PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 28
pag. 321-338

A PROPOSITO DI UN TEOREMA DI TERASAKA (*)

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

SVMMARIVM. — Ostendit Auctor secundum TERASAKA quadrata critica quae attinent ad planum autohomeomorphismum t, qui indicatricem retineat et unitis punctis careat (id est quadrata quae suam imaginem, cum t mutatur, tangunt), si in certa plani regione, libere definita, contineantur, in finitum classium numerum distribui; quae classes singulae singulis elementis constare putari possunt, si respiciamus theorema terasakianum, quo ad quadrata critica extenditur theorema v. KERÉKJÁRTÓ, quod est de segmentis vel radiis praecipuis segmenti translationis autohomeomorphismi t.

I segmenti di traslazione di un autoomeomorfismo piano t, privo di punti uniti e conservante l'indicatrice, contenuti in un segmento, costituiscono con un insieme chiuso. Questa è la sostanza di un mio lemma (¹), dal quale segue (²) che i segmenti di traslazione, contenuti in un segmento dato, si possono distribuire in un numero finito di classi, in guisa che tutti gli elementi della stessa classe abbiano comuni due punti fissi, fondamentali uno per uno e l'altro per l'altro dei due campi adiacenti alla traiettoria generata dall'elemento corrente

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 27 luglio 1947.

(¹) G. SCORZA DRAGONI, *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane.* [« Memorie della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IV (1933), pagg. 159-212], n. 12.

(²) *Loc. cit.*, § 11.

Per la terminologia rimando alla Memoria citata in (¹), oppure a:

G. SCORZA DRAGONI, *Una estensione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré* [ibidem, vol. IV (1933), pagg. 213-269]; la lettura del § 2 di questa seconda Memoria è più che sufficiente.

di quella classe; segue, cioè (3), che i segmenti di traslazione contenuti in un segmento dato si possono suddividere in un numero finito di classi, ciascuna delle quali si comporti come costituita da un solo elemento nei riguardi del teorema di v. Kerékjártó sull'esistenza dei raggi e dei segmenti fondamentali (4), nel senso che tutti gli elementi di quella classe hanno comuni o due segmenti o due raggi, o un segmento e un raggio, fondamentali per essi relativamente uno ad uno e l'altro all'altro dei due campi adiacenti alle singole traiettorie generate dai singoli elementi di quella classe.

Orbene, Terasaka ha dimostrato (5) pei quadrati critici della trasformazione t, cioè per quei quadrati del piano che toccano la propria immagine nella t, un teorema analogo a quello di v. Kerékjártó, ricordato in (4), circa l'esistenza di segmenti o raggi fondamentali per un segmento di traslazione. Inoltre è evidente che i quadrati critici del piano costituiscono un insieme chiuso, rispetto ed una conveniente nozione di distanza. Sicchè è naturale domandarsi se per i quadrati critici contenuti, per esempio, in un rettangolo è ancora possibile una suddivisione in un numero finito di classi, ciascuna delle quali si comporti come se fosse costituita da un solo elemento.

In questa Nota preciserò la domanda e le darò una risposta affermativa.

Sicchè la questione, che posi altrove (6) per i segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo e paralleli ad una direzione fissa, ha una risposta favorevole (e giustificabile in modo abbastanza rapido), se trasportata ai quadrati critici di Terasaka.

Circa la quale questione, nella sua forma originale, desidero far rilevare che credo di avere ormai fornito i mezzi per risolverla con

---

(3) Si avverta che qui chiamo raggio fondamentale, quello che nelle Memorie citate in (1), in (2) e nella successiva (6) dicevo semiretta fondamentale.

(4) B. v. Kerékjártó, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré* [« Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae », tomo IV (1938), pagg. 86-102], pagg. 94-96. Ma si veda anche *loc. cit.* (1), nn. 28 e 29.

(5) H. Terasaka, *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes* [« Japanese Journal of Mathematics », vol. VII (1930), pagg. 61-69], pag. 66, teorema II.

(6) G. Scorza Dragoni, *Sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano e sulle loro curve di accumulazione* [« Memorie della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1937), pagg. 1-75].

la Memoria citata in (6) e con una Nota recente (7); e che ritengo che essa possa esser risolta in senso favorevole, anche se posta per *tutti* i segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo dato (8). Non entro qui in dettagli ulteriori; mi limito ad accennare, cfr. la successiva nota (24), che la questione va precisata in modo analogo a quello qui seguito nei §§ 4 e 5, estendendo cioè le nozioni di segmento e raggio fondamentale (*).

§ 1. – PRELIMINARI

1. – Nel piano (reale euclideo) ambiente sia data una trasformazione topologica t, che conservi il senso delle rotazioni e sia priva di punti uniti.

Secondo TERASAKA, *loc. cit.* (5), pag. 61, un insieme chiuso E del piano (in particolare un dominio) è un insieme (un dominio) *critico*, rispetto a t, se E e la sua immagine t(E) nella t hanno punti comuni, e questi apppartengono tutti e alla frontiera di E e a quella di t(E).

In particolare il quadrato Γ, di contorno γ, è un quadrato critico, se e $\Gamma \cdot t(\Gamma) \neq 0$ e $\Gamma \cdot t(\Gamma) = \gamma \cdot t(\gamma)$. Per il che occorre e basta che l'intersezione $\Gamma \cdot t(\Gamma)$ sia diversa da zero ed appartenga a γ.

2. – Orientiamo il piano, cioè fissiamo un vero positivo delle rotazioni.

Sia Γ un quadrato critico, di contorno γ.

(7) G. SCORZA DRAGONI, *Estensioni alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo piano* [« Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei », serie 8, vol. I (1946), pagg. 156-161].

(8) La questione cui si allude nel testo può essere risoluta anche coi teoremi contenuti in questa Nota e nell'altra mia *A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni* [« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », seria 8, vol. I (1947), pagg. 697-704]; però nella soluzione che si ottiene per questa via bisogna sostituire i segmenti e i raggi fondamentali con delle opportune spezzate, analogamente a quanto ho fatto nella Nota or ora citata.

(*) La questione cui si allude nel testo è completamente risoluta, nel senso affermativo, in una mia memoria in corso di stampa presso gli « Annali dell'Università di Trieste » [nota aggiunta sulle bozze].

Allora, per definizione, i punti di Γ sono non interni a $t(\Gamma)$.

Se $\Gamma \cdot t(\Gamma)$ si riduce a un solo punto K, cioe se $\gamma \cdot t(\Gamma) = K$, $\gamma - K$ è tutto esterno a $t(\Gamma)$. Il punto K^{-1} appartiene anch'esso a γ e, insieme con K, divide γ in due archi, che sono i due soli archi di traslazione contenuti in γ. Diremo *primo* quello di questi due archi che si percorre per primo, quando ci si sposti su γ nel verso positivo a partire da K^{-1}; *secondo* l'altro; *speciali* entrambi.

Se $\Gamma \cdot t(\Gamma) = \gamma \cdot t(\gamma)$ non si riduce a un solo punto, γ contiene (9) un arco ed uno solo, che abbia gli estremi (distinti) su $t(\gamma)$, i cui punti diversi dagli estremi siano esterni a $t(\Gamma)$ e possano esser congiunti con l'infinito senza incontrare ulteriormente $\gamma \dot{+} t(\gamma)$. Siano A e B gli estremi di questo arco; sia μ l'altro arco di γ, avente gli stessi estremi. Ogni punto di μ, diverso da A e B, è separato dall'infinito mediante $\gamma \dot{+} t(\gamma)$ (10).

I punti $t^{-1}(A)$ e $t^{-1}(B)$ appartengono a γ, anzi $\gamma - \mu$ (11). Inoltre è lecito supporre di avere scelti i simboli in modo che, se si percorre γ nel verso positivo a partire da $t^{-1}(A)$, i punti $t^{-1}(A)$, A, B, $t^{-1}(B)$ si incontrino nell'ordine scritto.

---

(9) Per le affermazioni di questo numero si veda *loc. cit.* (5), pag. 64.

(10) Per queste affermazioni si veda anche: M. VOLPATO, *Sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazione topologiche del cerchio* [« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », serie 8, vol. I (1946), pagg. 704-709].

(11) Questa circostanza si può dimostrare anche nel modo che segue.

Rammentiamo che, secondo un teorema di BROUWER [*Ein Beweis des ebenen Translationssatzes*, « Mathematische Annalen », vol. 72 (1912), pagg. 37-54, teorema 8]:

1) *se* P *è un punto del piano, la successione* P, $t(P)$, $t^{-1}(P)$, $t^2(P)$, $t^{-2}(P)$, ... *è divergente.*

Ciò premesso, facciamo vedere che $t^{-1}(A)$ e $t^{-1}(B)$ non possono essere interni a μ. Infatti, i punti interni a μ sono separati dall'infinito mediante $\gamma \dot{+} t(\gamma)$. Quindi, se $t^{-1}(A)$ fosse, p. es., interno a μ, $t^{-1}(\gamma)$ conterrebbe punti separati dall'infinito mediante $\gamma \dot{+} t(\gamma)$. D'altra parte $t^{-1}(\gamma)$ non può *tagliare* γ, perchè Γ è un quadrato critico; inoltre $t^{-1}(\gamma)$ non può *incontrare* $t(\gamma)$, sempre perchè γ è un quadrato critico — cfr. *loc. cit.* nota (5), pag. 63, teorema I —; quindi $t^{-1}(\gamma)$ sarebbe separata dall'infinito mediante $\gamma \dot{+} t(\gamma)$. E lo stesso accadrebbe allora anche per $t^{-2}(\gamma)$, $t^{-3}(\gamma)$, ..., che non incontrano nemmeno loro nè γ, nè $t(\gamma)$ — cfr. *loc. cit.* (5), pag. 63. E ci si troverebbe in contraddizione con la proposizione 1) di questa nota (11). Inoltre, dalla $t(\gamma) \cdot t^{-1}(\gamma) = 0$ segue subito che $t^{-1}(A)$ e $t^{-1}(B)$ non possono essere estremi di μ [e la cosa si potrebbe anche escludere in altri modi più diretti]. Donde la conclusione.

L'arco α di γ, di estremi $t^{-1}(A)$ ed A, non contenente B, è allora perfettamente individuato ed è un arco di traslazione. Esso è il *primo arco speciale* di γ. Il *secondo arco speciale* di γ è l'arco β di γ di estremi $t^{-1}(B)$ e B e non contenente A; anche questo secondo arco speciale è un arco di traslazione. Denoti ν l'arco di γ, di estremi $t^{-1}(A)$ e $t^{-1}(B)$, che non contiene μ.

I punti interni di ν sono i punti di γ separati dall'infinito mediante $t^{-1}(\gamma)\dotplus\gamma$. Infatti ν nella t^{-1} ha per γ e $t^{-1}(\gamma)$ l'ufficio, che μ ha per γ e $t(\gamma)$ nella t [12].

3. – Introduciamo una metrica nella totalità dei quadrati del piano.

Fissiamo allo scopo un sistema di assi cartesiani ortogonali x e y e, dato un quadrato, conduciamo per il centro di questo due assi ξ ed η, rispettivamente equiversi agli assi x e y; assumiamo ξ e η come nuovi assi cartesiani; diciamo primo, il vertice di quel quadrato che appartiene all'insieme $\xi>0$, $\eta\geqslant 0$, secondo quello che appartiene all'insieme $\xi\leqslant 0$, $\eta>0$, terzo quello che appartiene all'insieme $\xi<0$, $\eta\leqslant 0$, quarto quello che appartiene all'insieme $\xi\geqslant 0$, $\eta<0$.

Ciò premesso, siano Γ_1 e Γ_2 due quadrati del piano. Facciamone ruotare uno attorno al proprio centro di un angolo χ, in maniera che a rotazione eseguita i suoi lati siano ordinatamente paralleli a quelli dell'altro. La misura in radianti ω di χ è perfettamente individuata in modulo, se le si impone la condizione $0\leqslant|\omega|\leqslant\frac{\pi}{4}$. Dopo si calcolino le distanze δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 dei primi, dei secondi, dei terzi, dei quarti vertici del quadrato rimasto fermo e di quello ottenuto mediante la rotazione. La somma $|\omega|+\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4$ è la *distanza* $\overline{\Gamma_1\Gamma_2}$ di Γ_1 e Γ_2.

È evidente che questa nozione di distanza verifica la $\overline{\Gamma_1\Gamma_2}=0$, se, e soltanto se, $\Gamma_1=\Gamma_2$; è indipendente dell'ordine con cui si considerano Γ_1 e Γ_2; soddisfa alla solita relazione triangolare.

4. – Siano Q_0 e Q_1 due quadrati critici del piano (relativi a t), fisso il primo, variabile il secondo.

---

[12] Si rammenti che anche t^{-1} è un autoomeomorfismo piano, che conserva l'indicatrice e non ammette punti invarianti.

Se $i = 0$, oppure $i = 1$, denotiamo con:

q_i il contorno di Q_i;

con

c_i e d_i il primo e il secondo arco speciale di q_i, di estremi rispettivi $t^{-1}(C_i)$, C_i e $t^{-1}(D_i)$, D_i;

e con:

m_i l'arco di q_i di estremi C_i e D_i, che non contiene $t^{-1}(C_i)$ e $t^{-1}(D_i)$, ed n_i l'arco di q_i di estremi $t^{-1}(C_i)$ e $t^{-1}(D_i)$, che non contiene C_i e D_i.

Si noti che non si è escluso che possa essere $C_i = D_i$.

5. – Supponiamo ora che sia $C_0 = D_0$. Allora, in conformità di quanto si è fatto nel n. 2, indichiamo con una lettera diversa, per esempio H_0, il punto C_0.

Indi è chiaro che:

In queste ipotesi, se la distanza $\overline{Q_0 Q_1}$ è minore di un conveniente numero positivo, tutti i punti comuni a Q_1 e $t(Q_1)$ [a Q_1 e $t^{-1}(Q_1)$] sono contenuti in un intorno prefissato di H_0 [di $t^{-1}(H_0)$];

cioè, che;

In queste ipotesi, prefissato un numero positivo ε, esiste un δ positivo, in maniera tale, che dalla $\overline{Q_0 Q_1} < \delta$ seguano le $\overline{C_1 H_0} < \varepsilon$, $\overline{D_1 H_0} < \varepsilon$, $\overline{t^{-1}(C_1)\, t^{-1}(H_0)} < \varepsilon$, $\overline{t^{-1}(D_1)\, t^{-1}(H_0)} < \varepsilon$ e l'appartenenza di c_i e d_i rispettivamente agli ε — intorni di c_0 e d_0.

– vale a dire, agli insiemi dei punti (del piano) che hanno una distanza minore di ε rispettivamente da c_0 e d_0 –.

In particolare, se P_0 è un punto interno al primo [al secondo] arco speciale di q_0 e se ρ e δ sono positivi e abbastanza piccoli, da $\overline{Q_0 Q_1} < \delta$ segue che gli eventuali punti di q_1 aventi da P_0 una distanza minore di ρ, sono interni al primo [al secondo] arco speciale di q_1:

6. – Quest'ultimo risultato sussiste tal quale, anche se $C_0 \neq D_0$.

Infatti, gli eventuali punti interni a m_1 [ad n_1] sono separati dall'infinito mediante $q_1 + t(q_1)$ [mediante $t^{-1}(q_1) + q_1$]; quindi, se l'affermazione fatta non fosse verificata, il punto P_0 sarebbe o separato dall'infinito mediante $q_0 + t(q_0)$ [mediante $t^{-1}(q_0) + q_0$] o contenuto in $t(q_0)$ [in $t^{-1}(q_0)$]; e tutto ciò contraddirebbe l'ipotesi fatta su P_0.

Di qui e del teorema di PINCHERLE-BOREL è facile dedurre che:

Se l_0 è un arco interno a c_0 [a d_0], estremi inclusi, e se δ è abba-abbastanza piccolo, l_0 ha una distanza positiva dagli insiemi descritti da m_1 e n_1 sotto la condizione $\overline{Q_1 Q_0} < \delta$. Naturalmente questo vale, sia se è $C_0 = D_0$, che se è $C_0 \neq D_0$.

§ 2. – ALTRE PROPOSIZIONI PRELIMINARI

7. – Riprendiamo i simboli e le ipotesi del n. 2.

Consideriamo cioè di nuovo il quadrato critico Γ e gli archi speciali α e β sul contorno γ di Γ. E $\sigma(\alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu t^\nu(\alpha)$, $\sigma(\beta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu t^\nu(\beta)$ siano le traiettorie generate da α e β.

In conformità di ciò, *se Γ è un quadrato critico, porremo*

$$\sigma(\Gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu t^\nu(\Gamma) .$$

Allora $t(\alpha)$ e $t^{-1}(\alpha)$, $t(\beta)$ e $t^{-1}(\beta)$ hanno soltanto un estremo su γ e, tolto questo, sono esterni a Γ. Inoltre una curva semplice e aperta, il cui interno sia interno a Γ, non può tagliare la propria immagine.

Di qui e da un noto teorema di BROUWER ([13]) si deduce facilmente che è $\Gamma \cdot \sigma(\alpha) = \alpha$; cioè che i punti di $\Gamma - \alpha$ giacciono tutti dalla stessa banda di $\sigma(\alpha)$, o, in altri termini, che tutti i punti di $\Gamma - \alpha$ appartengono allo stesso campo adiacente a $\sigma(\alpha)$ ([14]). Diciamo $\Sigma(\alpha)$

([13]) Precisamente da questo:

Una linea semplice e aperta ρ taglia la propria immagine nella t, se i suoi estremi possono essere pensati come estremi di un arco di traiettoria, il quale contenga nell'interno un arco di traslazione e formi con ρ una curva semplice e chiusa;

per il quale teorema si veda BROUWER, *loc. cit.* ([11]), pag. 44; v. KERÉKJÁRTÓ, *loc. cit.* ([4]), pag. 92; G. SCORZA DRAGONI, *Criteri per l'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [« Annali di Matematica pura ed applicata », in corso di stampa], § 6.

([14]) Quest'ultima circostanza segue da alcuni teoremi di BROUWER; p. es. si vedano gli ultimi quattro teoremi a pag. 167 della Memoria citata in ([1]). Per maggiore chiarezza del testo, conviene anche rammentare esplicitamente che

1) *una traiettoria è una linea semplice*;

e che

2) *una traiettoria non può riavvicinarsi indefinitamente ad una posizione per la quale sia già passata*;

a norma di altri due teoremi di BROUWER [cfr. *loc. cit.* ([11]), teoremi 1 e 3].

il campo adiacente a $\sigma(\alpha)$, situato dalla banda opposta di $\Gamma - \alpha$ rispetto a $\sigma(\alpha)$; cioè, non contenente nessun punto di Γ e (quindi) di $\sigma(\Gamma)$ - si rammenti che $\Sigma(\alpha)$, per definizione, è aperto e quindi non contiene nemmeno punti di $\sigma(\alpha)$ -.

Allo stesso modo si riconosce che uno, ed uno solo, $\Sigma(\beta)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\beta)$ non contiene nessun punto di $\sigma(\Gamma)$, mentre l'altro contiene tutti i punti di $\sigma(\Gamma) - \sigma(\beta)$.

Diremo che $\Sigma(\alpha)$ e $\Sigma(\beta)$ sono rispettivamente il *primo* e il *secondo campo adiacente a* $\sigma(\Gamma)$.

8. - Consideriamo ora un quadrato critico Q_0 fisso ed uno variabile Q_1, analogamente a quanto abbiamo fatto nei nn. 4, 5 e 6. E riprendiamo i simboli là introdotti.

Se $\overline{Q_0 Q_1} < \delta$, con δ positivo e convenientemente piccolo, il centro Z_1 di Q_1 è interno a quei campi adiacenti alle traiettorie $\sigma(c_0)$ e $\sigma(d_0)$, generate rispettivamente da c_0 e d_0, che contengono il centro Z_0 di Q_0.

Inoltre, a norma di quanto si è detto alla fine del n. 6, *e sempre se riesce* $\overline{Q_0 Q_1} < \delta$, *con* δ *positivo e conveniente, una semiretta* r *prefissata, con l'origine in* Z_0, *che incontri* c_0 [*o* d_0] *in un punto interno* P_0, *incontra* q_1 *in un punto* P_1 *interno o a* c_1, *o a* d_1, *anzi (interno) a* c_1 [*o a* d_1]. *Indi i punti di* r *esterni a* Q_1 *e prossimi a* P_1 *sono interni a* $\Sigma(c_1)$ [*o a* $\Sigma(d_1)$], *così come i punti di* r *esterni a* Q_0 *e prossimi a* P_0 *sono interni a* $\Sigma(c_0)$ [*o a* $\Sigma(d_0)$].

§ 3. - Sul teorema di Terasaka

9. - A proposito dei quadrati critici, Terasaka ha dimostrato [15] il seguente teorema:

Se Γ *è un quadrato critico;* λ *un arco speciale del contorno* γ *di* Γ; $\Sigma(\lambda)$ *il relativo campo adiacente a* $\Sigma(\Gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_p\, t^p(\Gamma)$, *di guisa che esso è anche un campo adiacente a* $\sigma(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_p\, t^p(\lambda)$, *o esiste un quadrato critico* Θ, *di contorno* ϑ, *che*

I) *è contenuto in* $\Sigma(\lambda) + \sigma(\lambda)$;

(15) *Loc. cit.* (5), pagg. 66-68.

II) *ha comune con* $\sigma(\lambda)$ *soltanto un segmento (ordinario, non nullo) contenuto in* ϑ *ed in* λ, *anzi o interno a* λ, *o coincidente con* λ;

o esiste una regione chiusa e convessa Ω, *delimitata da due semirette ortogonali aventi l'origine comune, la quale o è libera (cioè non ha punti comuni con la propria immagine) o è critica, ed inoltre*

I') *è contenuta in* $\Sigma(\lambda)+\sigma(\lambda)$

e

II') *ha comune con* $\sigma(\lambda)$ *soltanto un segmento (ordinario, non nullo), contenuto nel contorno di* Ω *e interno a* λ.

Le due alternative non si escludono a vicenda. Inoltre:

Se λ *è un segmento, si può sempre supporre verificata la prima alternativa;*

e:

Se λ *un segmento e se* $\vartheta \cdot \sigma(\lambda) = \lambda$, *si può senz'altro supporre che* λ *sia un lato di* Θ.

Tutte queste affermazioni sono o enunciate esplicitamente, o dimostrate implicitamente nel passo citato nella nota ([15]).

È poi chiaro che:

Se λ *non è un segmento esso stesso, il segmento* $\vartheta \cdot \lambda$, *considerato in* II), *è interno a* λ.

Se si presenta il caso della regione Ω, si può dire, volendo, che Θ è diventato infinitamente grande e tocca sempre la propria immagine, al finito o all'infinito.

10. – Esaminiamo un po' meglio che cosa accada nella prima delle due alternative considerate nel numero precedente.

Consideriamo il quadrato critico Θ e i due archi speciali φ e ψ di ϑ.

I punti del segmento $s = \vartheta \cdot \lambda$ sono tutti non interni sia a $t^{-1}(\Theta)$ che a $t(\Theta)$; anzi i punti interni di s sono esterni alle immagini di Θ nella t e nella t^{-1}. Infatti ϑ ha comune con $\sigma(\lambda)$ soltanto il segmento s, contenuto in λ; quindi tutti i punti di $\sigma(\lambda) - s$ sono esterni a Θ, perchè altrimenti sarebbe contraddetta la proposizione 1) della nota ([11]). In particolare, i punti interni a $t(s)$ e $t^{-1}(s)$ sono esterni a Θ. Donde la conclusione voluta.

In ciò è implicito che i punti interni ad s non sono separati dall'infinito mediante $t^{-1}(\vartheta) + \vartheta + t(\vartheta)$; infatti questo insieme è contenuto

in $\Sigma(\lambda)+\sigma(\lambda)$, mentre i punti interni a Γ appartengono al campo adiacente a $\sigma(\lambda)$ e diverso da $\Sigma(\lambda)$ e quindi possono essere congiunti coll'infinito senza incontrare $\Sigma(\lambda)+\sigma(\lambda)$, a norma di un teorema di BROUWER [*loc. cit.* (11), lemma 4]; dopo di ciò è facile dedurre che un punto interno ad s può essere congiunto coll'infinito mediante una semilinea che ha soltanto l'origine su s; c. v. d.

Ne segue (n. 2) che s è contenuto o tutto in φ, o tutto in ψ. Ma φ e ψ hanno al più gli estremi comuni. Quindi:

Nelle ipotesi poste, o

α) *uno dei due archi speciali di* ϑ *è interno a* $\Sigma(\lambda)$;

oppure

β) φ e ψ *hanno comuni gli estremi e questi cadono entrambi su* $\sigma(\lambda)$; *uno dei due archi speciali di* ϑ *è interno a* $\Sigma(\lambda)$, *a meno degli estremi.*

In questa seconda alternativa, o φ, o ψ coincide con s e quindi con λ. Infatti, poniamo per esempio che s appartenga a φ. Allora, poichè $s=\vartheta\cdot\sigma(\lambda)$, gli estremi di φ appartengono a s: donde $\varphi=s$. Quindi φ appartiene all'arco di traslazione λ; ma è esso stesso un arco di traslazione; dunque φ deve coincidere con λ. E di qui segue di nuovo che i punti interni di ψ sono allora interni a $\Sigma(\lambda)$.

In particolare, l'alternativa β) si può presentare soltanto se λ è un segmento. Anzi (cfr. n. 9, in fine): *se si presenta l'alternativa* β), *si può supporre che uno dei due archi speciali di* Θ *sia costituito da un lato di* ϑ *e l'altro dalla somma degli altri tre lati.*

§ 4. – ANCORA SUL TEOREMA DI TERASAKA

11. – Sia dato di nuovo il quadrato critico fisso Q_0; sia l_0 un arco speciale del contorno q_0 di Q_0; $\Sigma(l_0)$ il relativo campo adiacente a $\sigma(Q_0)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_p\, t^p(Q_0)$; si ponga al solito $\sigma(l_0)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_p\, t^p(l_0)$.

Si supponga che l'applicazione del teorema di TERASAKA a Q_0 e $\Sigma(l_0)$ conduca a una regione angolare R soddisfacente alle I') e II') del n. 9.

Consideriamo due intorni circolari aperti U_0 e V_0, uno dell'uno e l'altro dell'altro dei due estremi del segmento $R\cdot\sigma(l_0)=R\cdot l_0$. Supponiamo che U_0 e V_0 abbiano raggi uguali e una distanza positiva fra di loro.

E sopprimiamo da R tutti i punti delle semirette che abbiano le origini in U_0 e V_0, che incontrino uno solo di questi intorni e che siano parallele alla retta che contiene il segmento $R \cdot l_0$. Diciamo R' la figura che si ottiene così da R.

Consideriamo adesso un rettangolo r', che abbia $R' \cdot l_0$ come lato, sia situato rispetto ad l_0 dalla banda opposta di R', e sia tanto sottile da non contenere nessun punto di $\sigma(l_0)$ diverso da quelli di $R' \cdot l_0$ [ipotesi lecita in virtù della 2) della nota (14) e del fatto che $R \cdot l_0$ e, *a fortiori*, $R' \cdot l_0$ sono interni a l_0] e da non incontrare la propria immagine [ipotesi lecita perchè $R' \cdot l_0$ è interno ad l_0 e quindi ha una distanza positiva dalla propria immagine].

Atteso il fatto che r' e R' sono situati da bande opposte di $\sigma(l_0)$, dalle altre ipotesi si deduce che, posto

$$T_0 = R' + r',$$

risulta $t(T_0) \cdot T_0 = t(R') \cdot R'$ (16).

In definitiva:

L'insieme T_0 è chiuso, illimitato, delimitato da una linea semplice e aperta in senso stretto (17), *e gode delle seguenti proprietà:*

a) l'intersezione di T_0 e $\sigma(l_0)$ si riduce ad un segmento (non nullo) interno ad l_0 il cui interno è interno a T_0;

b) l'insieme $T_0 - T_0 \cdot \Sigma(l_0)$ è limitato e non incontra la propria immagine, inoltre appartiene a Q_0;

c) l'insieme $T_0 - T_0 \cdot Q_0$ appartiene a $\Sigma(l_0)$;

d) l'insieme $t(T_0) \cdot T_0$ o è vuoto, o è contenuto e nell'intersezione delle frontiere di $t(T_0)$ e di T_0 e nell'insieme $\Sigma(l_0)$.

Per esprimere tutti questi fatti, diremo che T_0 è un *insieme fondamentale* relativo a Q_0 e $\Sigma(l_0)$.

12. - L'insieme T_0 gode di altre proprietà di struttura, che è inutile conglobare nella definizione, ma le cui conseguenze sono importanti.

---

(16) Cfr. *loc. cit.* (2), § 3.

(17) Chiamo così le immagini biunivoche e continue di una retta che contengono tutti i propri punti di accumulazione (al finito), cioè le linee semplici e aperte secondo BROUWER. In *loc. cit.* (1), n. 7, dicevo invece linee semplici, aperte, serrate.

Sia Q un quadrato critico variabile; sia l un arco speciale del contorno q di Q, e precisamente il primo o il secondo, se e l_0 è rispettivamente il primo o il secondo arco speciale di q_0; in corrispondenza, sia $\Sigma(l)$ il primo o il secondo campo adiacente a $\sigma(Q) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} t^{\nu}(Q)$.

Allora è facile dedurre, dalla costruzione di T_0 e dalle proprietà esposte nei nn. 5 e 6, che:

Se Q *è abbastanza vicino a* Q_0, *l'insieme* T_0 *definito nel numero precedente è fondamentale anche per* Q *e* $\Sigma(l)$.

Infatti delle affermazioni implicite in questa, l'unica non evidente è quella espressa dalla: l'intersezione di T_0 e della traiettoria $\sigma(l)$, generata da l, si riduce ad un segmento contenuto in l.

Ora dalle proprietà ricordate dei nn. 5 e 6, dalla *a*), dal fatto che $T_0 \cdot \sigma(l_0)$ è un segmento interno e l_0 e dalla struttura metrica di T_0 segue che l'intersezione di T_0 e di $t^{-1}(l) \dotplus l \dotplus t(l)$ è un segmento interno ad l.

Ma allora, di qui e dal fatto che una curva contenuta in T_0 non può mai tagliare la propria immagine segue, in virtù del teorema della nota ([10]), che $T_0 \cdot \sigma(l)$ e $T_0 \cdot l$ coincidono; donde la conclusione ([18]).

13. – Si supponga ora che l'applicazione del teorema di Terasaka al quadrato critico Q_0 ed al campo adiacente $\Sigma(l_0)$ conduca ad un quadrato critico Q' verificante le I) e II) del n. 9 e tale che il segmento $s_0 = Q_0' \cdot \sigma(l_0) = Q' \cdot l_0$ o sia interno ad l_0 o coincida con l_0. Inoltre, in conformità di quanto è detto alla fine del n. 9, se l_0 è un segmento, esso sia anche un lato del contorno q' di Q'.

Si indichi con l' quell'arco speciale di q' che (n. 10) non contiene punti di s_0.

Si applichi il teorema di Terasaka a Q' e al campo $\Sigma(l')$ adiacente alla traiettoria $\sigma(l')$, generata da l', e situato, rispetto a questa, dalla banda opposta di Q' – di guisa che risulta $\Sigma(l') \cdot Q = 0$ –.

Si perviene così o a un quadrato critico Q'' o a una regione angolare R'', verificanti proprietà analoghe alle I), II), I') e II') del n. 9 e a quelle del n. 10.

Dimostriamo che *se esiste* Q'', *esso è interno a* $\Sigma(l_0)$; *se esiste* R'', R'' *è interna a* $\Sigma(l_0)$.

([18]) Cfr. p. es., *loc. cit.* ([1]), nn. 21 e 22.

Infatti, si supponga che esista Q''.

Se l' è interno a $\Sigma(l_0)$, $\sigma(l')$ e $\Sigma(l')$ sono entrambi interni e $\Sigma(l_0)$, e l'affermazione è evidente ([19]).

Se l' non è interno a $\Sigma(l_0)$, esso ha gli estremi su $\sigma(l_0)$ e i punti interni in $\Sigma(l_0)$, v. n. 10; inoltre esso è costituito dalla somma di tre lati di q' (v. n. 10 in fine e si tenga presente che l_0 è un lato di q'). Ma allora, v. n. 9, $Q'' \cdot \sigma(l')$ è un segmento interno a l', e quindi a $\Sigma(l')$. D'altra parte $\Sigma(l')$ è contenuto in $\Sigma(l_0)$, anche in questo caso ([20]); e $\Sigma(l_0)$ è aperto, per definizione; epperò Q'' è interno a $\Sigma(l_0)$.

Si supponga ora che esista R''.

I punti di R'' o appartengono a $\Sigma(l')$, o appartengono a $\sigma(l')$. Nella prima alternativa sono interni a $\Sigma(l_0)$, come risulta da quanto precede. Nella seconda sono interni a l', per la II') del n. 9; ma i punti interni a l' sono sempre interni a $\Sigma(l_0)$, come si è già visto; dunque, ecc.

14 – Manteniamo le ipotesi e le notazioni del numero precedente.

Consideriamo due intorni circolari (aperti) U_0 e V_0, uno di uno e l'altro dell'altro dei due estremi del segmento $s_0 = q' \cdot \sigma(l_0) = q' \cdot l_0$. Supponiamo che la somma dei loro raggi sia minore di s_0 e tanto piccola da aversi $U_0 \cdot Q'' = V_0 \cdot Q'' = 0$, oppure $U_0 \cdot R'' = V_0 \cdot R'' = 0$, se invece di Q'' esiste R''.

Gli insiemi $S' = (Q' \dotplus Q'') - (U_0 \dotplus V_0) \cdot Q'$, o $T' = (Q' \dotplus R'') - (U_0 \dotplus V_0) \cdot Q'$, si saldano sempre a $\sigma(l_0)$ lungo un segmento $s' = s_0 - (U_0 \dotplus V_0) \cdot s_0$ interno a s_0 e quindi a l_0.

Aggiungiamo ora a S' [a T'] un rettangolo r', avente il segmento s' come base, situato rispetto a $\sigma(l_0)$ dalla banda opposta di S' [di T'], tanto sottile da non incontrare la propria immagine e da non contenere punti di $s(l_0)$ oltre quelli di s'. E poniamo

$$S_0 = S' \dotplus r' \quad [T_0 = T' \dotplus r'];$$

di guisa che $t(S_0) \cdot S_0 = t(S') \cdot S'$ $[t(T_0) \cdot T_0 = t(T') \cdot T']$, — cfr. n. 11 a proposito della $t(T_0) \cdot T_0 = t(R') \cdot R'$.

([19]) Anzi la cosa è già nota: per una deduzione esplicita di queste circostanze, si cfr. *loc. cit.* ([2]), n. 11.

([20]) Cfr. *loc. cit.* ([2]), n. 14: il fatto che gli estremi di l' appartengano a $\sigma(l_0)$ non ha importanza.

L'insieme S_0 contiene Q'', quindi incontra la propria immagine; anzi non è difficile riconoscere che S_0 è un dominio critico [perchè tali sono Q' e Q'' e perchè Q' e Q'' sono situati da bande opposte rispetto a $\sigma(l')$, mentre $t(S_0) \cdot S_0 = t(S') \cdot S'$]. Inoltre esso è topologicamente equivalente ad un quadrato; quindi anche per il suo contorno vi è luogo a determinare due archi speciali, cfr. del resto *loc. cit.* (5) pag. 64. Orbene: è facile riconoscere che uno di questi coincide con l'arco speciale del contorno q'' di Q'', contenuto in $\Sigma(l')$, a meno degli estremi, eventualmente. In definitiva:

Se esiste l'insieme S_0, esso è delimitato da una curva chiusa di Jordan e gode delle seguenti proprietà:

a') l'intersezione di S_0 e $\sigma(l_0)$ si riduce a un segmento, interno a λ_0 e il cui interno è interno a S_0;

b') l'insieme $S_0 - S_0 \cdot \Sigma(l_0)$ appartiene Q_0 e non incontra la propria immagine;

c') l'insieme $S_0 - S_0 \cdot Q_0$ appartiene a $\Sigma(l_0)$ e contiene il quadrato critico Q'',

d') l'insieme S_0 è esso stesso critico e $t(S_0) \cdot S_0$ appartiene a $\Sigma(l_0)$;

e') detto l'' l'arco speciale di q'' speciale anche per il contorno di S_0, $S_0 - l''$ è contenuto in uno dei campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(l'')$ generata da l'', e precisamente a quello che contiene $Q'' - l''$,

la e') essendo conseguenza appunto del fatto che anche S_0 è critico.

Per esprimere tutte queste circostanze, diremo che S_0 è un *insieme fondamentale* relativo a Q_0 e $\Sigma(l_0)$

Inoltre è chiaro che la costruzione, data per Q_0 e $\Sigma(l_0)$, si può ripetere per Q'' e per il campo adiacente a $\sigma(l'')$ e non contenente punti di Q''; il che in sostanza equivale a dire che quella costruzione si può ripetere per S_0 e per il campo adiacente a $\sigma(l'')$, e non contenente punti di S_0.

E ancora, si riconosce facilmente che:

Se esiste l'insieme T_0, esso gode di proprietà analoghe alle a), b), c) e d) del numero 11.

15. – Anche in questo caso si riconosce che dalle proprietà di S_0 e T_0, implicite nella loro costruzione o esplicite nelle $a'), \dots, e')$ e nelle $a), \dots, d)$, discende una proposizione analoga a quella data nel n. 12. Precisamente la:

Se $\Sigma(l_0)$ è il primo [il secondo] campo adiacente a Q_0, gli insiemi S_0 e T_0, definiti nel numero precedente sono fondamentali per il primo [il secondo] campo adiacente ad ogni quadrato critico abbastanza vicino a Q_0;

ed è chiaro che questa enunciato si riferisce a quelli che esistono degli insiemi S_0 e T_0.

§ 5. – Sulla totalità dei quadrati critici.

16. – Sia G un insieme *limitato* del piano e ne sia F l'involucro chiuso.

I quadrati critici che hanno il centro in G sono contenuti fra i quadrati critici che hanno il centro in F. Sia $\mathfrak{F}$ l'insieme di questi ultimi.

Inoltre è chiaro che se un quadrato del piano è d'accumulazione per quadrati critici col centro in F, nel senso che deriva dalla nozione di distanza introdotta nel n. 3, esso stesso è un quadrato critico col centro in F. L'insieme $\mathfrak{F}$ è quindi chiuso.

Un quadrato col centro in F e che contenga F e $t(F)$ nell'interno non può certo esser critico; ma F e $t(F)$ sono limitati; quindi i lati dei quadrati critici col centro in F ammettono un estremo superiore finito. E di qui è facile dedurre che l'insieme $\mathfrak{F}$ è compatto (in sè) ([21]).

Inoltre $\mathfrak{F}$ è uno spazio metrico. Indi, per quanto precede, $\mathfrak{F}$ è un bicompatto ([22]); cioè $\mathfrak{F}$ rientra nell'ambito degli insiemi astratti a cui è possibile applicare il teorema di Pincherle–Borel.

17. – Sia ora Γ un quadrato di $\mathfrak{F}$. E si dicano:

α e β il primo e il secondo arco speciale del contorno γ di Γ;

$\Sigma(\alpha)$ e $\Sigma(\beta)$ il primo e il secondo campo adiacente a $\sigma(\Gamma) = \sum_{p\,-\infty}^{+\infty} t^p(\Gamma)$;

$S(\alpha)$ e $S(\beta)$, se esistono, due insiemi analoghi all'S_0 del n. 14 e relativi rispettivamente a Q e $\Sigma(\alpha)$ a Q e $\Sigma(\beta)$;

([21]) Per la terminologia che adotto, si veda P. Alexandroff e H. Hopf, *Topologie* [Springer, Berlino (1935)], pag. 84.

([22]) *Loc. cit.* nota ([21]), pag. 87, teorema VI.

$T(\alpha)$ e $T(\beta)$, se esistono, due insiemi analoghi al T_0 del n. 11 o del n. 14 ([23]) e relativi risp. a Q e $\Sigma(\alpha)$, a Q e $\Sigma(\beta)$.

Allora, dalle proposizioni dei nn. 12 e 15 e dalla bicompattezza di $\mathfrak{F}$ è facile dedurre che:

L'insiene $\mathcal{G}$ dei quadrati critici coi centri nell'insieme G, *chiuso o non, ma limitato, si può decomporre in un numero finito di classi, in maniera tale che i quadrati di una stessa classe ammettano almeno un insieme, fondamentale per tutti, comune a tutti, e relativo ai rispettivi primi campi adiacenti, ed almeno un insieme, fondamentale per tutti, comune a tutti, e relativo ai rispettivi secondi campi adiacenti.*

Infatti, attesa la bicompattezza di $\mathfrak{F}$ e i teoremi del § prec., è possibile scegliere un numero finito di quadrati $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_w$ di $\mathfrak{F}$ e determinare gli intorni $W_1, \ldots, W_w$ di questi, in modo che ogni Γ di $\mathfrak{F}$ cada in almeno uno degli intorni $W_1, \ldots, W_w$; e che se Γ cade in $W_i (i=1, \ldots, w)$, quelli esistenti degli insiemi $S(\alpha_i)$, e $T(\alpha_i)$ ovvero degli insiemi $S(\beta_i)$ e $T(\beta_i)$ si possano pensar come fondamentali, per Γ e $\Sigma(\alpha)$ i primi, per Γ e $\Sigma(\beta)$ i secondi – naturalmente il significato di α_i e β_i, e quindi di $S(\alpha_i)$, $T(\alpha_i)$, $S(\beta_i)$ e $T(\beta_i)$ è palese –.

Dopo di ciò è agevole ottenere una suddivisione di $\mathfrak{F}$, epperò di $\mathcal{G}$ in un numero finito di classi del tipo voluto; e si può imporre la condizione ulteriore che due classi distinte siano prive di elementi comuni ([24]).

([23]) In questo momento applico il postulato di ZERMELO. Ma, se si vuole, basta riesaminare le dimostrazioni di TERASAKA e quelle qui svolte, per convincersi che l'uso di quel postulato si può eliminare.

([24]) Per suddividere i segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo in un numero finito di classi, ciascuna comportantesi come un solo elemento, bisogna estendere le nozioni di segmento e di raggio fondamentale seguendo l'indirizzo qui tenuto nei nn. 11 e 14: e cioè, sopprimere la condizione che i segmenti e i raggi fondamentali per un segmento di traslazione e un campo adiacente alla relativa traiettoria siano ortogonali al segmento di traslazione; e sostituire altresì la condizione che quei segmenti e quei raggi fondamentali siano interni, a meno dell'origine, a quel campo adiacente con l'altra di avere su quella traiettoria un punto soltanto (interno a quel segmento di traslazione) e di penetrare nell'altro campo adiacente a quella traiettoria con un segmento, che non incontri la propria immagine (cioè abbastanza corto).

Osservazione. – Il teorema di questo numero permette di dimostrare l'ultimo teorema geometrico di Poincaré, sugli autoomeomorfismi di una corona circolare, applicando il procedimento dimostrativo dato da Terasaka per il teorema di Brouwer in *loc. cit.* (5) pag. 69; così come la suddivisione dell'insieme dei segmenti di traslazione contenuti in un segmento in un numero finito di classi, comportantesi ciascuna come costituita da un solo elemento, si presterebbe a dimostrare quel teorema di Poincaré col procedimento dato, in questo ordine di idee, da v. Kerékjártó (25).

(25) Cfr. *loc. cit.* (4); *loc. cit.* (2), § 5.