PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 13
pag. 135-142

SULLE SUPERFICIE ILLUMINATE UNIFORMEMENTE DA UN'ONDA CILINDRICA (*)

GIULIANO TORALDO DI FRANCIA

SVMMARIVM. — Auctor aequationem differentialem partialem cuiusvis superficiei, quae ab unda luminifera cylindrica aequalem ubique luminis quantitatem accipit, integrat.

1. - Risale alla fine del secolo decimottavo il problema delle superficie egualmente illuminate da una sorgente puntiforme, ovvero da un'onda luminosa sferica.

La questione è ormai completamente risolta sia per via geometrica (1), sia per via analitica (2). La presente nota ha per scopo la trattazione del problema analogo per un'onda cilindrica.

Nel caso dell'onda sferica i raggi luminosi formano una stella col centro sulla sorgente e l'illuminamento in un punto della superficie è proporzionale al coseno dell'angolo formato dal raggio con la normale alla superficie e inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto dalla sorgente. Poichè questo illuminamento è costante, ne viene che l'area di una porzione qualsiasi della superficie è proporzionale all'angolo solido sotto cui essa è vista dalla sorgente.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 14 aprile 1946.

(1) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, 1903, II, pag. 269.

(2) G. SANSONE, *Sulle superficie ugualmente illuminate da una sorgente luminosa*, « Act. Pont. Ac. Scient. », IX, pag. 127. Si vedano in questa nota gli interessanti ragguagli storici.

Invece nel caso dell'onda cilindrica i raggi sono rappresentati da tutte le normali all'asse dell'onda e l'illuminamento è proporzionale al coseno dell'angolo formato dal raggio con la normale alla superficie e inversamente proporzionale alla prima potenza della distanza dall'asse. Le superficie d'illuminamento costante sono pertanto caratterizzate dalla proprietà che l'area di una *zona* (cioè di una regione compresa fra due piani perpendicolari all'asse dell'onda) è proporzionale all'altezza della zona; e in una stessa zona l'area compresa fra due piani uscenti dall'asse è proporzionale al diedro da essi formato. Questa proprietà è posseduta manifestamente dai cilindri circolari coassiali con l'onda e dalle sfere aventi il centro sull'asse.

Il problema non sembra solubile con le eleganti considerazioni geometriche che valgono nel caso dell'onda sferica. Lo affronteremo quindi per via analitica, seguendo il metodo tracciato da G. SANSONE (1).

2. – Riferiamoci da prima ad un sistema di assi cartesiani ortogonali dei quali z coincida con l'asse dell'onda cilindrica.

Sia $z = z(x, y)$ l'equazione della superficie. La distanza del punto (o, o, z) dell'asse dal piano tangente alla superficie in (x, y, z) è:

$$\frac{\left| x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

Pertanto l'illuminamento sarà proporzionale a

$$\frac{\left| x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right|}{(x^2 + y^2)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

Dato poi che, trovata una superficie soddisfacente al problema, se ne ottengono infinite altre per mezzo di omotetie rispetto all'ori-

(1) G. SANSONE, *loc. cit.*

gine, potremo porre semplicemente la condizione

$$\frac{\left| x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} \right|}{(x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y} \right)^2}} = 1$$

Questa è l'equazione differenziale delle nostre superficie.

Passando alle coordinale cilindriche con la trasformazione

$$x = \rho \cos \varphi \quad , \qquad y = \rho \sin \varphi$$

l'equazione per $z = z(\rho, \varphi)$ diviene

[1] $$(1 - \rho^2) \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 = \rho^2$$

Si tratta dunque di un'equazione del primo ordine non lineare.

3. – Dalla [1] risulta evidentemente che ρ (essenzialmente positiva) deve mantenersi sempre ≤ 1. Pertanto il primo termine sarà sempre positivo ed esisterà un $\lambda = \lambda(\rho, \varphi)$ tale che

[2] $$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \cosh \lambda \ , \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \rho \sinh \lambda$$

La condizione d'integrabilità di questo sistema ci dà l'equazione differenziale per λ

[4] $$\frac{\rho \sinh \lambda}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} - \rho \cosh \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \sinh \lambda$$

Il sistema differenziale ordinario associato con questa equazione lineare è

[5] $$\frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho \sinh \lambda} d\varphi = - \frac{1}{\rho \cosh \lambda} d\rho = \frac{1}{\sinh \lambda} d\lambda$$

La eguaglianza fra il secondo e terzo membro fornisce

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\lambda}{\operatorname{tangh}\lambda}, \quad \text{ovvero} \quad d(\log \rho \sinh \lambda) = 0$$

da cui

$$[6] \qquad \rho \sinh \lambda = c_1$$

con c_1 costante arbitraria.

Considerando poi l'eguaglianza fra il primo e il secondo membro della [5] e tenendo conto della [6], si ha

$$\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{c_1}\, d\varphi = -\frac{1}{\sqrt{c_1^2+\rho^2}}\, d\rho$$

per cui

$$\varphi + c_1 \int_1^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}\,\sqrt{c_1^2+\rho^2}} = c_2$$

essendo c_2 una costante arbitraria.

Con la trasformazione $\rho = \cos\theta$ si ha

$$\varphi - \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} \int_0^{\arccos \rho} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+c_1^2}\sin^2\theta}} = c_2$$

Chiamando allora $F(\theta, k)$ l'integrale ellittico di prima specie

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad (k \leqslant 1)$$

si può scrivere

$$\varphi - \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}\, F\left(\arccos \rho, \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}}\right) = c_2$$

e, ricordando la [6]

$$[7] \qquad \varphi - \frac{\rho \sinh \lambda}{\sqrt{1+\rho^2\sinh^2\lambda}}\, F\left(\arccos \rho, \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2\sinh^2\lambda}}\right) = c_2$$

Allora l'integrale generale dell'equazione [4] ha la forma

$$[8] \qquad f(c_1, c_2) = 0$$

essendo f una funzione arbitraria dei suoi argomenti e rappresentando c_1 e c_2 non più delle costanti, ma i primi membri della [6] e della [7] rispettivamente.

Infine, una volta fissata la f e ricavata λ dalla [8] in funzione di ρ e φ, le [2] forniscono per z

$$[9] \qquad z = \rho \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sinh \lambda(\rho, \varphi) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cosh \lambda(\rho, \varphi_0)\, d\rho$$

con φ_0 e ρ_0 costanti arbitrarie.

È questa l'equazione di una superficie avente la proprietà richiesta.

4. – Vediamo come si determina la f quando si prescrive che la superficie passi per la curva $z = \Phi(\varphi)$, tracciata sul cilindro $\rho = \rho_1$ con ρ_1 costante. Conviene allora scegliere la costante d'integrazione ρ_0 eguale a ρ_1. Così ponendo $\rho = \rho_1$ nella [9], si ottiene

$$\rho_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sinh \lambda(\rho_1, \varphi)\, d\varphi = \Phi(\varphi)$$

e derivando rispetto a φ

$$[10] \qquad \rho_1 \sinh \lambda(\rho_1, \varphi) = \Phi'(\varphi)$$

Si ricava in questo modo la funzione di φ $\lambda(\rho_1, \varphi)$. Sostituendola nella [6] e nella [7] e ponendo in esse $\rho = \rho_1$, si ottiene per ogni valore di φ un valore di c_1 e un valore di c_2. Ciò equivale a conoscere c_1 in funzione di c_2, cioè a conoscere la funzione f della [8]. Il problema è cosí risolto. In particolare le cose sono molto semplici se $\rho_1 = 1$, perchè in tal caso la [7] dà $c_2 = \varphi$ e dalla [6] e dalla [10] si ricava $c_1 = \Phi'(\varphi)$. Risulta allora $c_1 = \Phi'(c_2)$ e questa rappresenta la relazione [8].

Con un analogo ragionamento si potrebbe trovare la f quando si assegni il passaggio della superficie per una data curva del piano $\varphi = \varphi_1$.

5. – Interessante è il caso particolare in cui la f non dipende da c_2 ed è quindi $c_1 =$ costante. Ora dalla [6] si ha

$$\cosh \lambda = \sqrt{1 + \frac{c_1^2}{\rho^2}}$$

Sostituendo questa e la [6] nella [9] e prendendo, senza perdere in generalità, $\varphi_0 = 0$, $\rho_0 = 1$ si ottiene

$$z = c_1 \varphi + \int_1^\rho \frac{\sqrt{c_1^2 + \rho^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \, d\rho$$

che, ponendo $\rho = \cos\theta$ può scriversi

$$[11] \qquad z = c_1 \varphi - \sqrt{1 + c_1^2} \int_0^{\operatorname{arc\,cos} \rho} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + c_1^2} \sin^2\theta} \; d\theta$$

Allora, se chiamiano $\mathrm{E}(\theta, k)$ l'integrale ellittico di seconda specie

$$\mathrm{E}(\theta, k) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta} \, d\theta \qquad (k \leqslant 1)$$

si ha in definitiva

$$z = c_1 \varphi - \sqrt{1 + c_1^2} \; \mathrm{E}\left(\operatorname{arc\,cos} \rho, \frac{1}{\sqrt{1 + c_1^2}}\right)$$

È questa l'equazione della superficie in termini finiti. Ponendo $\rho =$ costante ci si convince subito che la superficie è generata da infinite eliche cilindriche col passo costante $2\pi c_1$. Ponendo invece $z =$ costante, si vede che le sezioni della superficie con i piani perpendicolari all'asse sono tutte eguali e ruotate l'una rispetto all'altra attorno all'asse. Si tratta di una superficie *elicoide* (¹).

(¹) L. Bianchi, *op. cit.*, I, pag. 285.

Per $c_1 = 0$ poi la [11] fornisce

$$z = \pm \sqrt{1 - \rho^2}$$

cioè l'equazione di una sfera col centro sull'asse. Sapevamo di dover trovare anche questa superficie.

6. - Avendo posto inizialmente $z = z(\rho, \varphi)$, abbiamo escluso dalla ricerca le eventuali superficie cilindriche con le generatrici parallele all'asse z. Bisogna quindi esaminare a parte questo caso, ponendo che la sezione normale del cilindro abbia l'equazione $\rho = \rho(\varphi)$.

Si sa che l'angolo formato dal raggio vettore con la normale alla superficie ha per tangente ρ'/ρ; pertanto il suo coseno sarà

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}}}$$

Dividendo per ρ si ottiene una quantità proporzionale all'illuminamento, che porremo eguale a 1. Abbiamo così

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = 1$$

Questa equazione differenziale ammette in primo luogo il semplice integrale $\rho = 1$, cioè un cilindro circolare coassiale con l'onda luminosa. Si tratta di un integrale singolare. Inoltre si ha l'integrale:

$$\rho = \sin(\varphi + c)$$

con c costante arbitraria, che rappresenta dei cilindri circolari, aventi una generatrice coincidente con l'asse dell'onda [1].

Nel terminare è mio gradito dovere ringraziare il Chiar.mo Prof. G. Sansone per l'interessamento a questo lavoro e per gli utili consigli.

---

(1) È curiosa la proprietà di queste ultime superficie che, qualora si pensino riflettenti specularmente, vengono illuminate uniformemente anche dai raggi che hanno subito 1, 2, ..., n riflessioni. La cosa può dimostrarsi facilmente con considerazioni geometriche.