

## SU UN PRINCIPIO FONDAMENTALE DELLA STATICA (\*)

GINO ARRIGHI

**SYMMARIVM.** — Novam illius legis, quae «parallelogramma virium» vocatur, demonstrationem Auctor tradit; qua ratione id obtinetur, ut fieri possit demonstratio quorundam principiorum, quae antea saepe postulata recensebantur.

§ 1. — In questa nota ci proponiamo precipuamente una dimostrazione analitica della «legge del parallelogrammo delle forze» la quale richieda un minor numero di condizioni analitiche relativamente alla funzione d'angolo. La equazione funzionale da noi trovata e risolta nel campo delle funzioni continue ci permette di compiere un passo non breve in tal senso giacchè, a parte la continuità che è pur ora richiesta, in luogo della esistenza di tutte le derivate in un punto (zero) è ora semplicemente richiesta la esistenza della sola derivata seconda generalizzata in tal punto<sup>(1)</sup>.

Reputiamo però che tale dimostrazione, nell'ordine di una critica ai fondamenti della statica, ha da vedersi nel quadro più ampio di una postulazione che, tenendo conto della immediatezza sperimentale o intuitiva che convengono a qualunque parte della fisica presenti un

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi nella Tornata dell' 8 febbraio 1948.

(<sup>1</sup>) LEONIDA-TONELLI, *Serie trigonometriche*. Zanichelli, Bologna, 1928, Cap. II, pag. 87.

carattere di minimo. Pertanto in tale senso abbiamo veduto anche questo problema di notevole interesse per la meccanica la quale, d'altronde, trova già trattati e approfonditi i corrispondenti problemi per altre scienze. Si vedrà così, e ciò sarà rapidamente accennato, che non pochi enunciati talvolta presentati quali postulati risultano dimostrabili.

A base del nostro studio abbiamo assunto quale definizione di forza, quella fornita da S. E. GIOVANNI GIORGI in quanto, per la sua precisione e accuratezza è stata preferita alle altre come più immediata e idonea a fornire una opportuna schematizzazione formale delle definizioni di equivalenza e di equilibrio. Riportiamo qui di seguito tale <sup>(1)</sup>.

**DEFINIZIONE I.** - *Forza è qualunque azione fisica, applicabile o removibile a volontà, che abbia gli stessi effetti meccanici come un filo teso, paragonabile e misurabile per confronto con altro determinato filo teso, assunto come campione.*

Indicando con  $T, S, S', \dots$  i sistemi, ovverosia aggregati, di forze e con  $S + S'$  l'aggregato di due sistemi  $S$  e  $S'$  ovverosia l'assieme di tutte le forze che costituiscono  $S$  e  $S'$ , rappresenteremo col simbolo  $(S)$  la totalità degli effetti meccanici che, per esservi applicato il sistema di forze  $S$ , sono determinati in un sistema materiale  $M$  il quale ad un istante  $t_0$  ha  $M_0$  e  $C_0$  quali configurazione e caratteristiche meccaniche. In realtà a tale simbolo avremmo dovuto apporre le indicazioni relative agli enti predetti ma che riteniamo come sottintese: ciò per semplicità di scrittura e per il fatto che nei ragionamenti che seguono si chiede che tale scelta sia fatta con totale arbitrarietà fra le compatibili anche, naturalmente, circa le possibilità di agire dei sistemi di forze. Premesso questo si pone

**DEFINIZIONE II.** - *Due sistemi, di forze  $S$  e  $S'$ , sono equivalenti quando, con un altro sistema  $T$  arbitrario, si abbia l'equivalenza degli effetti meccanici, espressa col simbolismo  $(T + S) = (T + S')$*

Dal carattere di equalità di tale definizione seguono le proprietà riflessive, simmetrica e transitiva della equivalenza.

**DEFINIZIONE III.** - *Un sistema  $S$  è in equilibrio quando, con un sistema  $T$  arbitrario, si abbia  $(T + S) = (T)$ .*

<sup>(1)</sup> GIOVANNI GIORGI, *I postulati della statica*. «Commentationes» della Pontificia Academia Scientiarum. Anno VII (1943), Vol. VII, n. 18.

ASSIOMA I. - *I caratteri di equivalenza ed equilibrio dei sistemi permangono per spostamenti rigidi dei sistemi stessi.*

A questo punto giova osservare che possono immediatamente dimostrarsi le note proprietà circa le aggregazioni di sistemi in equilibrio od equivalenti alcune delle quali sono talvolta presentate come postulati. Discende altresì che condizione necessaria e sufficiente affinché una forza sia in equilibrio è che la sua grandezza sia nulla.

§ 2. - Posti tali preliminari, dal criterio seguito per la misura della grandezza delle forze segue che la « legge del parallelogrammo » è provata nel caso particolare in cui le due forze abbiano direzione e senso, oltre che punto d'applicazione, identici, ma per procedere oltre è opportuno porre

POSTULATO I. *Condizione necessaria per l'equivalenza di due forze, entrambi non nulle, è che abbiano la stessa direzione.*

POSTULATO II. *Il sistema di due forze con grandezza e punto d'applicazione identici (non equiverse se con la stessa linea d'azione) è equivalente ad una forza con lo stesso punto d'applicazione (resultante).*

Dove la esclusione in inciso si riferisce a caso in cui la proprietà stessa è già provata. La risultante, quando non sia nulla, non può avere linea d'azione distinta dall'asse di simmetria del sistema altrimenti una rotazione di questo di ampiezza  $\pi$  attorno al predetto asse, rotazione che lascia inalterato il sistema, ci mostrerebbe la equivalenza di due forze con direzioni diverse e ciò contrariamente al postulato I; pertanto, detta  $x$  l'ampiezza dell'angolo (convesso o concavo) delle due linee d'azione orientate,  $a$  la grandezza comune delle due forze,  $\vec{i}$  il vettore unitario dell'asse predetto volto all'interno dell'angolo (indeterminato per  $x = \pi$ ), il vettore rappresentativo della risultante (escluso il caso citato) è fornito dalla

$$\vec{u} = f(a, x) \vec{i}$$

essendo  $a$  e  $x$  le uniche variabili da prendersi in considerazione. Con ragionamento dimensionale e ponendo  $f(1, x) = 2\varphi(x)$  si trova essere

$$[1] \quad \vec{u} = 2\varphi(x) a \vec{i}$$

dove:  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(2\pi - x) = -\varphi(x)$ . Poniamo adesso

ASSIOMA II. - *La grandezza della risultante è funzione continua dell'angolo delle due forze del sistema.*

Quindi, poichè dall'ultima delle precedenti si ha  $\varphi(\pi) = 0$ , segue che il sistema di due forze con lo stesso punto d'applicazione e vettori rappresentativi opposti è in equilibrio e che la [1] è comunque vera senza più la restrizione precedentemente fatta. Notiamo altresì che, con decomposizioni rese lecite per quanto fin qui detto, la « legge del parallelogrammo » è provata ora nel caso in cui le due forze, aventi direzione e punto d'applicazione identici, hanno senso e grandezza anche diversi. Segue pure che condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza di due forze con linea d'azione e punto d'applicazione identici è la eguaglianza dei loro vettori rappresentativi e che il sistema indicato nel postulato II non è in equilibrio quando le sue due forze hanno linee d'azione distinte. Ritornando alla [1] ci proponiamo adesso la determinazione della  $\varphi(x)$  che ivi compare e per la quale, ricapitolando, si ha

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\pi) = 0, \quad \varphi(2\pi) = -1$$

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{per } 0 \leq x < \pi, \quad \varphi(x) < 0 \quad \text{per } \pi < x \leq 2\pi$$

cioè la risultante è volta all'interno dell'angolo convesso delle due linee d'azione orientate.

Dette  $F_1$  e  $F_2$  le forze costituenti il sistema in parola, si considerino altre forze  $F_3$  e  $F_4$  con grandezza e punto d'applicazione identici a quelli delle precedenti e complanari con esse, essendo inoltre:  $\text{ang}(F_3, F_4) = \text{ang}(F_1, F_2) = x$ ,  $\text{ang}(F_1, F_3) = \text{ang}(F_2, F_4) = y$  con  $x$  e  $y$  non coscavi. Considerando che la risultante di  $F_1$  e  $F_2$  forma un angolo di ampiezza  $y$  con quella di  $F_3$  e  $F_4$  e la loro comune grandezza è  $2\varphi(x)a$  e che la risultante di  $F_1$  e  $F_4$  ha la stessa linea d'azione della risultante di  $F_2$  e  $F_3$ , tenendo conto di quanto sopra, si ricava

$$4\varphi(x)\varphi(y)a = 2\varphi(x+y)a + 2\varphi(x-y)a$$

ovvero

$$[2] \quad 2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$$

da cui discende subito:  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ . Dalla equazione funzionale [2] segue

$$\varphi(x) \frac{\varphi(y) - 2\varphi(0) + \varphi(-y)}{y^2} = \frac{\varphi(x+y) - 2\varphi(x) + \varphi(x-y)}{y^2}$$

quindi, quando esiste (finita) la derivata seconda generalizzata di  $\varphi(x)$  nel punto  $x=0$  ovverosia il

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y) - 2\varphi(0) + \varphi(-y)}{y^2} = k^2 \quad (\text{con } k \text{ reale o immaginario puro})$$

si avrà

$$D^2 \varphi(x) = k^2 \varphi(x)$$

essendo  $D^2$  il simbolo di derivazione seconda generalizzata cioè

$$D^2 \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+y) - 2\varphi(x) + \varphi(x-y)}{y^2}$$

Nel nostro caso non può aversi  $k^2 = 0$  altrimenti, per un teorema di SCHWARTZ<sup>(1)</sup>, avremmo che  $\varphi(x)$  è una funzione, lineare; ma, tenendo conto delle  $\varphi(0)=1$  e  $\varphi(-x)=\varphi(x)$ , resulterebbe sempre  $\varphi(x)=1$  il che non è. Atteso il carattere di continuità di  $\varphi(x)$  esiste una funzione (continua)  $\psi(x)$  tale che  $D^2 \psi(x) = k^2 \psi(x)$ , dove  $D^2$  è il simbolo di derivazione seconda ordinaria, d'altra parte è  $D^2 \psi(x) = D^2 \psi(x)$  e quindi

$$D^2[\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Da qui, per il precitato teorema di SCHWARTZ, discende

$$\varphi(x) = \psi(x) + px = q \quad (\text{con } p \text{ e } q \text{ costanti})$$

la quale ci assicura la esistenza della derivata seconda ordinaria di  $\varphi(x)$  eguale a quella della  $\psi(x)$ . Avremo in definitiva la equazione differenziale ordinaria

$$D^2 \varphi(x) = k^2 \varphi(x)$$

il cui integrale generale

$$c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \quad (\text{con } c_1 \text{ e } c_2 \text{ costanti arbitrarie}),$$

tenendo conto che  $\varphi(0)=1$ ,  $\varphi(\pi)=0$ ,  $\varphi(-x)=\varphi(x)$ , ci fornisce  $\varphi(x)=\cos \frac{x}{2}$ .

<sup>(1)</sup> Opera citata in nota <sup>(1)</sup> - Cap. II, pag. 96.

Pertanto, tenendo conto della [1], la «legge del parallelogramma», è provata nel caso particolare in cui le due forze abbiano eguale grandezza e, con facili successive generalizzazioni che si valgono volta a volta dei risultati precedentemente ottenuti<sup>(1)</sup>, risulta infine completamente dimostrata nel caso più generale.

§ 3. - Prima di concludere queste note osserviamo che, subito dopo la constatazione dell'equilibrio di un sistema costituito da due forze con vettori opposti rappresentativi e lo stesso punto d'applicazione fatto nel precedente paragrafo, possono immediatamente dimostrarsi le note proprietà circa le forze opposte ed i sistemi opposti agenti sopra i corpi rigidi quando si ponga l'ulteriore

POSTULATO III. - *Nell'agire sopra un corpo rigido, due forze con linea d'azione, senso e grandezza identici sono equivalenti.*

Ancora relativamente alle forze agenti sopra un corpo rigido siamo adesso in grado di risolvere i noti problemi di composizione e decomposizione. Il carattere di tipo, cioè la non equivalenza fra due qualunque di essi, per i sistemi ridotti (due forze sghembe, forza non nulla, coppia, equilibrio) ai quali ci si può sempre ridurre coi metodi testè accennati, può provarsi immediatamente con la introduzione di un nuovo postulato che potremmo, ad esempio, scegliere nella forma

POSTULATO IV. - *Esiste una coppia che non è in equilibrio.*

---

<sup>(1)</sup> VINCENZO AMICI, *Corso elementare di meccanica ed idraulica*. Ricordi, Firenze, 1840, Vol. I, Nota II, pag. 336, penultimo capoverso sino alla fine. Tale dimostrazione può evidentemente semplificarsi ancora.