

SULLA DETERMINAZIONE DELLA VERTICALE DURANTE UNA EVOLUZIONE IN VOLO CIECO^(*).

PIETRO TEOFILATO

SUMMARIVM. — Ad determinandam verticalem in coeco volatu, pro gyroscopio, quod instrumentum debile et magni est pretii, adhiberi potest perpendiculum, dummodo tempus observationis adeo sit breve, ut campus virium, quae propter velivoli flexum e centro fugiunt, paene uniformis et magnitudine et directione haberi possit.

1. GENERALITÀ SULL'ESPLORAZIONE PENDOLARE DELLA VERTICALE. — La determinazione della verticale durante la virata in volo cieco si ottiene notoriamente a mezzo del giroscopio. Senonchè la delicatezza di questo dispositivo induce a pensare all'adozione di altri strumenti che, se pure meno precisi, consentano una maggiore semplicità di costruzione e minor costo, qualità non trascurabili quando l'installazione debba eseguirsi a bordo di velivoli ai quali non si richiedano speciali acrobazie.

Ora il pendolo, che è sensibile alla gravità e alle forze centrifughe, può essere efficacemente adoperato come mezzo di esplorazione. Effettivamente, se il periodo d'oscillazione del pendolo è molto breve rispetto al tempo τ occorrente a compiere sia pure un piccolo angolo di virata, le forze centrifughe, le quali sono proporzionali alle distanze dei punti dall'asse, molto lontano, della virata, si possono considerare parallele e proporzionali alla massa, ed allora il pendolo, nell'accennato tempo τ si può pensare come soggetto ad un campo uniforme risultante di due campi uniformi di direzione fissa, quello della gra-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. G. Armellini il 20 luglio 1946.

vità e quello delle forze centrifughe; l'angolo di virata durante le oscillazioni del pendolo viene così a essere considerato come un parametro molto lentamente variabile. A rigore, invece, l'asse del pendolo che oscilla dentro un velivolo il quale compia una virata con velocità angolare ω e raggio R nel piano inclinato di α sull'orizzonte, ha, nell'ipotesi di una velocità costante, un'accelerazione verticale: $R\omega^2 \sin \alpha \cdot \cos \omega(t-t_0)$ ed una orizzontale: $R\omega^2 [1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \omega(t-t_0)]^{1/2}$; e queste accelerazioni influiscono sul moto del pendolo anche durante una sola oscillazione. Esse provengono dalla composizione della gravità e delle forze centrifughe, quali forze di massa, e inoltre dalle forze areodinamiche.

Orbene se ci si ferma alla approssimazione in cui è consentito ammettere il parallelismo delle forze centrifughe, si mostrerà qui appresso che basta servirsi di un contatore delle poche oscillazioni compiute dal pendolo a partire dall'istante in cui esso venga sbloccato (istante che deve essere successivo a quello dell'ingresso in virata) fino al momento in cui per l'attrito il pendolo si ferma, per leggere immediatamente la posizione della verticale.

2. PENDOLI DI MINIMO PERIODO. - Esaminiamo anzitutto la possibilità di ottenere pendoli di piccolo periodo, quali si richiedono per rimanere entro i limiti di approssimazione del parallelismo delle forze. Sospendendo un pendolo per un asse situato alla distanza l dal baricentro, la lunghezza del pendolo semplice equivalente sarà: $L = l + \frac{k_0^2}{l}$ dove k_0 è il raggio d'inerzia baricentrico.

Ora il prodotto dei due termini $l, \frac{k_0^2}{l}$, che formano L , è uguale a k_0^2 e quindi è costante qualunque sia l , pertanto il minimo di L si avrà quando quei due termini saranno eguali, cioè quando:

$$l = k_0^2/l \quad \text{ossia} \quad l = k_0, \quad L = 2k_0.$$

Se il pendolo è costituito da un disco di raggio a , avremo allora: $k_0 = a/\sqrt{2}$, $L = a\sqrt{2}$. In un certo senso questo minimo può anche riguardarsi come un minimum minimorum; si consideri infatti una

piastra omogenea e simmetrica rispetto all'origine; essa abbia come contorno una linea la cui equazione in coordinate polari sia espressa da:

$$a = a(\theta) \quad (0 < \theta < \pi)$$

Il momento d'inerzia baricentrico I rispetto all'origine (baricentro) sarà:

$$I = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{a(\theta)} r^3 dr ,$$

e di questo si avrà il minimo per un'area data A :

$$H = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{a(\theta)} r dr ,$$

annullando la variazione:

$$\delta(I + \lambda A) = 0 ,$$

cioè ponendo:

$$\int_0^\pi d\theta [a^3(\theta) + \lambda a(\theta)] \delta a = 0 .$$

Di qui risulta:

$$a^3(\theta) + \lambda a(\theta) = 0$$

E quindi $a = \text{costante}$. La piastra omogenea di momento inerziale baricentrico minimo è dunque un disco circolare. Il disco non è che il caso particolare di un cilindro: ed allora, a titolo di esempio, si consideri un pendolo costituito da un corpo cilindrico lungo 50 mm. ed avente un diametro di 4 mm. e da un indice di forma rombica, solidale col cilindro, situato nella sezione normale mediana del medesimo ed avente le diagonali rispettivamente di mm. 4 e 30 e lo spessore di 0,2 mm. Il corpo cilindrico sia munito di due piccoli appendici a coltello che permettono al pendolo di oscillare intorno ad una retta

parallela all'asse del cilindro, che è asse baricentrico del pendolo, e situato da quest'ultimo alla distanza di mm. 3,02. Il periodo di una oscillazione completa di va e vieni sarà:

$$T = \frac{15,4}{100} \text{ secondi}$$

e la frequenza sarà di 6,65 oscillazioni complete al secondo. Ora una virata molto rapida comporta normalmente un giro completo in 90 secondi con una velocità angolare di virata $\omega = \frac{1}{14}$ rad/sec.; perciò un pendolo che faccia 4 oscillazioni complete in un secondo, compirà una oscillazione completa mentre il velivolo avrà ruotato appena di un grado. È lecito dunque, in questo ordine di approssimazione considerare l'angolo di virata come parametro lentamente variabile.

3. RETTE DI MAGGIOR PENDIO. - Si consideri un piano σ , connesso solidalmente col velivolo, e che nell'istante t , rispetto ad un sistema d'assi fissi col suolo, abbia l'equazione:

$$ax + by + cz = 0$$

dove a, b, c siano i coseni direttori della normale n_σ al piano, per modo che:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Si consideri una direzione R di coseni λ, μ, ν . Chiameremo retta r di maggior pendio rispetto ad R , la proiezione di R sul piano σ . Il piano σ_1 di equazione:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

passante per R e perpendicolare a σ avrà una normale n_{σ_1} i cui coseni direttori saranno:

$$a_1 = \frac{\mu c - \nu b}{\widehat{\text{sen } R n_\sigma}}, \quad b_1 = \frac{a \nu - \lambda c}{\widehat{\text{sen } R n_\sigma}}, \quad c_1 = \frac{\lambda b - a \mu}{\widehat{\text{sen } R n_\sigma}}.$$

I piani σ e σ_1 si incontreranno secondo la retta r di maggior pendio i cui coseni MNP sono proporzionali ai minori della matrice:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Ed allora, secondo che la direzione R coinciderà con quella della gravità oppure con quella delle forze centrifughe, si avrà sopra σ la retta di maggior pendio rispetto alla gravità, oppure rispetto alle forze centrifughe. Beninteso che questa seconda direzione può ritenersi fissa solo per piccole variazioni dell'angolo di virata, ossia fin tanto che il moto del pendolo possa considerarsi governato da due campi uniformi. Denoteremo con R_1 la direzione della gravità e con R quella delle forze centrifughe; con r_1 ed r le rispettive rette di maggior pendio. Se l'asse z è parallelo ad R_1 , avremo $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$ e quindi:

$$M_1 = \frac{ac}{\widehat{\text{sen } R_1 n_\sigma}}, \quad N_1 = \frac{bc}{\widehat{\text{sen } R_1 n_\sigma}}, \quad P_1 = -\frac{a^2 + b^2}{\widehat{\text{sen } R_1 n_\sigma}}$$

Inoltre il coseno dell'angolo $\widehat{rr_1}$ sarà:

$$\cos \widehat{rr_1} = MM_1 + NN_1 + PP_1 = [(a^2 + b^2)\nu - \lambda ac - \mu bc] : \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. EQUAZIONE DEL MOTO DEL PENDOLO. - Si pensi adesso il piano σ solidale col velivolo ed in esso oscillante un pendolo. Sia φ l'angolo che questo fa con la direzione r_1 , di maggior pendio della gravità e sia $\Phi = \widehat{rr_1}$.

Durante il tempo nel quale σ si può considerare mobile con moto traslatorio uniforme, ossia nel tempo di poche (e molto frequenti) oscillazioni, l'equazione del moto sarà:

$$[1] \quad I\ddot{\varphi} = -Mgl \widehat{\text{sen } R_1 n_\sigma} \cdot \text{sen } \varphi + MR\omega^2 l \widehat{\text{sen } R n_\sigma} \cdot \text{sen } (\varphi + \Phi),$$

con ovvio significato dei simboli, e dove si sono trascurate le forze destinate dall'accelerazione complementare a_c per ragioni che apprezzeremo tra poco e, per il momento, si sono trascurati anche gli attriti.

Suppongasì la distanza ρ di un punto del pendolo dal suo asse di sospensione minore di 20 mm., e la velocità angolare $\dot{\phi}$ del pendolo minore di $\frac{1}{8} : \frac{1}{16} = 2$ rad/sec. (quale risulterebbe se il pendolo facesse lo sbalzo di $\frac{1}{8}$ rad in $\frac{1}{4}$ di periodo, essendo, il periodo $= \frac{1}{4}$ sec). Ne risulta una velocità relativa massima $v_r = \rho \dot{\phi} < \frac{20}{100} \cdot 2$, e quindi un'accelerazione complementare massima:

$$a_c < v_r \omega = \frac{20}{1000} \cdot 2 \cdot \frac{1}{14} = 29 \cdot 10^{-4},$$

donde un rapporto:

$$\frac{a_c}{g} < 29 \cdot 10^{-5}.$$

Tanto basta per essere autorizzati a trascurare, come si è fatto nella [1], l'effetto delle forze d'inerzia derivanti da a_c .

5. PENDOLI OCCORRENTI IN UNA VIRATA OBLIQUA. - Vedremo nei paragrafi seguenti come sia possibile determinare l'angolo $\bar{\phi}$ che fissa la posizione d'equilibrio relativo del pendolo nel piano σ solidale col velivolo in riferimento alla retta r_1 , di maggior pendio. Annullando nella [1] l'accelerazione $\ddot{\phi}$, si ha:

$$[2] \quad \tan \bar{\phi} = \frac{R\omega^2 \cdot \widehat{\text{sen}} R\hat{n}_\sigma \cdot \widehat{\text{sen}} \Phi}{g \widehat{\text{sen}} R_1 \hat{n}_\sigma - R\omega^2 \widehat{\text{sen}} R\hat{n}_\sigma \cdot \widehat{\text{cos}} \Phi},$$

equazione contenente le quattro incognite:

$$[3] \quad \Phi, \quad \widehat{\text{sen}} R\hat{n}_\sigma, \quad \widehat{\text{sen}} R_1 \hat{n}_\sigma, \quad R\omega^2.$$

Si considerino adesso k piani, $\sigma \sigma' \sigma'' \dots$ solidali col velivolo e formanti fascio, aventi ad esempio come asse del fascio l'asse alare del velivolo od una parallela ad esso. Potremo scrivere altrettante equazioni come la [2] nelle quali, a norma di quanto poi diremo, i rispettivi angoli $\bar{\phi} \bar{\phi}' \bar{\phi}'' \dots$ sono da ritenere conosciuti. Vi compariranno in

totale $3k + 1$ incognite cioè, anzitutto l'incognita $R\omega^2$ e poi, per ogni piano, le rispettive incognite:

$$[3 \text{ bis}] \quad \widehat{\text{sen } R n_{\sigma}}, \quad \widehat{\text{sen } R_1 n_{\sigma}}, \quad \Phi$$

Naturalmente sono da ritenere dati gli angoli:

$$\alpha' = \widehat{\sigma \sigma'}, \quad \alpha'' = \widehat{\sigma \sigma''} \dots,$$

per modo che, supposte per un momento note le sole incognite [3 bis] relative al primo piano σ , si possono facilmente calcolare le analoghe quantità per σ' , σ'' , ...

Per i k piani avremo dunque k equazioni come la [2], contenenti le uniche quantità incognite fondamentali [3], e perciò alla determinazione di queste ultime occorreranno e basteranno 4 piani soltanto (4 equazioni). Non ci indugeremo ad esplicitare Φ' , Φ'' , ... $\widehat{\text{sen } R n_{\sigma'}}$, ... $\widehat{\text{sen } R n_{\sigma''}}$, ... $\widehat{\text{sen } R_1 n_{\sigma'}}$, $\widehat{\text{sen } R_1 n_{\sigma''}}$, ... mediante le [3] e gli angoli $\alpha' \alpha'' \dots$, nè a risolvere il sistema delle 4 equazioni relative alle [3] e passeremo subito al caso di una virata orizzontale, che è il caso più semplice e più frequente.

6. VIRATA ORIZZONTALE. ATTRITO. — Il oircolo descritto dal baricentro G del velivolo è orizzontale, l'asse ω di virata è verticale; l'assetto del velivolo è lateralmente inclinato rispetto all'orizzonte, cioè l'asse alare HK fa col raggio OG , perpendicolare all'asse ω , un angolo tale, che la risultante GC delle forze centrifughe e il peso risultante GP equilibrano la portanza GA .

Il pendolo, situato nel piano verticale $HKP \equiv \sigma$, solidale col velivolo, in assenza di attrito, prenderà la direzione opposta alla portanza GA , che è normale all'asse alare HK . Queste particolarità riguardano evidentemente la virata orizzontale corretta, perchè se ad esempio la posizione di equilibrio relativo del pendolo non coincidesse con GB , sarebbe segno di derapamento o di scivolamento d'ala.

Nella virata orizzontale la retta R_1 e la r_1 coincidono con GP , la retta R e la r coincidono con GC , per cui $\Phi = 90^\circ$ e φ è l'angolo

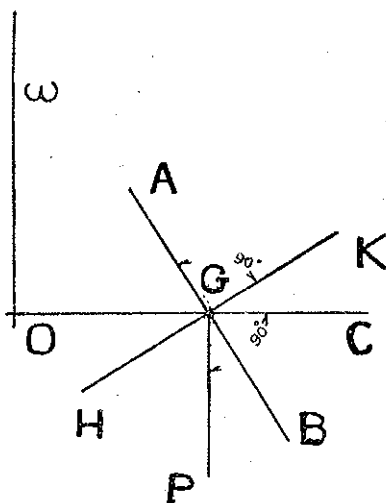
variabile del pendolo con la verticale GP. La [1] si semplifica così:

$$[4] \quad I\ddot{\varphi} = -Mgl \sin \varphi + MR\omega^2 l \cdot \cos \varphi$$

Volendo poi tener conto dell'attrito si deve aggiungere un termine della forma:

$$[5] \quad \pm \nu M (-l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi + R\omega^2 \sin \varphi)$$

dove va preso il segno meno, se il moto è diretto ($\dot{\varphi} > 0$) oppure il più, se il moto è retrogrado ($\dot{\varphi} < 0$) e dove ν è un coefficiente di dimen-



sione lineare e dipendente dall'attrito. Trattandosi di pendoli di dimensioni minuscole la sospensione da adottare deve essere a coltello e così congegnata da non essere disturbata dalle pressioni esercitate sul pendolo normalmente al suo piano come fanno le forze generate dalle accelerazioni complementari.

Immaginiamo che il pendolo sia bloccabile in una posizione determinata dal suo piano. Il velivolo entri in virata e si voglia conoscere la posizione della verticale. Compiuta la manovra necessaria all'ingresso in virata, si sblocchi il pendolo; esso inizierà subito delle oscillazioni che andranno smorzandosi in virtù dell'attrito. Assunto $l < 8\text{mm.}$, come

al § 2, e $\dot{\varphi} < 2 \text{ rad/sec.}$, come al § 4, risulta $l\dot{\varphi}^2 < 3,2 \cdot 10^{-2}$, mentre il secondo termine della [5] oscilla fra $\pm 9,8$ e mentre nel terzo termine della [5] medesima il fattore $R\omega^2$ può assumere un valore intorno a circa 10 nell'ipotesi larga di una velocità periferica $R\omega = 150 \text{ m/sec}$ e di $\omega = \frac{1}{14}$ come nel § 2.

L'equazione [4], con l'introduzione del termine aggiuntivo [5] nel quale venga trascurato il termine $l\dot{\varphi}^2$, va allora modificata così:

$$[6] \quad I\ddot{\varphi} = -M(gl + vR\omega^2) \sin \varphi + M(R\omega^2 l - v g) \cos \varphi$$

(per il moto diretto)

oppure:

$$[7] \quad I\ddot{\varphi} = -M(gl - vR\omega^2) \sin \varphi + M(R\omega^2 l + v g) \cos \varphi$$

(per il moto retrogrado)

7. DETERMINAZIONE DI v . - Si faccia oscillare il pendolo in un piano verticale fisso con il suolo, abbandonandone il baricentro da un angolo φ_0 negativo, ben determinato. In luogo della [6] vigerà:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \sin \varphi \mp \frac{v}{l} \frac{g}{L} \cos \varphi$$

ossia:

$$\ddot{\varphi} = -\rho \sin(\varphi \pm \sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ nel moto diretto} \\ - \text{ nel moto retrogrado} \end{array} \right.$$

avendo posto:

$$[8] \quad \frac{g}{L} = \rho \cos \sigma, \quad \frac{v}{l} \frac{g}{L} = \rho \sin \sigma \quad (\sigma > 0)$$

Ponendo ancora:

$$\Phi_1 = \varphi + \sigma, \quad \ddot{\Phi}_1 = -\rho \sin \Phi_1, \quad \text{nel moto diretto}$$

$$\Phi_2 = \varphi - \sigma, \quad \ddot{\Phi}_2 = -\rho \sin \Phi_2, \quad \text{nel moto retrogrado,}$$

e partendo da:

$$\varphi_0 = -\gamma \quad \text{con} \quad \gamma > 0$$

si inizia la prima fase di moto diretto e poi si passa alla seconda di moto retrogrado, alla terza di diretto, e così via alternativamente.

$$\begin{aligned} 1^a \text{ fase: } \varphi \text{ iniz.} &= -\gamma ; \quad \Phi_1 \text{ iniz.} = -\gamma + \sigma ; \\ &\quad \Phi_1 \text{ finale} = \gamma - \sigma ; \quad \varphi \text{ finale} = \gamma - 2\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^a \text{ fase: } \varphi \text{ iniz.} &= \gamma - 2\sigma ; \quad \Phi_2 \text{ iniz.} = \gamma - 3\sigma ; \\ &\quad \Phi_2 \text{ finale} = 3\sigma - \gamma ; \quad \varphi \text{ finale} = 4\sigma - \gamma \end{aligned}$$

e così via:

$$m^{\text{ma}} \text{ fase: } \varphi \text{ iniz.} = \mp [\gamma - (2m-2)\sigma] ; \quad \varphi \text{ finale} = \pm [\gamma - 2m\sigma]$$

prendendo il segno in alto quando m è dispari e quello in basso quando m è pari. Naturalmente la successione continua fino a che:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \text{ iniz.} &= -[\gamma - (2m-2)\sigma] + \sigma < 0, \quad \text{per } m \text{ dispari} \\ \Phi_2 \text{ iniz.} &= +[\gamma - (2m-2)\sigma] - \sigma > 0, \quad \text{per } m \text{ pari} \end{aligned}$$

ed il fermo si avrà alla fine della n_0 fase, soltanto se contemporaneamente si ha:

$$\begin{aligned} -[\gamma - (2n_0-2)\sigma] + \sigma &< 0 \quad \text{per l'inizio della } n_0 \text{ fase} \\ +[\gamma - 2n_0\sigma] - \sigma &< 0 \quad \text{per il non inizio della } (n_0+1) \text{ fase} \\ &\quad (n_0 \text{ dispari}); \end{aligned}$$

donde:

$$(2n_0-1)\sigma < \gamma < (2n_0+1)\sigma ;$$

e analogamente per n_0 pari. Sicchè, contando, a partire da $\varphi_0 = -\gamma$, le oscillazioni del pendolo fino a che si ferma, si trova:

$$\sigma \approx \gamma / (2n_0)$$

e conosciuto σ si può ricavare v dalle [8], cioè:

$$v = l \cdot \tan \sigma = \infty \tan [\gamma / (2n_0)] .$$

Fin qui abbiamo supposto $\gamma > 0$; un ragionamento analogo si può ripetere se γ è qualsiasi.

8. DETERMINAZIONE DI $\Delta = \sigma_2 - \sigma_1$. In riferimento alle equazioni [6] e [7] si ponga:

$$[9] \quad \tan \sigma_1 = \frac{R\omega^2 l - v g}{g l + v R\omega^2} ; \quad \tan \sigma_2 = \frac{R\omega^2 l + v g}{g l - v R\omega^2}$$

$$\rho_1^2/M^2 = (R\omega^2 l - v g)^2 + (g l + v R\omega^2)^2 ; \quad \rho_2^2/M^2 = (R\omega^2 l + v g)^2 + (g l - v R\omega^2)^2 .$$

Segue dalle [9] con semplici trasformazioni:

$$[10] \quad \tan (\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{2vl}{l^2 - v^2} = \frac{2v}{l} + \varepsilon$$

dove ε contiene termini in v , di grado terzo o maggiore. Dalla [10] si ricava perciò $\Delta = \sigma_2 - \sigma_1$, essendo v ed l quantità perfettamente note.

9. DETERMINAZIONE DI $\bar{\varphi}$. - Lo sblocco iniziale del pendolo si faccia avvenire, come si è detto, a manovra già compiuta, ossia mentre il velivolo trovasi in virata; allora se lo sblocco trova il pendolo in posizione ortogonale rispetto all'asse alare (che è la posizione normale tanto in volo rettilineo orizzontale, quanto in virata orizzontale corretta), di qui esso non si sposterà finché non riceve un impulso oppure venga spostato in posizione prestabilita formante ad esempio l'angolo $-\psi_0$ ($\psi_0 > 0$) con la retta GB. Poniamoci in questo secondo caso; anzi potremo organizzare il dispositivo in modo che la posizione normale del pendolo prima dello sblocco coincida sempre con la direzione che con GB forma l'angolo fisso $-\psi_0$. Le condizioni iniziali sono dunque:

$$\varphi = -\psi_0 , \quad \dot{\varphi} = 0 ,$$

φ essendo l'angolo che la GP forma col pendolo (GP verticale e insieme retta di maggior pendio).

Valendoci delle [9], le [6] e [7] diverranno:

$$I\ddot{\varphi} = -\rho_1 \sin(\varphi - \sigma_1) \quad \text{nel moto diretto}$$

$$I\ddot{\varphi} = -\rho_2 \sin(\varphi - \sigma_2) \quad \text{nel moto retrogrado}$$

le quali:

$$\text{posto } \begin{cases} \Phi_1 = \varphi - \sigma_1 \\ \Phi_2 = \varphi - \sigma_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{diverranno} \\ \text{rispettivamente} \end{matrix} \quad \begin{cases} \ddot{\Phi}_1 = -\frac{\rho_1}{I} \sin \Phi_1 \\ \ddot{\Phi}_2 = -\frac{\rho_2}{I} \sin \Phi_2 \end{cases}$$

nella 1^a fase: φ iniz. = $-\psi_0$; Φ_1 iniz. = $-\psi_0 - \sigma_1$;

$$\Phi_1 \text{ finale} = \psi_0 + \sigma_1; \quad \varphi \text{ finale} = \psi_0 + 2\sigma_1.$$

nella 2^a fase: φ iniz. = $\psi_0 + 2\sigma_1$; Φ_2 iniz. = $\psi_0 + 2\sigma_1 - \sigma_2$;

$$\Phi_2 \text{ finale} = \sigma_2 - \psi_0 - 2\sigma_1; \quad \varphi \text{ finale} = 2\sigma_2 - 2\sigma_1 - \psi_0.$$

.....

nella m^{ma} fase: φ iniz. = $m\sigma_1 - (m-2)\sigma_2 + \psi_0$; φ finale =

$$= m(\sigma_2 - \sigma_1) - \psi_0, \quad \text{per } m \text{ pari.}$$

φ iniz. = $(m-1)(\sigma_2 - \sigma_1) - \psi_0$; φ finale =

$$= (m+1)\sigma_1 - (m-1)\sigma_2 + \psi_0, \quad \text{per } m \text{ dispari.}$$

Naturalmente la successione continua fino a che:

$$\Phi_2 \text{ iniz.} = m\sigma_1 - (m-1)\sigma_2 + \psi_0 > 0 \quad \text{per } m \text{ pari}$$

$$\Phi_1 \text{ iniz.} = (m-1)\sigma_2 - m\sigma_1 - \psi_0 < 0 \quad \text{per } m \text{ dispari}$$

ed il fermo si avrà alla fine della n^{ma} fase se contemporaneamente si ha:

$$(n-1)\sigma_2 - n\sigma_1 - \psi_0 < 0 \quad \text{per l'inizio della } n^{\text{ma}} \text{ fase dispari}$$

$$(n+1)\sigma_1 - n\sigma_2 + \psi_0 < 0 \quad \text{per il non inizio della } (n+1)^{\text{ma}} \text{ fase pari}$$

donde:

$$[11] \quad n\Delta - \psi_0 < \sigma_2 < (n+1)\Delta - \psi_0$$

che vale tanto per n dispari che per n pari. Dunque, noto ψ_0 una volta per tutte, un *contatore di oscillazioni* fornirà n e quindi darà σ_2 a meno di Δ . Anzi il contatore, poichè Δ è noto, può essere *opportunamente tarato* onde segni addirittura:

$$[12] \quad \sigma_0 = n\Delta - \psi_0 - \arctan \frac{v}{l},$$

cioè segni appunto quell'angolo che differisce da $\bar{\varphi} = \widehat{PGB} = \arctan \frac{R\omega^2}{g}$, per meno di $\varepsilon\Delta$ ($|\varepsilon| < 1$); e infatti dalle [9] e da $\tan \bar{\varphi}$ si deduce:

$$[13] \quad \tan(\sigma_2 - \widehat{PGB}) = \tan(\sigma_2 - \bar{\varphi}) = \frac{v}{l},$$

e, siccome $\sigma_2 - \sigma_0 = \varepsilon\Delta$, segue da [12] e [13]:

$$\bar{\varphi} = (n + \varepsilon)\Delta - \psi_0 - \arctan(v/l)$$

Conosciamo dunque mediante diretta lettura sul contatore l'angolo \widehat{PGB} e perciò la posizione della verticale rispetto all'asse alare; e con tanta maggiore approssimazione, quanto minore è v . Naturalmente non dobbiamo varcare gli opportuni limiti di piccolezza per v , altrimenti il numero delle oscillazioni occorrenti al fermo del pendolo diventa così grande che, nella durata della segnalazione, le forze centrifughe non si possono considerare più come parallele. Supponiamo che $v/l = \tan \frac{\gamma}{2n_0} = \frac{\Delta}{2}$ sia eguale a $\sim 0,023$, e quindi sia $\Delta = \sim 2^\circ 37'$; in una virata rapida compiuta alla velocità angolare di $4^\circ/\text{sec}$, con una velocità di 360 Km. all'ora e con $\psi_0 = 6^\circ \frac{1}{2}$ si avrà $\sigma_0 + \psi_0 = 42^\circ$, ed un pendolo che compia 4 oscillazioni complete al secondo, permetterà di ottenere σ_0 dopo 16 oscillazioni ($n = 16$) con approssimazione a meno di una frazione di $2^\circ 37'$.

10. ESAME ENERGETICO. — La formula [12] dice che a parità di σ_0 , col crescere dell'attrito e quindi di ν , diminuisce il numero n delle oscillazioni che si verificano prima di raggiungere il fermo; e questo, dal punto di vista energetico, è evidente. Non altrettanto chiara a prima vista è la circostanza, che pur si rileva dalla [12], e cioè che aumentando σ_0 mentre ν rimane inalterato, cresce n . Si tratta di vedere se effettivamente col crescere dell'angolo $P\hat{G}B$ cresce l'energia potenziale posseduta dal pendolo al momento che esso è abbandonato dalla posizione che fa l'angolo $-\psi_0$ con GB .

Ora si rifletta che, se si pensa il pendolo soggetto ad un campo uniforme del quale si possa far crescere l'intensità, avverrà che, a parità di spostamento $-\psi_0$ contato dalla posizione di equilibrio, col crescere dell'intensità crescerà anche l'energia potenziale. Ora nel caso che consideriamo il pendolo è soggetto a due campi uniformi (per intensità e direzione) quello della gravità e quello delle forze centrifughe, tra loro ortogonali, i quali si compongono in un unico campo uniforme risultante la cui accelerazione sarà:

$$a = g(i + j \tan \sigma_0)$$

dove i e j sono due versori, il primo verticale, il secondo orizzontale; e dove σ_0 è la posizione di equilibrio del pendolo, riferita alla verticale corrispondente ad una data velocità angolare ω e cioè:

$$\tan \sigma_0 = \frac{R\omega^2}{g}, \quad (R \text{ raggio di virata})$$

Allora, crescendo ω , cresce $\tan \sigma_0$, e quindi cresce l'intensità dell'accelerazione a , cioè:

$$a = \frac{g}{\cos \sigma_0},$$

che è generata dal campo uniforme risultante; crescerà pertanto l'energia potenziale del pendolo. Beninteso che col variare l'intensità del campo risultante ne varia anche la direzione.