PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XII - N. 18
pag. 199-214

LA TEORIA INVARIANTIVA DEL SISTEMA DIFFERENZIALE FORMATO DA DUE EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE QUALUNQUE (*)

NOTA PRIMA

ARMANDO CHIELLINI

SVMMARIVM. — Nunc primum determinatur completum systema invariantium differentialium, quod attinet ad systema differentiale lineare, constans ex duabus aequationibus ordinis n. Hanc autem determinationem Auctor ostendit fieri posse per simplicem indeterminatorum coëfficentium processum, antea posita quadam reducta eiusdem systematis forma.

1. - Consideriamo il sistema differenziale lineare

$$[1] \quad \left\{ \begin{aligned} & A\,Y^{(n)} + B\,Z^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} P_{1k}\, Y^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} Q_{1k}\, Z^{(n-k)} = 0 \\ & C\,Y^{(n)} + D\,Z^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} P_{2k}\, Y^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} Q_{2k}\, Z^{(n-k)} = 0 \end{aligned} \right.$$

sotto l'ipotesi che il determinante $\Omega(x) = AD - BC$ non sia identicamente nullo. In due miei precedenti lavori trattai degli invarianti differenziali relativi ad un sistema di due equazioni differenziali lineari del secondo ordine [1]; mi propongo ora di svolgere una ricerca ana-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi l'11 novembre 1948.

[1] CHIELLINI: *Sugli invarianti del sistema differenziale formato da due equazioni lineari ed omogenee del secondo ordine.* « Rendiconti Seminario Facoltà di Scienze di Cagliari », Vol. 10, fasc. 4, 1940; *Ancora sugli invarianti del sistema formato da due equazioni differenziali del secondo ordine e su classi di sistemi riducibili a coefficienti costanti.* « Pontificia Academia Scientiarum, Commentationes », Vol. VI, n. 10, anno VI, 1942.

loga, per il caso generale di un ordine n qualunque, per mostrare la intima analogia di tale ricerca con quella relativa alle equazioni lineari.

Il WILCZYNSKI (1), come già feci osservare brevemente nei due precitati lavori, stabilisce un effettivo sistema completo di invarianti lineari, per il caso $n=2$, mediante un procedimento quanto mai laborioso e pervenendo ad invarianti assai più complicati di quelli da noi ottenuti.

2. – Sotto l'ipotesi che il determinante $\Omega(x)=AD-BC$ non sia identicamente nullo, potremo sempre scrivere il sistema [1] sotto la forma esplicita

$$[2] \qquad \begin{cases} Y^{(n)} + \sum_{1}^{n}{}_{k} \binom{n}{k} p_{1k} Y^{(n-k)} + \sum_{1}^{n}{}_{k} \binom{n}{k} q_{1k} Z^{(n-k)} = 0 \\ Z^{(n)} + \sum_{1}^{n}{}_{k} \binom{n}{k} p_{2k} Y^{(n-k)} + \sum_{1}^{n}{}_{k} \binom{n}{k} q_{2k} Z^{(n-k)} = 0 \,, \end{cases}$$

dove i coefficienti $p_{ik}=p_{ik}(x)$, $q_{ik}=q_{ik}(x)$ sono funzioni della x, derivabili quanto occorre. Mediante il cambiamento di funzione incognita

$$Y(x)=\lambda(x)\cdot y(x) \;, \qquad Z(x)=\mu(x)\cdot z(x)$$

è sempre possibile, mediante operazioni di sola derivazione e sostitutuzione, ridurci al caso in cui sia $p_{11}=q_{21}=0$; basterà prendere λ e μ soddisfacenti alle condizioni

$$\bar{p}_{11}=\frac{n}{\lambda}(\lambda'+p_{11}\lambda)=0 \qquad \bar{q}_{21}=\frac{n}{\lambda}(\mu'+q_{21}\mu)=0$$

cioè

$$\lambda=e^{-\int p_{11}\,dx} \;, \qquad \mu=e^{-\int q_{21}\,dx}$$

(2) WILCZYNSKI: *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Teubner-Lipsia, 1906, Cap. IV.

Potremo quindi senz'altro partire dalla così detta *forma ridotta*

$$[3]\quad \begin{cases} Y^{(n)} + \quad * \quad + \binom{n}{2} p_{12} Y^{(n-2)} + \dots + p_{1n} Y + \\ \qquad\qquad + \binom{n}{1} q_{12} Z^{(n-1)} + \binom{n}{2} q_{12} Z^{(n-2)} + \dots + q_{1n} Z = 0 \\ Z^{(n)} + \binom{n}{1} p_{21} Y^{(n-1)} + \binom{n}{2} p_{22} Y^{(n-2)} + \dots + p_{2n} Y + \\ \qquad\qquad + \quad * \quad + \binom{n}{2} q_{22} Z^{(n-2)} + \dots q_{2n} Z = 0 \end{cases}$$

ed eseguire su di essa il cambiamento di funzioni e di variabile definito da

$$Y = \alpha y \ , \quad Z = \alpha z \ ; \quad \xi = \varphi(x) \quad (^1) \ .$$

Cominciamo ad eseguire da prima il cambiamento delle funzioni incognite e, per semplicità e brevità di scrittura, ci riferiremo alla sola prima equazione; sostituendo e raccogliendo opportunamente risulta

$$\alpha y^{(n)} + \binom{n}{1} \alpha' y^{(n-1)} + \binom{n}{2} (\alpha'' + p_{12} \alpha) y^{(n-2)} + \dots +$$
$$+ \binom{n}{1} q_{11} \alpha z^{(n-1)} + \left\{ \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} q'_{11} \alpha' + \binom{n}{2} q_{12} \alpha \right\} z^{(n-2)} + \dots = 0 \ ;$$

---

(1) Teniamo presente che tali trasformazioni formano un gruppo continuo, infinito, nel senso di Lie e che è il più ampio gruppo di trasformazioni puntuali che lasci invariata la forma del sistema lineare.

È opportuno poi, allo scopo di poter eseguire i necessari confronti e vedere in ciò che il caso generale differisce da quello di $n = 2$, riportare i risultati principali ottenuti nei miei precitati lavori, ritrascritti con le notazioni generali adottate nel presente; il sistema completo di invarianti per $n = 2$ è dato da

$$\begin{cases} \vartheta_1^{(1)} = q_{11} \\ \vartheta_2^{(1)} = q_{12} - q'_{11} \\ \vartheta_4^{(1)} = 2 q_{11} q''_{11} - 3 (q'_{11})^2 - 4 q_{11}^2 p_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vartheta_1^{(2)} = p_{21} \\ \vartheta_2^{(2)} = p_{22} - p'_{21} \\ \vartheta_4^{(2)} = 2 p_{21} p''_{21} - 3 (p'_{21})^2 - 4 p_{21} q_{22} \end{cases}$$

al quale sistema si aggiunge l'invariante di peso 2

$$\tau_2 = p_{12} - q_{22}$$

nel caso che sia nullo q_{11} o p_{21}. Se poi tanto q_{11} che p_{21} sono nulli, si ha l'altro sistema di invarianti

$$\begin{cases} \vartheta_2^{(1)} = q_{12} \\ \vartheta_6^{(1)} = 4 q_{12} q''_{12} - 5 (q'_{12})^2 - 16 q_{12}^2 p_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vartheta_2^{(2)} = p_{22} \\ \vartheta_6^{(2)} = 4 p_{22} p''_{22} - 5 (p'_{22})^2 - 16 p_{22}^2 q_{22} \end{cases}$$

cambiamo ora variabile ponendo $\xi = \varphi(x)$. Se teniamo presente la nota formula dello SCHLÖMILCH

$$\frac{d^m}{dx^m} = \sum_1^n{}_k \frac{A_{mk}}{k!} \frac{d^k}{d\xi^k}$$

dove le A_{mk} sono funzioni del tipo $f_n(\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n-k+1)})$, di peso n, se facciamo la convenzione di attribuire a $\xi^{(p)}$ e $(\xi')^p$ lo stesso peso p.

Eseguendo la sostituzione ed ordinando risulta

$$\alpha \frac{A_{nn}}{k!} \frac{d^n y}{d\xi^n} + \left\{ \frac{\alpha A_{n,n-1} + n\alpha' A_{n-1,n-1}}{(n-1)!} \right\} \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} +$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha A_{n,n-2} + n\alpha' A_{n-1,n-2} + \binom{n}{2}(\alpha'' + p_{12}\alpha) A_{n-2,n-2}}{(n-2)!} \right\} \frac{d^{n-2} y}{d\xi^{n-2}} + \ldots$$

$$\ldots + n\alpha q_{11} \frac{A_{n-1,n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} z}{d\xi^{n-1}} +$$

$$+ \left\{ \frac{n q_{11} \alpha A_{n-1,n-2} + \binom{n}{2}(2 q_{11} \alpha' + q_{12}\alpha) A_{n-2,n-2}}{(n-2)!} \right\} \frac{d^{n-2} z}{d\xi^{n-2}} + \ldots = 0$$

e analogamente per l'altra equazione.

Potremo scrivere simbolicamente il risultato complessivo della trasformazione nella maniera seguente

$$[3_1] \left\{ \begin{aligned} &\frac{\alpha A_{nn}}{n!} \frac{d^n y}{d\xi^n} + \frac{\sum_1^n{}_h \left\{ \sum_0^h{}_h \binom{n}{k} A_{n-h,n-h} (\alpha + p_1)^{(k)} \right\}}{(n-h)!} \frac{d^{n-h} y}{d\xi^{n-h}} + \\ &\qquad + \frac{\sum_1^n{}_h \left\{ \sum_1^h{}_k \binom{n}{k} A_{n-k,n-h} (\alpha + q_1)^{(k)} \right\}}{(n-h)!} \frac{d^{n-h} z}{d\xi^{n-h}} = 0 \\ &\frac{\alpha A_{nn}}{n!} \frac{d^n z}{d\xi^n} + \frac{\sum_1^n{}_h \left\{ \sum_1^h{}_k \binom{n}{k} A_{n-k,n-h} (\alpha + p_2)^{k} \right\}}{(n-h)!} \frac{d^{n-h} y}{d\xi^{n-h}} + \\ &\qquad + \frac{\sum_1^n{}_h \left\{ \sum_0^h{}_k \binom{n}{k} A_{n-h,n-h} (\alpha + q_2)^{k} \right\}}{(n-h)!} \frac{d^{n-h} z}{d\xi^{n-h}} = 0 \ , \end{aligned} \right.$$

purchè si facciano le convenzioni

$$\alpha^0 = \alpha,\ \alpha^r = \alpha^{(r)} \quad \begin{cases} (\alpha + p_1)^0 = \alpha\,, & p_1{}^0 = 0\,, \quad p_1{}^k = p_{1k}\,, \quad q_1{}^k = q_{1k} \\ (\alpha + q_2)^0 = \alpha\,, & q_2{}^0 = 0\,, \quad q_2{}^k = q_{2k}\,, \quad p_2{}^k = p_{2k} \end{cases} \quad (^1)$$

Affinchè il sistema trasformato assuma la forma ridotta, dovremo annullare il coefficiente di $\frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}}$ nella prima equazione e quello di $\frac{d^{n-1} z}{d\xi^{n-1}}$ nella seconda, il che porta alla equazione di condizione

$$\alpha \mathrm{A}_{n,\,n-1} + n\alpha' \mathrm{A}_{n-1,\,n-1} = 0$$

o anche, tenendo presenti le espressioni di $\mathrm{A}_{n,\,n-1}$ e $\mathrm{A}_{n-1,\,n-1}$ date nella nota (2), all'altra

[4] $$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{(n-1)}{2} \frac{\xi''}{\xi'} = 0\ .$$

---

(1) Le [3₁] del testo estendono, sulla maniera più semplice possibile ad un sistema di due equazioni differenziali di ordine n la formula analoga da noi stabilita per il caso di una sola equazione lineare (vedi CHELLINI: *Sulla effettiva riduzione di un'equazione differenziale lineare ed omogenea alla forma ridotta di Laguerre-Forsyth.* «Rendic. Sem. Facoltà di Scienze di Cagliari», Vol. VIII, fasc. 1, 1938).

(2) Mediante un procedimento ricorrente consigliato dal WILCZYNSKI (*loc. cit.*, pag. 19 e segg.) e da lui applicato nel caso di $k=1$, $k=2$, otteniamo per i primi valori dell'indice, le seguenti espressioni, che, come si vede, vanno rapidamente complicandosi, ma che crediamo utile riportare perchè non ancora calcolate e perchè sono necessarie nello svolgimento dei calcoli effettivi:

$$\mathrm{A}_{n,1} = \xi^{(n)}\,,\quad \mathrm{A}_{nn} = n\,!\,(\xi')^n,\quad \mathrm{A}_{n,n-1} = (n-1)\,!\binom{n}{2}\xi''(\xi')^{n-2}\,,$$

$$\mathrm{A}_{n,n-2} = (n-2)\,!\left\{\binom{n}{3}\xi'''(\xi')^{n-3} + 3\binom{n}{4}(\xi'')^2(\xi')^{n-4}\right\}$$

$$\mathrm{A}_{n,n-3} = (n-3)\,!\left\{\binom{n}{4}\xi^{\mathrm{IV}}(\xi')^{n-4} + 10\binom{n}{5}\xi'''\xi''(\xi')^{n-5} + 15\binom{n}{6}(\xi'')^3(\xi')^{n-6}\right\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{n,n-4} = (n-4)\,!\Big\{&\binom{n}{5}\xi^{\mathrm{V}}(\xi')^{n-5} + 5\binom{n}{6}[3\,\xi^{\mathrm{IV}}\xi'' + 2(\xi''')^2](\xi')^{n-6} + \\ &+ 105\binom{n}{7}\xi'''(\xi'')^2(\xi')^{n-7} + 105\binom{n}{8}(\xi'')^4(\xi')^{n-8}\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{n,n-5} = (n-5)\,!\Big\{&\binom{n}{6}\xi^{\mathrm{VI}}(\xi')^{n-6} + 7\binom{n}{7}[3\,\xi^{\mathrm{V}}\xi'' + 5\,\xi^{\mathrm{IV}}\xi'''](\xi')^{n-7} + \\ &+ 70\binom{n}{8}[3\,\xi^{\mathrm{IV}}(\xi'')^2 + 4(\xi''')^2\xi''](\xi')^{n-8} + 1260\binom{n}{9}\xi'''(\xi'')^3(\xi')^{n-9} + \\ &+ 945\binom{n}{10}(\xi'')^5(\xi')^{n-10}\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{n,n-6} = (n-6)\,!\Big\{&\binom{n}{7}\xi^{\mathrm{VII}}(\xi')^{n-7} + 7\binom{n}{8}[4\,\xi^{\mathrm{VI}}\xi'' + 8\,\xi^{\mathrm{V}}\xi''' + 5(\xi^{\mathrm{IV}})^2](\xi')^{n-8} + \\ &+ 14\binom{n}{9}[27\,\xi^{\mathrm{V}}(\xi'')^2 + 90\,\xi^{\mathrm{IV}}\xi'''\xi'' + 20(\xi''')^3](\xi')^{n-9} + 6300\binom{n}{10}(\xi''')^2(\xi'')^2(\xi')^{n-10} + \\ &+ 17\,325\binom{n}{11}\xi'''(\xi'')^4(\xi')^{n-11} + 10\,395\binom{n}{12}(\xi'')^6(\xi')^{n-12}\Big\}\,.\end{aligned}$$

3. – Se allora dividiamo entrambe le equazioni del sistema trasformato per il loro primo coefficiente $\frac{\alpha A_{nn}}{n!} = \alpha(\xi')^n$ ed indichiamo i nuovi coefficienti delle equazioni stesse con

$$\binom{n}{k} P_{ik}\,, \qquad \binom{n}{k} Q_{ik} \qquad\qquad (i=1,2)$$

avremo, per i primi valori dell'indice

$$\left\{\begin{aligned}
P_{12} &= \frac{1}{(\xi')^2}\left\{\frac{n-2}{3}\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{(n-2)(n-3)}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 + (n-2)\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\xi''}{\xi'} + \frac{\alpha''}{\alpha} + p_{12}\right\}\\
P_{13} &= \frac{1}{(\xi')^3}\left\{\frac{n-3}{4}\frac{\xi^{IV}}{\xi'} + \frac{(n-3)(n-4)}{2}\frac{\xi'''}{\xi'}\frac{\xi''}{\xi'} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{8}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^3 + \right.\\
&\quad + (n-3)\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{3(n-3)(n-4)}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{3(n-3)}{2}\frac{\alpha''}{\alpha}\frac{\xi''}{\xi'} + \\
&\quad \left. + \frac{3(n-3)}{2}p_{12}\frac{\xi''}{\xi'} + \frac{\alpha'''}{\alpha} + 3p_{12}\frac{\alpha'}{\alpha} + p_{13}\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{1}{\xi'}q_{11}\\
Q_{12} &= \frac{1}{(\xi')^2}\left\{(n-2)q_{11}\frac{\xi''}{\xi'} + 2\frac{\alpha'}{\alpha}q_{11} + q_{12}\right\}\\
Q_{13} &= \frac{1}{(\xi')^3}\left\{(n-3)q_{11}\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{3(n-3)(n-4)}{4}q_{11}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 + 3(n-3)q_{11}\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\xi''}{\xi'} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{3(n-3)}{2}q_{12}\frac{\xi''}{\xi'} + 3q_{11}\frac{\alpha''}{\alpha} + 3q_{12}\frac{\alpha'}{\alpha} + q_{13}\right\}\\
Q_{14} &= \frac{1}{(\xi')^4}\left\{(n-4)q_{11}\frac{\xi^{IV}}{\xi'} + 2(n-4)(n-5)q_{11}\frac{\xi'''}{\xi'}\frac{\xi''}{\xi'} + \right.\\
&\quad + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2}q_{11}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 + 4(n-4)q_{11}\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\xi'''}{\xi'} + 2(n-4)q_{12}\frac{\xi'''}{\xi'} + \\
&\quad + 3(n-4)(n-5)q_{11}\frac{\alpha'}{\alpha}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 + \frac{3(n-4)(n-5)}{2}q_{12}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 + 6(n-4)q_{11}\frac{\alpha''}{\alpha}\frac{\xi''}{\xi'} + \\
&\quad \left. + 6(n-4)q_{12}\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\xi''}{\xi'} + 2(n-4)q_{13}\frac{\xi''}{\xi'} + 4q_{11}\frac{\alpha'''}{\alpha} + 6q_{12}\frac{\alpha''}{\alpha} + 4q_{13}\frac{\alpha'}{\alpha} + q_{14}\right\}.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Introduciamo a questo punto la così detta funzione trasformatrice

$$\eta = \frac{\xi''}{\xi'}$$

da cui anche, per la [4]

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{n-1}{2}\eta \ ;$$

derivando successivamente si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\xi''}{\xi'} = \eta\,, \quad \frac{\xi'''}{\xi'} = \eta' + \eta^2\,, \quad \frac{\xi^{\mathrm{IV}}}{\xi'} = \eta'' + 3\eta\eta' + \eta^3 \ldots\ldots \\ &\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{n-1}{2}\eta, \quad \frac{\alpha''}{\alpha} = -\frac{n-1}{2}\eta' + \frac{(n-1)^2}{4}\eta^2, \\ &\frac{\alpha'''}{\alpha} = -\frac{n-1}{2}\eta'' + \frac{3(n-1)^2}{4}\eta\eta' - \frac{(n-1)^3}{8}\eta^3 + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

da cui sostituendo nelle espressioni precedenti, dopo calcoli un po' laboriosi, ma privi di ogni difficoltà, risulta

$$[5]\quad \left\{\begin{aligned} &P_{12} = \frac{1}{(\xi')^2}\left\{\frac{-2(n+1)\eta' + (n+1)\eta^2 + 12p_{12}}{12}\right\} \\ &P_{13} = \frac{1}{(\xi')^3}\left\{\frac{-(n+1)\eta'' + 3(n+1)\eta\eta' - (n+1)\eta^3 - 12p_{12}\eta + 4p_{13}}{4}\right\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$[6]\quad \left\{\begin{aligned} &Q_{11} = \frac{1}{\xi'}q_{11} \\ &Q_{12} = \frac{1}{(\xi')^2}\left\{q_{11}\eta + q_{12}\right\} \\ &Q_{13} = \frac{1}{(\xi')^3}\left\{\frac{-2(n+3)q_{11}\eta' + (n+9)q_{11}\eta^2 - 12q_{12}\eta + 4q_{13}}{4}\right\} \\ &Q_{14} = \frac{1}{(\xi')^4}\left\{\frac{-2(n+2)q_{11}\eta'' + 2(4n+11)q_{11}\eta\eta' - (3n+15)q_{11}\eta^3 - 2(n+5)q_{12}\eta' + (n+23)q_{12}\eta^2 - 12q_{13}\eta + 2q_{14}}{2}\right\} \end{aligned}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e formule analoghe si avrebbero per i coefficienti della seconda equazione, scambiando la lettera p con la lettera q e il primo indice 1 con l'indice 2.

4. – Stabilite così le formule [5] e [6], per poter risolvere la questione propostaci e cioè quella di determinare un sistema completo di invarianti, facciamo le seguenti considerazioni:

Poichè ogni equazione del sistema ridotto contiene $2n-1$ coefficienti, avremo in totale $2(2n-1)$ coefficienti e quindi per poter stabilire una teoria invariantiva completa dovremo determinare altrettanti $2(2n-1)$ invarianti differenziali lineari.

Un semplice esame delle [5], riguardanti i coefficienti P_{ik} della prima equazione (e delle analoghe riguardanti i coefficienti Q_{2k} della seconda) ci fa vedere che se ne possono immediatamente ottenere $2(n-1)$, osservando che tali relazioni coincidono perfettamente con quelle che si hanno per la determinazione di un sistema completo di invarianti, relativi alle equazioni lineari di una sola funzione incognita (¹). E d'altra parte, è naturale che così avvenga, se solo teniamo presente la natura delle equazioni costituenti il nostro sistema differenziale; infatti in ognuna di tali equazioni il complesso dei termini in y è del tutto indipendente da quello dei termini in z, a causa della *linearità* delle equazioni stesse, così che sarà possibile scindere la ricerca degli invarianti in due parti: quella riguardante i coefficienti in y e quella riguardante i coefficienti in z. D'altra parte i termini in y della prima equazione (e quelli in z della seconda) formano una ordinaria equazione differenziale lineare di ordine n.

Ne consegue che gli invarianti relativi a questi coefficienti si otterranno senz'altro da quelli delle equazioni lineari.

Per ragioni di omogeneità e di economia di simboli, indicheremo questa volta con la sola lettera $\theta^{(i)}$, affetta da un indice, tali invarianti e quindi potremo senz'altro scrivere il primo gruppo

(¹) Confronta per es., il nostro lavoro citato a pag. 199, nota (¹).

di $2(n-1)$ invarianti

$$
[I_1]\quad\begin{cases}
\theta_3^{(1)}=p'_{13}-\dfrac{3}{2}\,p'_{12}\\[2mm]
\theta_4^{(1)}=p_{14}-2p'_{13}+\dfrac{6}{5}\,p''_{12}-\dfrac{3(5n+7)}{5(n+1)}\,p_{12}^2\\[2mm]
\theta_5^{(1)}=p_{15}-\dfrac{5}{2}\,p'_{14}+\dfrac{15}{7}\,p''_{13}-\dfrac{5}{7}\,p'''_{12}-\dfrac{10(7n+13)}{n+1}\,p_{12}\,\theta_3^{(1)}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta_{3,1}^{(1)}=6\,\theta_3^{(1)}\left[\theta_3^{(1)}\right]''-7\left[\theta_3^{(1)}\right]'^2-\dfrac{108}{n+1}\,p_{12}\left[\theta_3^{(1)}\right]^2
\end{cases}
$$

. . . .

$$
[I_2]\quad\begin{cases}
\theta_3^{(2)}=q_{23}-\dfrac{3}{2}\,q''_{22}\\[2mm]
\theta_4^{(2)}=q_{24}-2\,q'_{23}+\dfrac{6}{5}\,q''_{22}-\dfrac{3(5n+7)}{5(n+1)}\,q_{22}^2\\[2mm]
\theta_5^{(2)}=q_{25}-\dfrac{5}{2}\,q'_{24}+\dfrac{15}{7}\,q''_{23}-\dfrac{5}{7}\,q'''_{22}-\dfrac{10(7n+13)}{n+1}\,q_{22}\,\theta_3^{(2)}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta_{3,1}^{(2)}=6\,\theta_3^{(2)}\left[\theta_3^{(2)}\right]''-7\left[\theta_3^{(2)}\right]'^2-\dfrac{108}{n+1}\,q_{22}\left[\theta_3^{(2)}\right]^2\quad(^1)\ .
\end{cases}
$$

5. – Rimangono da determinare ancora $2n$ invarianti lineari, che indicheremo con la lettera $\vartheta^{(i)}$, anche questa volta affetta da un indice, e a questo scopo cominciamo con l'osservazione che le [6] ci fanno subito vedere come q_{11} (e analogamente p_{21}) sia un invariante relativo di peso 1, così che potremo scrivere

$$\vartheta_1^{(1)}=q_{11}\ ,\qquad \vartheta_1^{(2)}=p_{21}\ ;$$

(1) WILCZYNSKI: *loc. cit.*; MONTALDO: *La determinazione effettiva degli invarianti differenziali lineari di un'equazione differenziale lineare dell'ordine n.* « Rend. Semin. Facoltà di Scienze di Cagliari », Vol. VIII, fasc. 4, 1938.

se poi deriviamo la prima delle [6] rispetto alla x risulta

$$\frac{d\,Q_{11}}{d\xi}\,\xi' = -\frac{\xi''}{(\xi')^2}\,q_{11} + \frac{1}{\xi'}\,q'_{11} = \frac{1}{\xi'}\,(-\eta\, q_{11} + q'_{11})$$

cioè $\dfrac{d\,Q_{11}}{d\,\xi} = \dfrac{1}{(\xi')^2}\,(-q_{11}\,\eta + q'_{11})$, da cui segue senz'altro, per la seconda delle [6]

$$Q_{12} - \frac{d\,Q_{11}}{d\xi} = \frac{1}{(\xi')^2}\,(q_{12} - q'_{11})\,.$$

Si ottiene così una seconda coppia di invarianti di peso 2:

$$\vartheta_2^{(1)} = q_{12} - q'_{11} \quad , \qquad \vartheta_2^{(2)} = p_{22} - p'_{21}$$

e rimangono da determinare $n-2$ coppie di invarianti, relativi ai coefficienti P_{2k} e Q_{1k}, il che otterremo, come si è già accennato in principio, mediande un procedimento di coefficienti indeterminati del tutto analogo a quello consigliato dallo SCHLESINGER (1) per le equazioni differenziali lineari in una funzione incognita e già da me applicato ai sistemi lineari, per il caso di $n=2$; tale procedimento, oltre al vantaggio di richiedere calcoli un po' laboriosi, ma di nessuna difficoltà concettuale, presenta l'altro di dimostrarci contemporaneamente la effettiva esistenza di un sistema completo di invarianti.

Però, prima di procedere a questa ricerca è necessario premettere una opportuna semplificazione delle [6] stesse, per poter ottenere lo scopo (2).

Introduciamo i rapporti

$$\overline{Q}_{1k} = \frac{Q_{1k}}{Q_{11}} \quad , \qquad \bar{q}_{1k} = \frac{q_{1k}}{q_{11}}$$

---

(1) Confronta SCHLESINGER: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*. Band II, Theil I, § 181 e segg. Teubner, Lipsia.

(2) Per semplicità di calcoli ci riferiremo esclusivamente ai coefficienti q_{1k}, chè, analogamente si potrebbe procedere con i p_{2k}; solo nel risultato finale scriveremo le formule per entrambe le equazioni.

ed allora, a partire dalla seconda equazione, le [6] divengono

$$
[8] \quad \left\{
\begin{aligned}
&\overline{Q}_{12} = \frac{1}{\xi'} \Big\} \eta + \bar{q}_{12} \Big\{ \\
&\overline{Q}_{13} = \frac{1}{(\xi')^2} \Big\} - \frac{(n+3)}{2} \eta' + \frac{n+9}{4} \eta^2 - 3\, \bar{q}_{12}\, \eta + \bar{q}_{13} \Big\{ \\
&\overline{Q}_{14} = \frac{1}{(\xi')^3} \Big\} - (n+2)\, \eta'' + (4n+11)\, \eta \eta' - \frac{(3n+15)}{2} \eta^3 - (n+5)\, \bar{q}_{12}\, \eta' + \\
&\qquad\qquad + \frac{n+23}{2} \bar{q}_{12}\, \eta^2 - 6\, \bar{q}_{13}\, \eta + \bar{q}_{14} \Big\{ \; {}^{(1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

alle quali è necessario aggregare un'altra relazione, che si ottiene nella maniera seguente: deriviamo logaritmicamente, rispetto alla x, la prima delle [6] e si ottiene

$$
\frac{d \log Q_{11}}{d\xi} = \frac{1}{\xi'} \Big\{ \frac{d \log q_{11}}{dx} - \eta \Big\}
$$

da cui, ponendo per brevità

$$
\overline{R}_{11} = \frac{d \log Q_{11}}{d\xi} \quad , \quad \bar{r}_{11} = \frac{d \log q_{11}}{dx}
$$

segue l'ulteriore relazione cercata

$$
[8_1] \qquad \overline{R}_{11} = \frac{1}{\xi'} (-\eta + \bar{r}_{11}) \,.
$$

Ciò fatto, per determinare un primo nuovo invariante, consideriamo le altre relazioni

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\overline{R}_{11}}{d\xi} = \frac{1}{(\xi')^2} \Big\} - \eta' + \eta^2 - \bar{r}_{11}\, \eta + \bar{r}'_{12} \Big\{ \\
&\frac{d\overline{Q}_{12}}{d\xi} = \frac{1}{(\xi')^2} \Big\} - \eta' + \eta^2 - \bar{q}_{12}\, \eta + \bar{q}'_{12} \Big\{ \\
&\overline{R}_{11}\, \overline{Q}_{12} = \frac{1}{(\xi')^2} \Big\} \eta^2 - \bar{q}_{12}\, \eta - \bar{r}_{11}\, \eta + \bar{r}_{11}\, \bar{q}_{12} \Big\{ \,,
\end{aligned}
\right.
$$

(1) Tale semplificazione, oltre al vantaggio di abbassare di un'unità l'esponente del modulo di trasformazione (ξ') e quindi di condurci a calcoli più semplici, presenta quello di far sparire esplicitamente q_{11}, così che le [8] acquistano un aspetto assai analogo a quello delle p_{1k}.

dopo di che, indicando con A, B, C, D, E dei coefficienti numerici, per ora del tutto arbitrarii, calcoliamoci l'espressione:

$$J = \overline{Q}_{13} + A\,\frac{d\overline{Q}_{12}}{d\xi} + B\,\frac{d\overline{R}_{11}}{d\xi} + C\,\overline{R}_{11}\,\overline{Q}_{12} + D\,\overline{R}_{11}^2 + E\,\overline{Q}_{12}^2\,;$$

avremo senz'altro

$$[9] \qquad \begin{aligned} J(\xi) = \frac{1}{(\xi')^2}\Big\{ & J(x) - \left(\frac{n+3}{2} + A + B\right)\eta' + \\ & + \left(\frac{n+9}{4} + A + B + C + D + E\right)\eta^2 - (A+C+2E+3)\,q_{12}\,\eta - (B+C+2D)\,r_{11}\,\eta \Big\} \end{aligned}$$

e vediamo se è possibile di determinare i coefficienti, in guisa che si abbia

$$A+B+\frac{n+3}{2}=0,\quad A+B+C+D+E+\frac{n+9}{4}=0,\quad A+C+2E+3=0,\quad B+C+2D=0.$$

Eseguendo i calcoli otteniamo

$$A = -\frac{n+9}{4},\quad B = -\frac{n-3}{4},\quad C = \frac{n-3}{4},\quad D = E = 0$$

ed allora dalla [9] si deduce che l'espressione

$$\bar{q}_{13} - \frac{n+9}{4}\,\bar{q}'_{12} - \frac{n-3}{4}\,\bar{r}'_{11} + \frac{n-3}{4}\,\bar{r}_{11}\,\bar{q}_{12}$$

è un invariante relativo di peso 2. Introducendo in questa le [7] ed eseguendo i calcoli segue che

$$\vartheta_4^{(1)} = q_{11}\,q_{13} - \frac{n+9}{4}\,q_{11}\,q'_{12} + \frac{n+3}{2}\,q'_{11}\,q_{12} - \frac{n-3}{4}\,q_{11}\,q''_{11} + \frac{n-3}{4}\,(q'_{11})^2$$

è un nuovo invariante relativo di peso 4; analogamente poi avremo l'altro invariante di peso 4

$$\vartheta_4^{(2)} = p_{21}\,p_{23} - \frac{n+4}{9}\,p_{21}\,p'_{22} + \frac{n+3}{2}\,p'_{21}\,p_{22} - \frac{n-3}{4}\,p_{21}\,p''_{21} + \frac{n-3}{4}\,(p'_{21})^2\,.$$

Procedendo in maniera analoga potremo trovarci un'altra coppia di invarianti, riguardanti i coefficienti $Q_{1,4}$ e $P_{2,4}$ e così di seguito.

6. – Ottenuti così i varii invarianti relativi ai coefficienti $Q_{1,k}$ e $P_{2,k}$, è da fare un'osservazione che ci semplifica, per il caso di $n \geqslant 3$, notevolmente il calcolo dgli invarianti $\theta_k^{(i)}$; infatti per ottenere un sistema completo relativo ai coefficienti $P_{1,k}$ e $Q_{2,k}$ (com'è ben noto dalla teoria delle equazioni lineari) dobbiamo aggiungere agli invarianti lineari $\theta_3^{(i)}, \theta_4^{(i)}, \dots \theta_n^{(i)}$, che sono in numero di $2(n-2)$ altri due invarianti di peso 8 (non più lineari) e cioè le così dette *quadriderivate* $\theta_{3,1}^{(i)}$ di $\theta_3^{(i)}$, ottendosi così appunto i $2(n-1)$ invarianti necessari.

Però nel caso dei sistemi, non appena n è maggiore di 2, possiamo sostituire alle quadriderivate di $\theta_3^{(i)}$ quelle di $\vartheta_1^{(1)} = q_{11}$, $\vartheta_1^{(2)} = p_{21}$, che, essendo invarianti di peso 1, daranno luogo a quadriderivate di peso 4, invece che di peso 8. Infatti, ricordando il risultato fondamentale di FORSYTH, relativo alla quadriderivata $\theta_{m,1}$ di un invariante θ_m:

$$\theta_{m,1} = 2m\,\theta_m\,\theta_m'' - (2m+1)(\theta_m')^2 - \frac{12m^2}{n+1} p_2\,\theta_m^2\,,$$

che risulta di peso $2(m+1)$, otterremo senz'altro i due nuovi invarianti di peso 4

$$\theta_{1,1}^{(1)} = 2q_{11}\,q_{11}'' - 3(q'_{11})^2 - \frac{12}{n+1} q_{12}\,q_{11}^2\,, \quad \theta_{1,1}^{(2)} = 2p_{21}\,p_{21}'' - (p'_{21})^2 - \frac{12}{n+1} q_{22}\,p_{21}^2$$ (1)

che converrà sostituire agli altri $\theta_{3,1}^{(i)}$

7. OSSERVAZIONE. – Il procedimento tenuto cade evidentemente in difetto, se $q_{1,1}$ si annulla; ma in tal caso le [6] diventano

$$\left\{\begin{aligned}
Q_{12} &= \frac{1}{(\xi')^2}\, q_{12} \\
Q_{13} &= \frac{1}{(\xi')^3} \left\{ -3q_{12}\,\eta + q_{13} \right\} \\
Q_{14} &= \frac{1}{(\xi')^4} \left\{ -(n+5)q_{12}\,\eta' + \frac{n+23}{2}\, q_{12}\,\eta^2 - 6q_{13}\,\eta + q_{14} \right\} \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.$$

(1) Questi invarianti sono quelli da noi ottenuti direttamente [vedi nota (1), pag. 201] nella ricerca degli invarianti differenziali relativi ad un sistema di 2 equazioni lineari del 2° ordine.

ed allora si procederà con $q_{1,2}$ e $Q_{1,2}$ [1] come, nel caso precedente, si è proceduto con q_{11} e $Q_{1,1}$; avremo

$$\frac{d\,Q_{12}}{d\xi} = \frac{1}{(\xi')^3}\left\{-2q_{12}\eta + q'_{12}\right\}$$

da cui senz'altro, l'invariante relativo di peso 3

$$\vartheta_3^{(1)} = q_{13} - \frac{3}{2}\,q'_{12} \quad (^2)$$

Dopo di che si introdurrebbero le espressioni

$$R_{12} = \frac{d\log Q_{12}}{d\xi}\,, \qquad r_{12} = \frac{d\log q_{12}}{dx}$$

da cui

$$R_{12} = \frac{1}{\xi'}\left\{-2\eta + r_{12}\right\}\,,$$

e i rapporti

$$\overline{Q}_{1k} = \frac{Q_{1k}}{Q_{12}}\,, \quad \bar{q}_{1k} = \frac{q_{1k}}{q_{12}}$$

per mezzo dei quali otterremmo le espressioni

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{Q}_{13} = \dfrac{1}{\xi'}\left\{-3\eta + \bar{q}_{13}\right\} \\ \overline{Q}_{14} = \dfrac{1}{(\xi')^2}\left\{-(n+5)\,\eta' + \dfrac{n+23}{2}\,\eta^2 - 6\bar{q}_{13}\,\eta + \bar{q}_{14}\right\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. ;$$

dopo si procederebbe in maniera del tutto analoga al caso generale. Si troverebbe per esempio che

$$\bar{q}_{14} - \frac{(n+23)}{6}\,\bar{q}'_{13} - \frac{n-13}{4}\,\bar{r}'_{12} + \frac{n+13}{12}\,\bar{r}_{12}\,\bar{q}_{13}$$

---

(1) Risulta che $q_{1,2}$, in questo caso è un invariante di peso due.

(2) In generale, se fosse $q_{11} = q_{12} = \ldots = q_{1,k-2} = 0$, $q_{1,k-1} \neq 0$ si avrebbe l'invariante $\vartheta_k^{(1)} = q_{1k} - \frac{k}{2}\,q'_{k-1}$. È poi quasi superfluo osservare che se $q_{11} = 0$, $q_{12} \neq 0$ ci serviremmo di q_{12} per stabilire la quadriderivata $\theta_{2,1}^{(1)}$ di peso sei. Se invece anche q_{12} fosse zero, potremmo servirci, a questo scopo, indifferentemente di q_{13} o di θ_3 (che la quadriderivata risulterebbe ugualmente di peso 8).

risulta un invariante relativo di peso due e che sostituendo ai rapporti $\bar{r}_{12}, \bar{q}_{13}, \bar{q}_{14}$ le loro espressioni, si avrebbe un invariante relativo di peso quattro per $q_{1,4}$ e così di seguito. Ma non crediamo necessario dilungarci ulteriormente su di ciò.

8. – Stabilita nei numeri precedenti la maniera di ottenere un sistema di invarianti relativi, dimostriamo, anche per i sistemi, il così detto *Teorema di chiusura* o *Teorema di Laguerre-Forsyth:*

Dati gli invarianti

$$\theta_m^{(1)}, \ \theta_m^{(2)}; \ \vartheta_m^{(1)}, \ \vartheta_m^{(2)}$$

come funzioni arbitrarie delle x e le due quadriderivate del primo dei $\vartheta^{(i)}$ $(i=1,2)$ diverso da zero, restano completamente determinati i coefficienti del sistema differenziale [3].

Infatti dagli invarianti $\vartheta_m^{(i)}$ otteniamo senz'altro, per via ricorrente, i q_{1k}, p_{2k} e dalle due quadriderivate di $\vartheta^{(i)}$ i due coefficienti p_{12}, q_{22}, dopo di che, sempre per via ricorrente, dagli invarianti $\theta_k^{(i)}$, avremo i p_{1k} e q_{2k}.

Se ne deduce che il sistema di invarianti da noi ottenuto costituisce un *sistema fondamentale*; da esso potremo allora ottenere immediatamente il corrispondente sistema fondamentale di *invarianti assoluti*, ponendo per esempio

$$J_k^{(i)} = \frac{\theta_k^{(i)}}{\{\vartheta_1^{(1)}\}^k}, \qquad J_k^{(i)} = \frac{\vartheta_k^{(i)}}{\{\vartheta_1^{(1)}\}^k} \ (^1) \ .$$

In una prossima nota vedremo come si possano utilmente sfruttare gli invarianti lineari, da noi costruiti, per lo studio dell'integrazione dei sistemi differenziali lineari.

---

(1) Se il primo dei $\vartheta^{(i)}$ diverso da zero fosse $\vartheta_k^{(i)}$ considereremo i rapporti $\dfrac{\{\theta_m^{(i)}\}^k}{\{\theta_k^{(i)}\}^m}$.