

SULL'ANDAMENTO DELLA TENSIONE IN UNA  
CINGHIA DI TRASMISSIONE TENUTO CONTO  
DELLA DIPENDENZA DEL COEFFICIENTE  
D'ATTRITO DALLA VELOCITÀ<sup>(\*)</sup>

E. PISTOLESI  
*Accademico Pontificio*

**SVMMARIVM.** — Determinat Auctor qua lege mutetur tensio cinguli transmissionis in arcu qui circa trochleam versatur, rationem habens relationis inter coefficientem attritus et velocitatem relativam (quae relatio lege, cuius specimen est  $f = av^n$ , exprimitur), et deducens ea quae ex huiusmodi investigationibus consequuntur.

Nella trattazione ordinaria del problema delle tensioni nelle cinghie di trasmissione si suppone un coefficiente d'attrito  $f$  costante. In realtà l'esperienza dimostra che il coefficiente d'attrito  $f$  è funzione crescente della velocità relativa  $v$  fra la cinghia e la fascia della puleggia (salvo che in un brevissimo tratto nell'intorno di  $v = 0$ ) con una legge che si può in molti casi mettere per approssimazione nella forma:

$$[1] \qquad f = av^n \qquad (n < 1).$$

Consideriamo dapprima il caso della puleggia condotta.

Se indichiamo con  $T$  la tensione generica, con  $T_0$  la tensione nel ramo meno teso, che si avvolge sulla puleggia, con  $u$  la velocità della

---

(\*) Nota presentata l'8 marzo 1946.

cinghia, con  $v_0$  la velocità di scorrimento fra cinghia e puleggia nel punto in cui la cinghia si avvolge sulla puleggia (velocità di scorrimento iniziale) e si considera la cinghia come un solido elastico, si ha nel punto generico dell'arco abbracciato dalla cinghia una velocità di scorrimento:

$$v = \frac{T - T_0}{ES} u + v_0$$

e quindi:

$$f = a \left( \frac{T - T_0}{ES} u + v_0 \right)^n$$

Introducendo la tensione efficace

$$T^v = T - \frac{g}{g} v^2$$

dove  $g$  indica il peso per unità di lunghezza della cinghia, si ha poi la nota equazione

$$d\varphi = \frac{dT^v}{f T^v}$$

e quindi:

$$d\varphi = \frac{dT^v}{T^v a \left( \frac{T^v - T_0'}{ES} u + v_0 \right)^n}.$$

Abolendo per semplicità l'apice, con che  $T$  indicherà d'ora innanzi la *tensione efficace*, e ponendo  $T_0 - ES \frac{v_0}{u} = T_i$ , si può scrivere:

$$d\varphi = \frac{dT}{a T \left( \frac{T - T_i}{ES} u \right)^n} = \frac{d\tau}{A \tau (\tau - 1)^n}$$

avendo posto:

$$\tau = \frac{T}{T_i}, \quad A = a \left( \frac{T_i u}{ES} \right)^n = a \left( \frac{T_0 u}{ES} - v_0 \right)^n$$

e quindi:

$$[2] \quad \varphi = \frac{1}{A} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau(\tau-1)^n}$$

dove il limite inferiore  $\tau_0 = \frac{T_0}{T_i}$  è l'unità se  $v_0 = 0$ , mentre è  $> 1$  se  $v_0 > 0$ . Se poniamo:

$$F(\tau) = \int_1^{\tau} \frac{d\tau}{\tau(\tau-1)^n}$$

si avrà

$$\varphi = \frac{1}{A} \left\{ F(\tau) - F(\tau_0) \right\}.$$

La funzione  $F(\tau)$  si può calcolare in via grafica o numerica. Per il caso particolare, desunto dalla fig. 7 del trattatello di W. VELISCH: *Der Treibriemen*, per il quale caso  $a = 0,8$  ed  $n = 0,23$  (velocità espressa in metri), si ha per  $F(\tau)$  il diagramma riportato in figura.

Il valore di  $A$  si può porre nella forma:

$$A = a \left( \frac{T_0 u}{ES} \right)^n \cdot \frac{1}{\tau_0^n}$$

con

$$\tau_0 = \frac{1}{1 - \frac{ES}{T_0} \cdot \frac{v_0}{u}};$$

perciò:

$$[3] \quad \varphi = \frac{\tau_0^n}{a \left( \frac{T_0 u}{ES} \right)^n} \left\{ F(\tau) - F(\tau_0) \right\}.$$

Nel caso in cui *non* vi sia scorrimento iniziale ( $v_0 = 0$ ) si ha più semplicemente:

$$[4] \quad \varphi = \frac{F\left(\frac{T}{T_0}\right)}{a \left( \frac{T_0 u}{ES} \right)^n}$$

e per  $T = T_1$  (tensione nel ramo più teso):

$$[5] \quad \varphi_1 = \frac{F\left(\frac{T_1}{T_0}\right)}{a\left(\frac{T_0 u}{ES}\right)^n}.$$

Nel caso che l'angolo  $\varphi_1$  risultante dalla [5] sia maggiore dell'angolo  $\theta$  abbracciato dal cingolo, interviene lo scorrimento iniziale  $v_0$ , da cui dipende  $\tau_0$ ; e poichè  $\frac{\tau_1}{\tau_0}$  è costante ed uguale a  $\frac{T_1}{T_0}$ ,  $\varphi_1$ , calcolato mediante la [3] col porre

$$\tau = \tau_1 = \tau_0 \frac{T_1}{T_0}$$

diviene una funzione di  $\tau_0$ ; funzione decrescente fino ad un minimo a cui tende asintoticamente per  $\tau_0$  tendente all'infinito, come risulta dall'andamento della funzione

$$[6] \quad \tau_0^n \left\{ F\left(\tau_0 \frac{T_1}{T_0}\right) - F(\tau) \right\}$$

(vedasi figura per i casi  $\frac{T_1}{T_0} = 1,3; 1,5; 2$ ). Si può anzi calcolare il valore asintotico della funzione [6], che si presenta sotto la forma  $\infty \cdot 0$ , e si trova (applicando la regola di De l'Hôpital dopo avere posto  $\tau_0^{-n}$  a denominatore):

$$[7] \quad \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} a\left(\frac{T_0 u}{ES}\right)^n \varphi_1 = \frac{1}{n} \left\{ 1 - \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^n \right\}.$$

Giova osservare che  $\tau_0$  diviene infinito per  $T_1 = 0$ , ossia per

$$[8] \quad v_0 = \frac{T_0 u}{ES}$$

e poichè  $\frac{T_0}{ES}$  è dell'ordine di  $\frac{1}{100}$ , si vede che lo slittamento iniziale possibile per  $T_1 > 0$  è una piccola frazione della velocità gene-

rale del cingolo,  $u$ . L'abbassamento nel valore di  $\varphi_1$  che essa può produrre si desume confrontando l'espressione al secondo membro della [7] con  $F\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$ . Si ha:

$\frac{T_1}{T_0}$	1,2	1,5	2
$F\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$	0,3450	0,6326	0,9428
$\frac{1}{n} \left\{ 1 - \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^n \right\}$	0,177	0,387	0,637

Si vede così che la riduzione nell'angolo  $\varphi_1$ , che è del 49% per  $\frac{T_1}{T_0} = 1,2$ , si riduce al 33% per  $\frac{T_1}{T_0} = 2$ , cioè l'effetto percentuale di uno slittamento iniziale è tanto più sentito quanto più piccolo è il rapporto  $\frac{T_1}{T_0}$ , vale a dire quanto più alte sono le tensioni  $T_1$  e  $T_0$  rispetto alla loro differenza  $Q$ , che è la forza periferica da trasmettere <sup>(1)</sup>.

Ma  $v_0$  può superare il valore dato dalla [8]. In tal caso  $T_i$  diviene negativa e l'integrale [2] non può calcolarsi. Occorre allora porre  $T'_i = -T_i = ES \frac{v_0}{u} - T_0$  e  $\tau = \frac{T}{T'_i}$ . Segue ancora la [3] in cui peraltro

$$F(\tau) = \int \frac{d\tau}{\tau(\tau+1)^n}.$$

<sup>(1)</sup> Si può mettere la  $Q$  in evidenza scrivendo la [5] sotto la forma:

$$[I] \quad \varphi_1 = \frac{F\left(1 + \frac{Q}{T_0}\right) \cdot \left(\frac{Q}{T_0}\right)^n}{a \left(\frac{Qu}{ES}\right)^n}$$

e la [3] sotto la forma:

$$[II] \quad \varphi_1 = \frac{\left(\frac{Q}{T_0}\right)^n}{a \left(\frac{Qu}{ES}\right)^n} \cdot \tau_0^n \left\{ F\left[\tau_0\left(1 + \frac{Q}{T_0}\right)\right] - F(\tau_0) \right\}.$$

Quando  $v_0$  è molto grande, e quindi  $\tau$  molto piccolo,  $\tau$  si può trascurare di fronte all'unità e allora si ha semplicemente:

$$\varphi_1 \cong \frac{1}{av_0^n} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

formula che è quella medesima che vale per coefficiente d'attrito costante e uguale a quello che compete allo slittamento iniziale  $v_0$ , di fronte al quale risulta trascurabile lo slittamento elastico. Naturalmente  $v_0$  non può superare  $u$ . Tuttociò ha valore puramente teorico, in quanto supporre che la legge  $f = av^n$  valga anche per valori molto elevati di  $v$ , mentre essa vale essenzialmente per piccoli valori.

La [5] è molto istruttiva, in quanto mette in evidenza sia l'influsso di  $T_0$  (aumentando  $T_0$  il denominatore della [5] aumenta, mentre il numeratore diminuisce, perchè  $\frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{Q}{T_0}$ ; vedasi anche la formula [I] della nota alla precedente pagina), sia quello della velocità  $u$  del cingolo (aumentando  $u$  diminuisce  $\varphi_1$ ), sia quello della rigidezza a trazione ES della cinghia (aumentando la rigidezza aumenta l'angolo  $\varphi_1$  necessario alla trasmissione; per  $ES \rightarrow \infty$  il coefficiente d'attrito diventa quello che compete allo slittamento iniziale  $v_0$ ). Per quanto riguarda l'influsso della velocità si ha dalla [5] la giustificazione più plausibile della nota regola pratica che le cinghie veloci possono trasmettere con un medesimo angolo di avvolgimento forze periferiche maggiori delle cinghie lente<sup>(1)</sup>, ciò che trova la sua ragione nel fatto che la velocità di scorrimento è proporzionale alla  $u$ , e quindi un aumento di questa porta ad un aumento del coefficiente di attrito. Al quale proposito è peraltro da osservare che tale influsso risulterà in effetti meno sentito di quanto risulterebbe dalle formule, in quanto, all'aumentare della velocità, diminuisce il tempo concesso alle deformazioni e da ciò, data la natura delle cinghie e il loro modo di deformarsi progressivamente nel tempo, deriva una diminuzione delle deformazioni stesse, ossia un aumento virtuale del modulo elastico E.

(1) Dato  $T_1$ , scelto in relazione alla resistenza del cingolo, e fermo restando  $\varphi_1$ , un aumento di  $u$  porta ad una diminuzione di  $T_0$  e quindi ad un aumento della forza periferica  $Q$ .

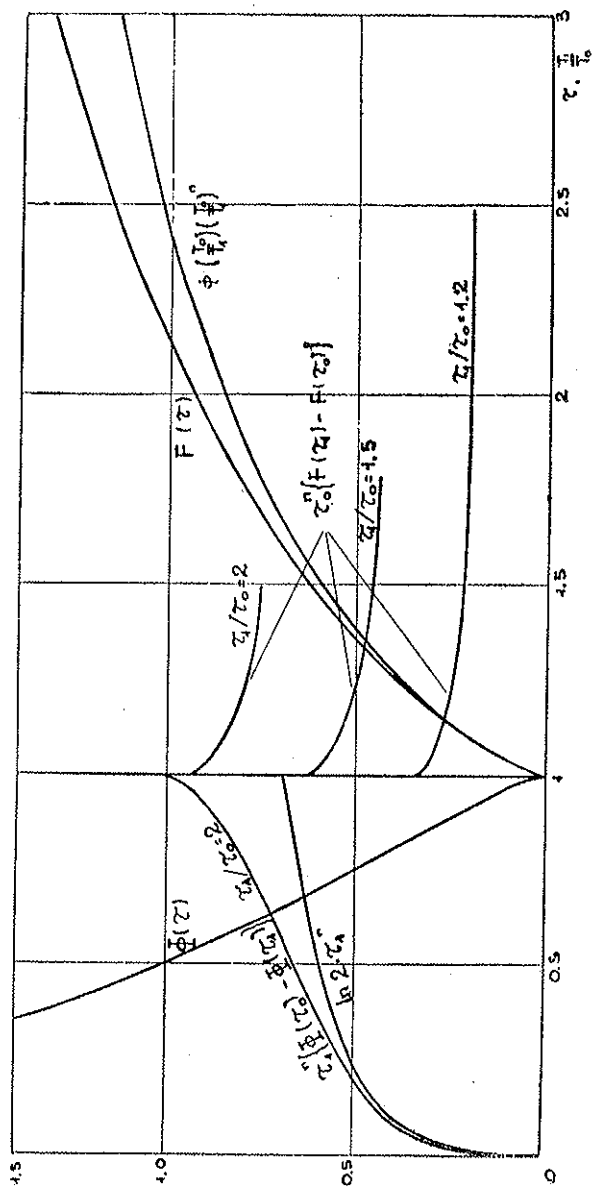


FIG. 1.

Per la puleggia conduttrice si hanno naturalmente formule analoghe:

$$f = a \left( \frac{T_i - T}{ES} u + v_i \right)^n$$

da cui, posto:

$$T_i + ES \frac{v_i}{u} = T_j$$

$$\tau = \frac{T}{T_j}$$

$$B = a \left( \frac{T_j u}{ES} \right)^n = a \left( \frac{T_i u}{ES} + v_i \right)^n$$

segue:

$$\varphi = -\frac{1}{B} \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^n} = \frac{1}{B} \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^n} \quad (\tau < 1)$$

Posto:

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^n}$$

si ha quindi:

$$\varphi = \frac{1}{B} \left\{ \Phi(\tau) - \Phi(\tau_1) \right\}$$

con:

$$\tau_1 = \frac{1}{1 + \frac{ES}{T_i} \cdot \frac{v_i}{u}} \quad ; \quad B = a \left( \frac{T_i u}{ES} \right)^n \cdot \frac{1}{\tau_1^n}$$

e quindi:

$$[9] \quad \varphi = \frac{\tau_1^n}{a \left( \frac{T_i u}{ES} \right)^n} \left\{ \Phi(\tau) - \Phi(\tau_1) \right\}.$$

In assenza di scorrimento iniziale ( $v_i = 0$ )

$$[10] \quad \varphi = \frac{\Phi\left(\frac{T}{T_i}\right)}{a \left( \frac{T_i u}{ES} \right)^n}$$



e per  $T = T_0$ :

$$[11] \quad \varphi_0 = \frac{\Phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}{a\left(\frac{T_1 u}{ES}\right)^n}.$$

È interessante notare che, contrariamente a quanto si verifica nella trattazione ordinaria, non è  $\varphi_1 = \varphi_0$ , cioè gli archi attivi sulle due pulegge, condotta e conduttrice, non sono uguali.

Ciò si constata ponendo:

$$\varphi_0 = \frac{\Phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}{a\left(\frac{T_0}{ES}\right)^n} \cdot \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^n$$

Pertanto il confronto va effettuato fra  $F\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$  e  $\Phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^n$ . Vedasi in figura l'andamento della funzione  $\Phi(\tau_0)$ , essendo qui  $\tau_0 = \frac{T_0}{T_1}$  ( $= \frac{T_0}{T_1}$  in assenza di scorrimento iniziale), come pure l'andamento di  $\Phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right) \cdot \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^n$  in funzione di  $\frac{T_1}{T_0}$ . Si vede dal confronto con la  $F\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$ , che  $\varphi_0$  è sempre minore di  $\varphi_1$  e la differenza è tanto maggiore quanto più elevato è il rapporto  $\frac{T_1}{T_0}$ .

Se ne deduce che uno slittamento iniziale si verificherà prima sulla puleggia condotta che su quella conduttrice, se l'angolo abbracciato dal cingolo è uguale sulle due pulegge.

Occorre ora vedere l'effetto di uno slittamento iniziale sulla puleggia conduttrice. A questo serve la [9]. Occorre cioè investigare l'andamento della funzione

$$[12] \quad \tau_1^n \left\{ \Phi\left(\tau_1 \frac{T_0}{T_1}\right) - \Phi(\tau_1) \right\}$$

in funzione di  $\tau_1$ . Si veda in figura l'andamento della [11] per  $\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{2}$ . Essa è funzione decrescente al decrescere di  $\tau_1$  e tende a zero per  $\tau_1$

tendente a zero. È anzi facile vedere che per  $\tau_1$  molto piccolo  $\Phi(\tau_1)$  tende a  $-\ln \tau_1$  e quindi l'espressione [12] a  $\ln \frac{T_1}{T_0} \cdot \tau_1^n$ , e quindi

$$\varphi_0 \cong \frac{1}{av_1^n} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

come nel caso della puleggia condotta, valendo anche in questo caso l'osservazione che il coefficiente d'attrito può considerarsi costante e uguale a quello che compete alla velocità  $v_0$ , di fronte alla quale può trascurarsi la velocità addizionale derivante dallo slittamento elastico.

Tanto per la puleggia condotta quanto per la puleggia conduttrice lo slittamento iniziale può assumere qualunque valore, da 0 al massimo  $u$  (puleggia ferma nel caso della puleggia condotta, cinghia ferma nel caso della puleggia conduttrice). Se chiamiamo *slittamento globale* quello che interviene quando la cinghia non può trasmettere la forza periferica richiesta, si può dire che si ha slittamento globale quando l'angolo  $\theta$  abbracciato dal cingolo è inferiore al minimo di  $\varphi_1$  o di  $\varphi_0$  che si ottiene dando a  $v_0$  il suo massimo possibile valore  $u$ . Quando invece la trasmissione è possibile, sia pure con forte perdita di velocità, ossia  $v_0 < u$ , si ha *slittamento iniziale*. Peraltro, come già si è osservato, queste conclusioni hanno carattere puramente teorico, giacchè la legge di variazione di  $f$  con la velocità non può essere estesa agli alti valori di questa, talchè in pratica si raggiunge presto per  $f$  un massimo al quale compete pure la massima coppia trasmissibile. Se la coppia da trasmettere è superiore a questa, interviene lo slittamento globale.

A conclusione delle precedenti considerazioni, notiamo che non sempre sarà possibile porre la legge di dipendenza fra coefficiente d'attrito e velocità di scorrimento sotto la forma [1]. Tuttavia i risultati trovati conservano in ogni caso dal punto di vista qualitativo il loro valore, il quale deriva dall'essere il coefficiente d'attrito  $f$  crescente con la velocità di scorrimento.