione rispetto al bordo superiore della soletta, rispettivamente nella trave e nella soletta.

Indichiamo con y_T e y_s le ordinate delle fibre generiche della trave e della soletta contate a partire dai rispettivi assi di separazione e con σ_{cT} , σ_{cs} le tensioni generiche corrispondenti nel calcestruzzo. Sia σ_c la tensione al bordo superiore della soletta, σ_m quella generica nell'armatura della trave. Sia infine s il segmento compreso al bordo superiore della soletta fra le rette di riferimento della trave e della soletta, contato positivamente nel senso delle tensioni e letto in Kg/cm^2 nella scala delle tensioni.

Si avrà:

$$\frac{\sigma_{cT}}{y_T} = \frac{\sigma_c + s}{y''}$$

detto η_T il segmento intercettato sull'asse di separazione della trave dai lati del poligono che racchiudono un elemento di area della trave dA_{cT} .

Si ha:

$$\frac{\eta_T}{y_T} = \frac{dA_{cT}}{H_T}$$

⁽¹⁾ G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese. Il problema dei margini di sicurezza*, Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. VI, 1942.

e dunque

$$\eta_T = \frac{y_T dA_{cT}}{H_T} = \frac{\sigma_{cT} \cdot dA_{cT}}{H_T \frac{\sigma_c + s}{y''}}$$

$$\sum \sigma_{cT} dA_{cT} = H_T \frac{\sigma_c + s}{y''} \sum \eta_T$$

e analogamente

$$\sum \sigma_{cs} dA_{cs} = H_s \frac{\sigma_c}{y'} \sum \eta_s$$

I primi membri di queste due equazioni non sono altro che le intensità risultanti delle compressioni sopportate rispettivamente dalla trave e dalla soletta.

Detta A_m l'area delle armature generiche della trave, se la sollecitazione esterna si riduce ad una coppia si avrà:

$$\sum \sigma_m A_m = H_T \frac{\sigma_c + s}{y''} \sum \eta_T + H_s \frac{\sigma_c}{y'} \sum \sigma_s$$

Graficamente (fig. 9) si potrà riconoscere che un diagramma di tensioni EF corrisponde ad una coppia nel modo seguente. Tracciato il diagramma delle tensioni e determinati gli assi di separazione, all'intersezione del diagramma con i piani di riferimento AB e CD, si congiungeranno i punti S_s , S_T in cui questi assi tagliano i rispettivi poligoni funicolari⁽¹⁾, con il vertice A, incontro dei primi lati dei poligoni funicolari con il bordo superiore della soletta. Le rette AS_s , AS_T determineranno sulle orizzontali di due punti situati rispettivamente alle distanze $H_s \sigma_c$ e $H_T(\sigma_c + s)$ dal vertice A dei segmenti

(¹) A questo punto va notato che il poligono funicolare che collega le aree della soletta deve essere continuato, al di là del bordo inferiore della soletta, dal suo ultimo lato (tangente nel suo punto estremo). Se l'asse di separazione relativo alla soletta viene a trovarsi al disotto del bordo inferiore della soletta (ossia è virtuale), il punto S_s sarà determinato dall'intersezione dell'asse con questa tangente.

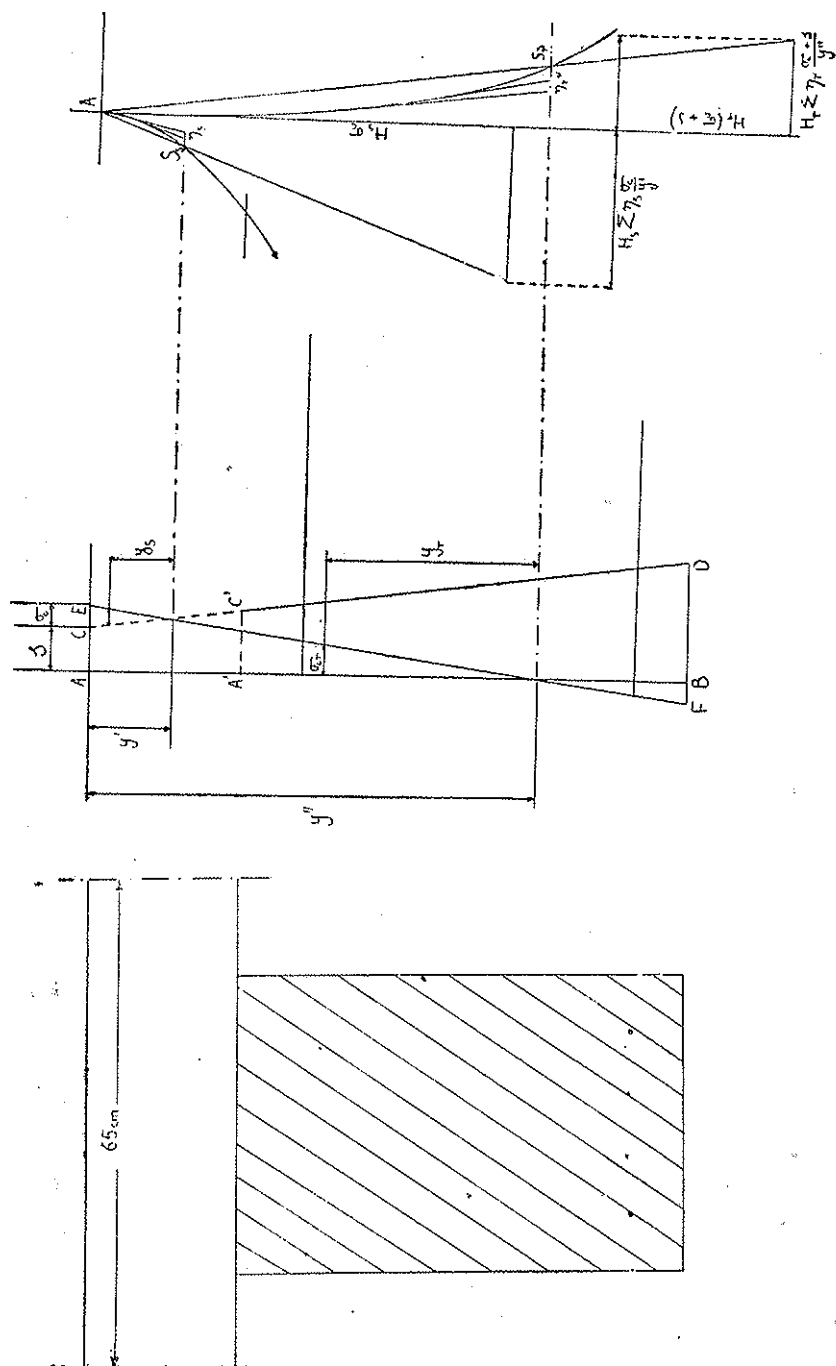


FIG. 9.

che, letti nella scala delle forze, daranno le intensità degli sforzi di compressione sopportati dalla trave e dalla soletta. Se la somma dei due sforzi di compressione sarà eguale a quella degli sforzi di trazione sopportati dalle varie armature, la sollecitazione che determina il diagramma EF sarà effettivamente una coppia. Altrimenti, la differenza delle due risultanti di trazione e di compressione indicherà lo sforzo normale cui il diagramma corrisponde. Sul grafico si disporranno pure di tutti gli elementi per calcolare il momento flettente corrispondente alla sollecitazione.

* * *

Gli studi precedenti consentono di seguire il comportamento delle strutture sotto carichi gradualmente crescenti. Nel calcolo delle costruzioni parzialmente precomprese assume tuttavia una grande importanza la conoscenza del carico di rottura che caratterizza il limite della resistenza a flessione. Naturalmente questo carico limite potrà venir ricercato mediante l'applicazione ripetuta dei metodi d'indagine esposti, sino a trovare che in un punto della sezione venga raggiunto il limite di resistenza del materiale. Ma il procedimento sarebbe assai lungo e poco agevole.

Vogliamo invece mostrare come la ricerca del momento di rottura possa sempre venir fatta rapidamente, e in modo preciso, mediante l'uso dei poligoni funicolari delle aree che abbiamo tracciati in precedenza.

In pratica, non vi sono che due modi per la struttura di raggiungere il suo limite di resistenza per flessione: rottura del calcestruzzo al bordo superiore della soletta, snervamento dell'armatura inferiore della trave.

Si potrà allora fissare arbitrariamente uno di questi due punti come facente parte del diagramma limite. Supponiamo di scegliere il punto per cui le armature raggiungono il carico di rottura. Con il metodo già indicato, sapremo trovare la posizione del diagramma passante per quel punto e che corrisponde ad una coppia.

Questo diagramma sarà effettivamente il diagramma limite se la sollecitazione che esso implica al bordo superiore della soletta sarà inferiore al carico di rottura del calcestruzzo. In caso contrario la ricerca andrà ricominciata prendendo come punto base del diagramma

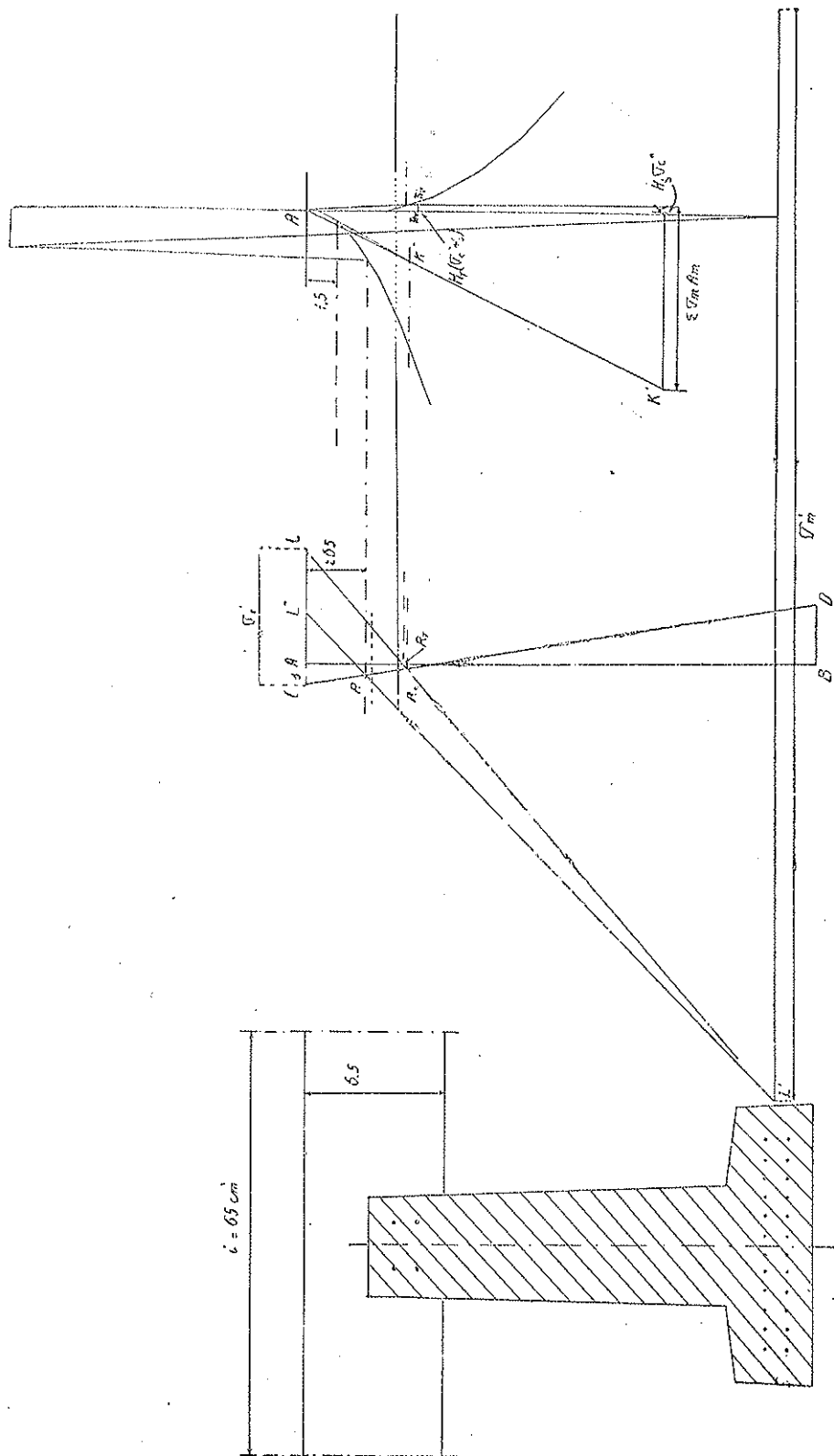
limite precisamente quello che rappresenta una compressione al bordo superiore della soletta eguale al carico di rottura.

La ricerca sarà ancora più spedita quando si possa prevedere a priori il modo di rompersi della struttura: ad esempio mediante l'applicazione di uno dei metodi di indagine svolti per un valore assai elevato del carico esterno. A questo proposito, è anzi interessante osservare come l'uso dei poligoni funicolasi delle aree si presti anche a dare delle utili indicazioni sul proporzionamento delle strutture parzialmente precomprese quando, in applicazione del concetto additato dal Prof. COLONNETTI ⁽¹⁾, si cerchi di far sì che calcestruzzo compresso ed armatura tesa raggiungano insieme il loro limite di resistenza.

Sia ad esempio la struttura composta rappresentata nella Tav. I ⁽²⁾. So ad essa si applica un momento di 345.000 Kg.cm. si trova, col metodo del Prof. COLONNETTI un asse di separazione unico R situato nella soletta a 2,65 cm. dal bordo compresso. Il diagramma di tensione corrispondente $L'L''$ è praticamente il diagramma di rottura poichè esso determina una tensione nel ferro di 20.000 Kg/cm². La struttura cede dunque per rottura dell'armatura quando la zona compressa dispone ancora di un largo margine di resistenza. Supponiamo allora di lasciare, all'atto del proporzionamento, un elemento indeterminato, e precisamente lo spessore della soletta, e cerchiamo di determinare quale spessore bisognerebbe dare alla soletta perchè, ferme restando tutte le altre caratteristiche del solaio, la struttura ceda simultaneamente per rottura del calcestruzzo alla compressione e dei ferri alla trazione. Il diagramma di tensione limite è stato tracciato in LL' sulla Tav. I, e sono stati determinati in conseguenza i due assi di separazione R_T e R_s . Lo sforzo normale sopportato dalla trave è così intieramente determinato in $n_T n_T'$. Poichè la risultante degli sforzi di trazione è egualmente nota, si potrà calcolare, per differenza, lo sforzo

⁽¹⁾ G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese*, Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. VI, 1942.

⁽²⁾ Questo esempio è ricavato da: CARLO CESTELLI GUIDI, *Contributo al calcolo del cemento armato precompresso*, «Annali dei Lavori Pubblici», fasc. II, 1942. Caratteristiche della sezione: armatura inferiore 24 \varnothing 2mm.; armatura superiore 4 \varnothing 2mm. Area della sezione di calcestruzzo cmq. 132,8. Rapporto dei moduli 8. Area della sezione metallica cmq. 0,875. Tensione unitaria dei fili al momento del getto (depurata dal probabile calo dovuto al ritiro) t/cmq. 12.



di compressione che dovrà sopportare la soletta. Portiamo allora questo sforzo sull'orizzontale del punto K situato alla distanza $H_s \sigma_c$ dal vertice A, in KK'. La congiungente AK' taglierà l'asse di separazione della soletta in un punto K''. La tangente condotta da K'' al poligono funicolare relativo alla soletta determinerà senz'altro lo spessore di soletta necessario. Nel caso concreto si trova 15 mm. invece dei 65 mm. adottati. Per questo spessore, il valore del momento limite è di 351.600 Kg.cm., leggermente superiore a quello che si aveva per una soletta di 65 mm. L'aumento dello spessore della soletta non aveva dunque in alcun modo aumentato la resistenza alla rottura della struttura.

Evidentemente lo spessore trovato in questo esempio è troppo debole per essere accettabile. Nè lo scopo di questo studio era di giungere ad un risultato pratico. Ci premeva soltanto mettere in evidenza la necessità di proporzionare queste strutture composte studiando in che modo l'insieme degli elementi che le costituiscono si comporti sotto l'azione sollecitazione esterna, sino alla rottura, e non limitandosi ad esaminare separatamente le capacità di resistenza dei singoli elementi nelle prime fasi della resistenza.