PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 27
pag. 301-320

SAGGIO DI UN'APPLICAZIONE DEL CALCOLO DELLE MATRICI ALLA TEORIA DEGLI ERRORI (*)

ALESSANDRO MARCANTONI

SVMMARIVM. — Auctor, adhibito algoritmo calculi matricum, simplici ratione invenit notas illas leges de «indirectis observationibus» deque «observationibus condicioni obnoxiis». Haec via, quae celerior est et magis perspicua ceteris usque adhuc adhibitis, per se ipsa varios usus ostendere potest..

1. PREMESSE. - Nel corso di *Geodesia* da me ultimamente tenuto per incarico della Facoltà di scienze dell'Università di Pisa, ho avuto occasione di svolgere un breve capitolo sulla Teoria degli errori, ove ho fatto sistematicamente uso dell'algoritmo del calcolo con matrici.

Un'applicazione di questo genere si può vedere, per esempio, nel lavoro del JENSEN citato nella *Bibliografia* alla fine di questa Nota, ma in esso l'argomento è trattato incompletamente, in quanto non viene esaminato il calcolo degli errori medi. Ora è appunto nella ricerca dei parametri di errore, e precisamente nella ricerca dei *coefficienti di peso e di correlazione*, che l'algoritmo delle matrici si mostra particolarmente adatto, sia per la semplicità che esso porta ai procedimenti deduttivi, sia come guida per la pratica del calcolo numerico. Ritengo pertanto possa interessare un breve riassunto dei procedimenti da me seguiti, che mi propongo di esporre in questa Nota.

Per quanto riguarda le definizioni e le operazioni elementari sulle matrici, non è qui luogo di richiamarle perchè generalmente note.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 25 Novembre 1946.

Sarà per altro opportuno tener presente la nozione di *differenziale di una matrice ad elementi variabili*, dandosi tal nome alla matrice formata coi differenziali degli elementi stessi: precisamente, se è

$$Z = \begin{Bmatrix} z_{1\cdot 1} \ldots\ldots z_{1\cdot n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{m\cdot 1} \ldots\ldots z_{m\cdot n} \end{Bmatrix},$$

si porrà

$$dZ = \begin{Bmatrix} dz_{1\cdot 1} \ldots\ldots dz_{1\cdot n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ dz_{m\cdot 1} \ldots\ldots dz_{m\cdot n} \end{Bmatrix}.$$

Fra le proprietà formali del calcolo differenziale che vengono qui conservate, ci basterà ricordare le seguenti:

[1] $$d(Y+Z) = dY + dZ\,, \quad d(AZ) = A\,dZ\,, \quad d(ZB) = dZ \cdot B\,,$$

dove A e B sono matrici ad elementi costanti.

Se si considerano due n-complessi verticali

$$t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{Bmatrix} \qquad dZ = \begin{Bmatrix} dZ_1 \\ \vdots \\ dZ_n \end{Bmatrix}$$

rispettivamente di termini e di differenziali indipendenti, la condizione

[1] $$t_1\,dZ_1 + t_2\,dZ_2 + \ldots + t_n\,dZ_n = 0$$

che si scrive pure brevemente nei due modi

[1'] $$t_{-1}\,dZ = 0\,, \quad dZ_{-1}\,t = 0\,,$$

sarà sempre soddisfatta (qualunque siano i dZ_i) solo se si ha

[2] $$t = 0$$

Più in generale, i dZ_i siano anche legati da $q\,(<n)$ relazioni del tipo

[3] $$\begin{matrix} A_1\,dZ_1 + \ldots + A_n\,dZ_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_1\,dZ_1 + \ldots + Q_n\,dZ_n = 0 \end{matrix}$$

od anche, brevemente,

$$[3'] \qquad M \cdot dZ = 0$$

dove si è posto

$$M = \left\{ \begin{matrix} A_1 \dots\dots\dots A_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ Q_1 \dots\dots\dots Q_n \end{matrix} \right\} .$$

Il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange* porta allora a concludere che, affinchè le [1] e [3] possano coesistere, si dovrà poter determinare un q-complesso di elementi $K_1 \dots K_q$, tale che risulti

$$[4] \qquad t = M_{-1} K \ .$$

Si abbia ancora una matrice U, i cui elementi $u_{r \cdot s}$ siano grandezze osservate. Diremo *valore medio di* U la matrice

$$M(U) = \left\{ \begin{matrix} M(u_{1 \cdot 1}) \dots\dots M(u_{1 \cdot n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M(u_{m \cdot 1}) \dots\dots M(u_{m \cdot n}) \end{matrix} \right\}$$

formata coi valori medi dei singoli elementi $u_{r \cdot s}$. Si verificano immediatamente le identità

$$[1'] \qquad M(U+V) = M(U) + M(V)\,, \quad M(AU) = A \cdot M(U)\,, \quad M(UB) = M(U) \cdot B$$

dove A e B sono matrici ad elementi costanti.

2. Il problema delle osservazioni indirette. – Ammettendo già note al lettore le varie definizioni e questioni preliminari, consideriamo un sistema di *n equazioni generate indipendenti già ridotte alla forma lineare e all'unità di peso*, con g incognite $z_1 \dots z_g (n > g)$. Siano queste

$$[5] \qquad \begin{matrix} a_1 z_1 + b_1 z_2 + \dots + g_1 z_g + k_1 = v_1 \\ a_2 z_1 + b_2 z_2 + \dots + g_2 z_g + k_2 = v_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n z_1 + b_n z_2 + \dots + g_n z_g + k_n = v_n \end{matrix}$$

dove $a_i, b_i, \ldots g_i, k_i$ sono funzioni di quantità direttamente misurate, e le v_i sono i *residui*. Brevemente, le [5] si potranno scrivere

$$[5'] \qquad \mathrm{A}z + k = v \ ,$$

avendo posto

$$[5''] \qquad \mathrm{A} = \begin{Bmatrix} a_1 b_1 \ldots\ldots g_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n b_n \ldots\ldots g_n \end{Bmatrix}, \quad z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_g \end{Bmatrix}, \quad k = \begin{Bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix}, \quad v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$$

In conformità al *principio dei minimi quadrati*, i valori più plausibili z_i saranno quelli per cui risulterà

$$[vv] = \text{minimo}$$

ossia, differenziando

$$v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + \ldots + v_n dv_n = 0 \ .$$

Quest'ultima si può scrivere brevemente

$$[6] \qquad dv_{-1} v = 0 \ ;$$

d'altra parte, la [5], tenuta presente la [1] del § precedente, dà

$$v_{-1} = k_{-1} + z_{-1} \mathrm{A}_{-1} \ , \quad dv_{-1} = dz_{-1} \mathrm{A}_{-1} \ ,$$

e pertanto con quest'ultima e la [5'] la [6] diviene

$$dz_{-1}(\mathrm{A}_{-1} \mathrm{A} z + \mathrm{A}_{-1} k) = 0 \ .$$

Come sopra si è osservato, affinchè questa relazione sia identicamente verificata, dovrà essere nullo il g-complesso verticale dei coefficienti delle dz. Posto allora

$$[7] \qquad \mathrm{D} = \mathrm{A}_{-1} \mathrm{A}$$

si ricava

$$[8] \qquad \mathrm{D} z + \mathrm{A}_{-1} k = 0$$

La [8] rappresenta un sistema di g equazioni lineari nelle g incognite z_i. La D (che la [7] mostra chiaramente essere quadrata e di ordine g) è la matrice dei coefficienti e, poichè le [5] si sono supposte indipendenti, essa è certamente non degenere; il secondo termine è il g-complesso verticale dei termini noti. Volendo esplicitare la [8], tenute presenti le [5''], indichiamo rispettivamente con $a, b \dots g, k$ gli n-complessi verticali costituiti dagli elementi $a, b \dots g, k$ $(i = l \dots n)$. Avremo allora

[II]

$$\mathrm{D} = \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ \hline b_{-1} \\ \hline \vdots \\ \hline g_{-1} \end{Bmatrix} \}a\,|b|\dots g\{ = \begin{Bmatrix} a_{-1}a & a_{-1}b \dots\dots a_{-1}g \\ b_{-1}a & b_{-1}b \dots\dots b_{-1}g \\ \dots\dots & \dots\dots \\ g_{-1}a & g_{-1}b \dots\dots g_{-1}g \end{Bmatrix}, \quad \mathrm{A}_{-1} = \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ \hline b_{-1} \\ \hline \vdots \\ \hline g_{-1} \end{Bmatrix} k = \begin{Bmatrix} a_{-1}k \\ b_{-1}k \\ \vdots \\ g_{-1}k \end{Bmatrix}$$

Ora, indicando con p e q due qualsiasi degli n-complessi verticali precedenti, si ha

$$[\mathrm{III}] \qquad p_{-1}q = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n = [pq] .$$

Risulta pertanto dalla [8] il sistema delle equazioni esplicitato:

$$[9] \qquad \begin{Bmatrix} [aa] & [ab] \dots\dots [ag] \\ [ba] & [bb] \dots\dots [bg] \\ \dots\dots & \dots\dots \\ [ga] & [gb] \dots\dots [gg] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [ak] \\ [bk] \\ \vdots \\ [gk] \end{Bmatrix} = 0$$

Il problema delle osservazioni indirette viene così formalmente ricondotto a quello della risoluzione del sistema [9], facilmente costruibile coi coefficienti del sistema generato [5].

3. – Il sistema [9] dicesi *sistema normale* o anche *gaussiano*. La matrice dei suoi coefficienti, come subito si scorge, è *simmetrica*: è questa una proprietà generale di tutte le matrici rappresentabili come il prodotto (sempre eseguibile) di una matrice qualunque per la propria trasposta. Infatti dalla [7] si ha

$$\mathrm{D}_{-1} = (\mathrm{A}_{-1}\mathrm{A})_{-1} = \mathrm{A}_{-1}(\mathrm{A}_{-1})_{-1} = \mathrm{D} \;;$$

cioè D coincide colla sua trasposta, come è appunto per le matrici (quadrate) simmetriche. Inoltre, la diagonale principale è formata da elementi del tipo $[mm]$, che sono essenzialmente positivi. Una tale matrice verrà detta *matrice normale.*

Notiamo che se con $a_{m \cdot n}$ si indica il termine di posto (m, n) in una matrice normale, poichè esso assume l'aspetto della somma di prodotti $[mn]$, e stanti le identità

$$[mm] + [nn] - 2[mn] = [(m-n)^2] > 0$$

$$[mm][nn] - [mn] = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{r \cdot s}(m_r n_s - m_s n_r)^2 > 0 \quad ,$$

si avra sempre

$$[10] \qquad -1 \leqslant \frac{2a_{r \cdot s}}{a_{r \cdot r} + a_{s \cdot s}} \leqslant +1 \quad , \quad -1 \leqslant \frac{a_{r \cdot s}}{+\sqrt{a_{r \cdot s}\, a_{s \cdot s}}} \leqslant +1 \quad .$$

Di particolare importanza è la considerazione della matrice D^{-1}, reciproca della D, (che nel nostro caso esiste, essendo D non degenere). Indicando con $\alpha_{r \cdot s}$ gli elementi di D^{-1}, si avrà

$$\begin{Bmatrix} [aa] & [ab] & \ldots & [ag] \\ [ba] & [bb] & \ldots & [bg] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [ga] & [gb] & \ldots & [gg] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{1 \cdot 1} & \alpha_{1 \cdot 2} & \ldots & \alpha_{1 \cdot g} \\ \alpha_{2 \cdot 1} & \alpha_{2 \cdot 2} & \ldots & \alpha_{2 \cdot g} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{g \cdot 1} & \alpha_{g \cdot 2} & \ldots & \alpha_{g \cdot g} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Bmatrix}$$

ossia gli elementi $\alpha_{1 \cdot i}, \alpha_{2 \cdot i} \ldots \alpha_{g \cdot i}$ dell'i^{esimo} colonna si possono ricavare da un sistema di equazioni identiche alle [9], dove lo i^{esimo} termine noto è uguale ad 1, e tutti gli altri sono nulli.

La [8], moltiplicata per D^{-1}, dà formalmente la soluzione del sistema:

$$[8'] \qquad z = -D^{-1} A_{-1} k \quad ,$$

relazione che, come subito si scorge, sintetizza le g seguenti

$$[8''] \qquad z_i = -\alpha_{i \cdot 1}[ak] - \alpha_{i \cdot 2}[gk] - \ldots - \alpha_{i \cdot g}[gk] \qquad (i = l \ldots g)$$

Si può immediatamente constatare che *anche* D^{-1} *è una matrice normale.* Infatti, poichè D^{-1} è evidentemente simmetrica, tenendo presente la [7] si ha identicamente

$$D^{-1} = D^{-1}\, D\, D^{-1} = D^{-1}_{-1}\, A_{-1}\, A D^{-1} = (A D^{-1})_{-1}\, (A D^{-1}) \; ;$$

cioè D^{-1} può rappresentarsi come il prodotto di una matrice per la sua trasporta, il che conferma l'asserto.

In particolare, varrà dunque la relazione di simmetria

$$\alpha_{r \cdot s} = \alpha_{s \cdot r}$$

e saranno valide pure le [10], ove al posto delle $a_{r \cdot s}$ si pongano le $\alpha_{r \cdot s}$. È pure utile notare fin d'ora che se D è una matrice normale, ogni matrice del tipo

$$T = S_{-1}\, D\, S \; ,$$

potendosi porre sotto la forma

$$T = S_{-1}\, A_{-1}\, A S = (A S)_{-1}\, (A S) \; ,$$

è essa pure una matrice normale.

4. – Vogliamo ora valutare i pesi e gli errori medi delle incognite z_i. A tale scopo riprendiamo la formula risolutiva

[8′] $$z = - D^{-1}\, A_{-1}\, k \; .$$

Cominciamo col notare che, poichè i quadrati degli errori si ritengono trascurabili, questi, in sostanza, vengono assimilati a differenziali. Inoltre, come è noto, i coefficienti delle equazioni generate possono ritenersi privi di errore, mentre gli errori v_i possono ritenersi confinati nei soli termini noti k_i. Differenziando perciò la [8′], ove D ed A si considerino come costanti, si potranno sostituire dz e dk rispettivamente con x e v, dove v ha il solito significato ed x è il g-complesso verticale degli errori $x_1 \ldots x_g$ da cui sono affette le z.

Si ha così:

$$[11] \qquad x = -\,D^{-1} A_{-1} v$$

Ciò posto consideriamo la matrice

$$xx_{-1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_g \end{Bmatrix} \} x_1 x_2 \dots x_g \{ = \begin{Bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \dots & x_1 x_g \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \dots & x_2 x_g \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_g x_1 & x_1 x_2 & \dots & x_g^2 \end{Bmatrix}$$

ossia, in base alla [11],

$$xx_{-1} = D^{-1} A_{-1} vv_{-1} AD \; .$$

Prendendo i valori medi, ricordando la [1'] del § 1, si ha allora

$$[12] \qquad M(xx_{-1}) = D^{-1} A_{-1} M(vv_{-1}) AD \; .$$

Ora, le v_i sono errori di osservazioni indipendenti, ridotte tutte all'unità di peso: sarà perciò

$$[13] \quad M(v_r v_s) = M(v_r) M(v_s) = 0 \;\; (r \neq s); \quad M(v_i^2) = m_0^2 \;\; (i = 1 \dots n)$$

essendo m_0 l'errore medio dell'unità di peso. È inoltre

$$vv_{-1} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \} v_1 v_2 \dots v_n \{ = \begin{Bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & \dots & v_1 v_n \\ v_n v_1 & v_2^2 & \dots & v_2 v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \dots & v_n^2 \end{Bmatrix}$$

e quindi per le [12], indicando con I la matrice di ordine n:

$$M(vv_{-1}) = \begin{Bmatrix} m_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_0^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_0^2 \end{Bmatrix} = I m_0^2$$

Sostituendo nella [12], si ha così

$$M(xx_{-1}) = D^{-1} A_{-1} m_0^2 A D^{-1} = D^{-1} A_{-1} A D^{-1} \cdot m_0^2 = D^{-1} D D^{-1} m_0^2$$

ossia infine

$$[14] \qquad M(xx_{-1}) = D^{-1} m_0^2$$

relazione la quale dimostra che *gli elementi della matrice reciproca* D^{-1} *son proporzionali agli errori medi dei prodotti delle incognite a due a due.* Più esplicitamente, colle notazioni adottate sarà

$$[14'] \qquad M(x_r x_s) = \alpha_{r \cdot s} m_0^2 \ .$$

In particolare, indicando con $m_{r'}$ l'errore medio di una $z_{r'}$, e con $p_{r'}$ il suo peso, posto nella [14'] $s = r$, si ottiene

$$[15] \qquad m_r^2 = \alpha_{r \cdot r} m_0^2 \,, \quad p_r = \frac{1}{\alpha_{r \cdot r}} \ .$$

Ancora, indicato con $\sigma_{r \cdot s}$ il *coefficiente di correlazione* fra due incognite z_r e z_s, definito, come è noto, dalla

$$\sigma_{r \cdot s} = \frac{M(x_r x_s)}{\sqrt{M(x_r^2) M(x_s^2)}}$$

si ottiene

$$[16] \qquad \sigma_{r \cdot s} = \frac{\alpha_{r \cdot s}}{\sqrt{\alpha_{r \cdot r} \alpha_{s \cdot s}}}$$

Questa espressione, in generale, non sarà nulla, in quanto gli errori della z_i non sono indipendenti, perchè legati dalle n ($> n$) relazioni che provengono dalle [5]. Tenute presenti le già segnalate proprietà delle matrici normali ed in particolare le [10], si vede che verrà sicuramente soddisfatta la limitazione

$$-1 \leqslant \sigma_{r \cdot s} \leqslant +1 \,,$$

propria del coefficiente di correlazione.

Dobbiamo ancora vedere come si valuta l'errore medio dell'unità di peso m_0. A tale scopo, introdotti nelle equazioni generate [5] i valori delle z ricavati dal sistema normale [9], si otterrà un n-complesso verticale λ di *residui* $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, ossia brevemente si avrà:

$$\text{[IV]} \qquad k + \mathrm{A} z = \lambda$$

Siano ora k'_i e z'_i i *veri valori*, rispettivamente, delle k_i e delle z_i. Con esse le equazioni generate rimarebbero prive di errore, e cioè

$$\text{[V]} \qquad k' + \mathrm{A} z' = 0 \ .$$

Sottraendo la [V] dalla [IV] e ricordando che $k - k' = v$ e $z - z' = x$, risulta

$$v = -\mathrm{A} x \ ,$$

da cui, notando che è $[vv] = v_{-1} v$ e $[\lambda\lambda] = \lambda_{-1} \lambda$, si ottiene:

$$\text{[VI]} \quad [vv] = (\lambda_{-1} - x_{-1} \mathrm{A}_{-1})(\lambda - \mathrm{A} x) = [\lambda\lambda] - x_{-1} \mathrm{A}_{-1} \lambda - \lambda_{-1} \mathrm{A} x + x_{-1} \mathrm{A}_{-1} \mathrm{A} x \ .$$

Ora, dalla [IV] si ha

$$\mathrm{A}_{-1} \lambda = \mathrm{A}_{-1} \mathrm{A} z + \mathrm{A}_{-1} k = \mathrm{D} z + \mathrm{A}_{-1} k \ ,$$

e poichè l'ultima espressione sopra scritta non è che il primo membro del sistema normale [8] da cui le z provengono, ne viene

$$[17] \qquad \mathrm{A}_{-1} \lambda = 0 \ , \quad \lambda_{-1} \mathrm{A} = 0 \ ;$$

inoltre l'espressione $x_{-1} \mathrm{A}_{-1} \mathrm{A} x = x_{-1} \mathrm{D} x$ rappresenta evidentemente la forma quadratica costruita colle x_i e la matrice simmetrica D. Si vede pertanto che la [VI], esplicitata, diviene

$$\begin{aligned} [vv] = \quad & + [aa] x_1^2 + \ldots\ldots + [ag] x_1 x_g + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [ga] x_g x_1 + \ldots\ldots + [gg] x_g^2 \ . \end{aligned}$$

Prendiamo in questa relazione i valori medi, tenendo presenti le [14'] e le [15]. Avremo così

$$n \cdot m_0^2 = [\lambda\lambda] + ([aa]\,\alpha_{1\cdot 1} + \ldots\ldots + [ag]\,\alpha_{1\cdot g})\,m_0^2 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ ([ga]\,\alpha_{g\cdot 1} + \ldots\ldots + [gg]\,\alpha_{g\cdot g}]\,m_0^2 \;.$$

Ora le g quantità messe in evidenza fra parentesi non sono che i g elementi della diagonale principale del prodotto $DD^{-1} = 1$; essi sono perciò tutti uguali ad 1, sicchè rimane semplicemente

$$m m_0^2 = [\lambda\lambda] + g m_0^2 \;,$$

da cui scende senz'altro

[18] $$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-g}}$$

Avuto così m_0, le [15] permettono di calcolare gli errori medi tutte le incognite. Più in generale, se

$$y = r_0 + r_1 z_1 + \ldots + r_g z_g$$

è una funzione lineare delle z, tenuta presente anche la [14'], il suo errore medio risulterà dalla

[19] $$m_y^2 = (r_1^2\,\alpha_{1\cdot 1} + \ldots + 2 r_1 r_g\,\alpha_{1\cdot g} + \ldots + r_g^2\,\alpha_{g\cdot g})\,m_0^2$$

o anche, introducendo un quadrato simbolico di ovvio significato,

[19'] $$m_y^2 = (r_1\,\alpha_1 + \ldots + r_g\,\alpha_g)\,m_0^2 \;.$$

Se y è funzione *non lineare* delle z, varranno ancora le [19] e [19'], dove al posto di $r_1 \ldots r_g$ si pongano le derivate parziali di y stessa rispetto a $z_1 \ldots z_g$.

5. Osservazioni condizionate. – Supponiamo ora che le quantità $z_1 \dots z_g$, per le quali si sono ottenute le n equazioni generate [5] o [5′], siano fra loro legate da un certo numero q ($< g$) di *equazioni di condizione*, fra loro indipendenti, che devono essere rigorosamente verificate; siano queste:

$$f_i(z_1 \dots z_g) = 0 \quad (i = 1 \dots q) \ . \tag{20}$$

Comincieremo allora col fare un calcolo di *prima approssimazione*, prescindendo dalle [20]: si otterranno certi *valori provvisori* $z_1{}^0 \dots z_g{}^0$ che soddisferanno al sistema normale

$$\mathrm{D} z^0 + \mathrm{A}_{-1} k = 0 \ . \tag{21}$$

Introdotte le $z_i{}^0$ nelle [5] si otterrebbero dei residui λ_i, cioè

$$\mathrm{A} z^0 + k = \lambda \ . \tag{22}$$

Indichiamo ora con $\zeta_1 \dots \zeta_g$ le correzioni da dare alle z^0, affinchè le [20] siano ugualmente soddisfatte: sia cioè

$$z = z^0 + \zeta \ . \tag{23}$$

Sottraendo la [22] dalla [5′] risulta intanto

$$\mathrm{A}\zeta + \lambda = v \ . \tag{5''}$$

Inoltre, introdotta la [23] nelle [20] e sviluppando con Taylor, trascurando, al solito, le potenze superiori delle ζ_i, si ottiene un sistema di *equazioni di condizione ridotte alla forma lineare* del tipo

$$\mathrm{M}\zeta + \mathrm{M}_0 = 0 \tag{20'}$$

con

$$\mathrm{M} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{A}_1\,\mathrm{A}_2 \dots\dots \mathrm{A}_g \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{Q}_1\,\mathrm{Q}_2 \dots\dots \mathrm{Q}_g \end{matrix} \right\} \mathrm{M}_0 = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{A}_0 \\ \dots \\ \mathrm{Q}_0 \end{matrix} \right\}$$

dove si è posto

$$[20''] \qquad A_0 = f_1(z^0 \ldots z_g^0) \ldots\ldots Q_0 = f_1(z_1^0 \ldots z_g^0)$$

$$[20''] \quad A_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\right) \ldots A_g = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_g}\right)_0 ; \ \ldots \ Q_1 = \left(\frac{\partial f_q}{\partial z_1}\right)_0 \ldots , \ Q_g = \left(\frac{\partial f_q}{\partial z_g}\right)_0 .$$

Le ζ_i, oltre che alla condizione

$$[24] \qquad [vv] = \text{minimo} ,$$

devono soddisfare alla [20']. Ora, differenziando la [24], e tenuta presente la [5''], si ha

$$dv_{-1}\, v = d\zeta_{-1}\, A_{-1}(A\zeta + \lambda) = 0$$

ossia, ricordando la [17] del § 4,

$$[25] \qquad d\zeta_{-1}\, D\zeta = 0$$

Differenziando la [20'] e trasponendo, si ha poi

$$[25'] \qquad d\zeta_{-1}\, M_{-1} = 0 .$$

Affinchè le [25] e [25'] siano soddisfatte, in base a quanto si è richiamato nel § 1, dovrà esistere un q-complesso verticale

$$K = \begin{Bmatrix} K_1 \\ \ldots \\ K_q \end{Bmatrix}$$

tale che risulti

$$[26] \qquad D\zeta = M_{-1} K .$$

Ora, la [26] dà

$$[26'] \qquad \zeta = D^{-1} M_{-1} K ;$$

introducendo questa nella [20′] e ponendo

[27] $$\Delta = M_{-1} D^{-1} M ,$$

si ottiene così

[28] $$\Delta K + M_0 = 0 .$$

Come mostra la [27], e in base a quanto si è osservato nel § 3 sulle matrici normali, si vede che Δ è una matrice normale di ordine q, mentre K ed M_0 sono due q-complessi verticali, rispettivamente di incognite e di termini noti; inoltre per la supposta indipendenza delle [20], e quindi delle [20′], Δ è certamente non degenere. La [28] rappresenta quindi un sistema normale, da cui si possono ricavare le incognite K. Ricavate queste, la [26′] ci dà modo di calcolare le correzioni ζ, colle quali, per il modo in cui si è operato, le [20] e [20′] sono rigorosamente soddisfatte.

6. – Per quanto riguarda la precisione dei risultati, l'*errore medio dell'unità di peso* si determina immediatamente, osservando che le [5] e [20], considerate insieme, si possono riguardare come $n + q$ equazioni generate, di cui le prime coi valori z compensati dànno luogo a certi residui $v_1 \ldots v_n$, mentre le altre hanno residui nulli. La [18] del § 4 si muta così nella

[29] $$M_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n + q - g}} .$$

Volendo ora i pesi ed i coefficienti di correlazione per le z compensate, osserviamo che dalle [23] [26′] e [28] si ottiene

[30] $$z = z_0 - D^{-1} M_{-1} \Delta^{-1} M_0 .$$

Come già per le equazioni generate, anche per le equazioni di condizione ridotte alla forma lineare gli errori possono ritenersi concentrati nei soli termini noti $A_0 B_0 \ldots Q_0$ e, al solito, sono assimilabili ai differenziali delle rispettive grandezze. In conformità a ciò, comin-

ciamo col differenziare la [30], ritenendo variabile nell'ultimo termine la sola M_0: otteniamo così

[VII] $$dz = dz^0 - D^{-1} M_{-1} \Delta^{-1} dM_0 \ .$$

D'altra parte, tenendo conto delle [20'] e dell'ordine di approssimazione tenuto per esse, si constata subito che è lecito porre

$$dM_0 = \begin{Bmatrix} A_1 dz_1{}^0 + \dots A_g dz_g{}^0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_1 dz_1{}^0 + \dots Q_g dz_g{}^0 \end{Bmatrix} = M \cdot dz^0 \ .$$

Introducendo questa nella [VII] ed indicando rispettivamente con

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_g \end{Bmatrix} , \quad x_0 = \begin{Bmatrix} x_1{}^0 \\ \dots \\ x_g{}^0 \end{Bmatrix}$$

gli errori della z e z^0, che, per quanto si è detto potranno sostituirsi coi rispettivi differenziali, si ottiene così

[31] $$x = (I - D^{-1} T) x^0 \ ,$$

avendo posto

[32] $$T = M_{-1} \Delta^{-1} M \ .$$

Ciò posto, consideriamo, al solito la matrice

$$xx_{-1} = \begin{Bmatrix} x_1{}^2 & \dots\dots & x_1 x_g \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ x_g x_1 & \dots\dots & x_g{}^2 \end{Bmatrix}$$

ossia in base alla [31], notando che per la [32] anche T è una matrice normale,

[VIII] $$xx_{-1} = (I - D^{-1} T) x^0 x^0{}_{-1} (I - TD^{-1})$$

Poichè gli errori x^0 derivano delle sole equazioni generate [5], saranno ad essi applicabili i risultati del § 4, e cioè si avrà

$$M(x^0 x^0) = D^{-1} m_0{}^2 \ .$$

Prendendo nella [VIII] i valori medi, si ottiene dunque

$$\text{[IX]} \qquad M(xx_{-1}) = (I - D^{-1}T)D^{-1}(I - TD^{-1})\,m_0^2$$

da cui sviluppando e notando che è

$$TD^{-1}T = M_{-1}\Delta^{-1}MD^{-1}M_{-1}\Delta^{-1}M = M_{-1}\Delta^{-1}\Delta\Delta^{-1}M = M_{-1}\Delta^{-1}M = T$$

si ottiene alla fine

$$\text{[33]} \qquad M(xx_{-1}) = B\,m_0^2 \ ,$$

ove si è posto

$$\text{[34]} \qquad B = D^{-1} - D^{-1}TD^{-1}$$

Se dunque indichiamo con $\beta_{i \cdot k}$ gli elementi di B, avremo

$$\text{[35]} \qquad M(x_i x_h) = \beta_{i \cdot k}\,m_0^2 \qquad (i, k = l \ldots g) \ .$$

Le [33], [34] e [35] mostrano chiaramente che:

1°) i pesi e gli errori medi delle z_i compensate sono rispettivamente

$$\text{[36]} \qquad P_i = \frac{1}{\beta_{i \cdot i}}\,, \quad m_i^2 = \beta_{i \cdot i}\,m_0^2 \ ;$$

2°) il coefficiente di correlazione fra due z compensate è

$$\text{[36']} \qquad \sigma_{i \cdot k} = \frac{\beta_{i \cdot k}}{\sqrt{\beta_{i \cdot i} \cdot \beta_{k \cdot k}}} \ ;$$

3°) B è una matrice normale, perchè prodotto di due trasposte, come si vede per esempio dalla [IX]: quindi resta verificato che le [36] e [36'] dànno per i pesi valori positivi e per le $\sigma_{i \cdot k}$ valori assoluti non superiori all'unità;

4°) anche $D^{-1}TD^{-1}$ è una matrice normale, e quindi gli elementi della sua diagonale principale sono essenzialmente positivi: indicando allora al solito, con $\alpha_{r \cdot s}$ gli elementi di D^{-1}, la [34] dà

$$0 < \beta_{i \cdot i} < \alpha_{i \cdot i} \qquad (i = l \ldots g) \ ,$$

ossia, detti p_i e i pesi delle z_i^0 (non compensate)

$$P_i > p_i \ ;$$

si vede cioè che *la compensazione fa aumentare i pesi.*

7. Lasciando al lettore gli sviluppi, del resto facilissimi, del caso generale, espliciteremo i precedenti risultati per il caso di *quantità condizionate direttamente osservate.* Siano dunque $z_1^0 \dots z_g^0$ i valori dedotti direttamente dalle osservazioni per dette quantità e $p_1 \dots p_g$ i rispettivi pesi. Dovendo soddisfare rigorosamente le [20], al solito, si porrà

[23′] $$z_i = z_i^0 + \zeta_i$$

e quindi, sostituendo, ne verranno ancora le equazioni di condizione ridotte alla forma lineare [20′]. Posto poi

[37] $$\sqrt{p_i}\,\zeta_i = \lambda_i \ ,$$

le [23′], ridotte all'unità di peso, divengono

$$\sqrt{p_i}\,z_i - \sqrt{p_i}\,z_i^0 = \lambda_i \qquad (i = l \dots g) \ .$$

Queste g relazioni si possono compendiare nell'unica seguente

[38] $$Az + \sqrt{p}\,z^0 = \lambda$$

dove z $\sqrt{p z^0}$ e λ sono i g-complessi verticali formati rispettivamente colle z_i le $\sqrt{p_i}\,z_i^0$ e le λ_i, e inoltre è

[39] $$A = \begin{Bmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{p_g} \end{Bmatrix}$$

Ne viene, con calcoli elementari

$$[39'] \qquad D = A_{-1} A = \begin{Bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_g \end{Bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{Bmatrix} 1/p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 1/p_g \end{Bmatrix}$$

e pertanto, in base alla espressione [27] della matrice normale, il sistema normale alle correlate, come risulta svolgendo operazioni semplicissime, acquista l'aspetto

$$[40] \qquad \begin{Bmatrix} \left[\frac{AA}{p}\right] & \dots & \left[\frac{AQ}{p}\right] \\ \dots & \dots & \dots \\ \left[\frac{QA}{p}\right] & \dots & \left[\frac{QQ}{p}\right] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ Q_0 \end{Bmatrix} = 0 \; .$$

Determinare le K, dalla [26'], moltiplicando a sinistra per D, si ha

$$D\zeta = M_{-1} K$$

ossia

$$\begin{Bmatrix} p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \dots \\ \zeta_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 & \dots & Q_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_g & \dots & Q_g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_g \end{Bmatrix},$$

relazione che, esplicitata dà luogo alle

$$[41] \qquad p_i \zeta_i = A_i K_1 + \dots + Q_i K_g \qquad (i = 1 \dots g)$$

da cui si hanno le correzioni ζ_i cercate.

Venendo alla precisione dei risultati, poichè in questo caso è $n = g$, la [29] dà intanto, tenendo presente la [37],

$$[29'] \qquad m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p\zeta^2]}{q}}$$

Per la ricerca dei coefficienti di peso e di correlazione, conviene anzitutto moltiplicare la [34] per D, sia a destra che a sinistra. Si ha così

$$\mathrm{DBD} = \mathrm{D} - \mathrm{T} \ ,$$

ossia per le [39'], indicando al solito con $\beta_{i \cdot k}$ gli elementi di B e con $T_{i \cdot k}$ quelli di T:

$$[42] \quad \begin{Bmatrix} p_1^2 \beta_{11} & \ldots\ldots & p_1 p_g \beta_{1g} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_g p_1 \beta_{g1} & \ldots\ldots & p_g^2 \beta_{gg} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & p_g \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} T_{1 \cdot 1} & \ldots\ldots & T_{1 \cdot g} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{g \cdot 1} & \ldots\ldots & T_{g \cdot g} \end{Bmatrix}$$

dove, in base alla [32], detti $\xi_{r \cdot s}$ gli elementi della reciprocc Δ^{-1}, è

$$[42'] \quad \begin{Bmatrix} T_{1 \cdot 1} & \ldots & T_{1 \cdot g} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{g \cdot 1} & \ldots & T_{g \cdot g} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 & \ldots & Q_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_g & \ldots & Q_g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_{1 \cdot 1} & \ldots & \xi_{1 \cdot g} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{g \cdot 1} & \ldots & \xi_{g \cdot g} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 & \ldots & A_g \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_1 & \ldots & Q_g \end{Bmatrix} .$$

Determinati così i $T_{i \cdot k}$. La [42] esplicitata dà

$$[43] \quad \begin{aligned} p_i^2 \beta_{i \cdot i} &= p_i - T_{i \cdot i} \\ p_i p_h \beta_{i \cdot k} &= - T_{i \cdot k} \end{aligned} \qquad (i, k = l \ldots g) .$$

I pesi ed i coefficienti di correlazione risultano pertanto

$$P_i = \frac{1}{\beta_{i \cdot i}} = \frac{p_i}{1 - \dfrac{T_{i \cdot i}}{\beta_{i \cdot i}}} \ , \quad \sigma_{r \cdot s} = \frac{\beta_{i \cdot k}}{\sqrt{\beta_{i \cdot i} \beta_{k \cdot k}}} = \frac{- T_{i \cdot k}}{\sqrt{(p_i - T_{i \cdot i})(p_k - T_{k \cdot k})}}$$

Si possono così anche in questo caso calcolare gli errori medi delle incognite e di qualsiasi loro funzione derivabile.

8. Conclusione. – I procedimenti sopra svolti mostrano con quanta speditezza e facilità, valendosi di poche nozioni elementari il calcolo delle matrici porti a trovare risultati ed a conoscere proprietà, che con metodi classici risultano attraverso considerazioni e sviluppi assai più lunghi e prolissi.

Naturalmente, spetta poi alla Teoria degli errori dare uno svolgimento pratico alle formule, facendo in modo di trovare per il calcolo numerico adeguati algoritmi. La parte concettuale, invece, si può lasciare, di massima, al calcolo delle matrici, che colla chiarezza derivante dalla sua coincisione, si dimostra un prezioso strumento anche per altre ricerche in questo campo.

BIBLIOGRAFIA

CHERUBINO S. *Geometria analitca.* Milano 1940.

FRAZER R. A., DUNCAN W. I., COLLAR A. R., *Elementary Matrices.* Cambridge 1938.

MARUSSI A., *Ricerca dei coefficienti di correlazione*, ecc. «Riv. Catasto e S. S. T. T. E. E.», n. 4, 1941.

MARCANTONI A., *Sul significato dei coefficienti*, ecc. « Rivista Catasto e S. S. T. T. E. E. », n. 4, 1940; *Pesi e correlazioni*, ecc. « Acc. d'Italia Rend. Fis. », fasc. 1, vol. III, 1941, e « Ist. Lombardo Rend. Scienze », vol. LXXV, fasc. 1, 1941-42.

JENSEN H., *Herleitung einiger Ergebnisse der Ausgleichrechnung mit Hilfe von Matrizen.* « Ist. Geod. Copenaghen », n. 13. 1939.

JORDAN W., *Aandbuch der Vermessungskunde*, Bd. I. Stuttgart 1935.

PIZZETTI P., *Geodesia teoretica.* Bologna, 1928.