PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XII - N. 24
pag. 279-291

LA TEORIA INVARIANTIVA DEL SISTEMA DIFFERENZIALE FORMATO DA DUE EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE QUALUNQUE.

I SISTEMI RIDUCIBILI A COEFFICIENTI COSTANTI (*)

NOTA SECONDA

ARMANDO CHIELLINI

SVMMARIVM. — Ea quae in alia eiusdem nominis dissertatione conclusit, Auctor adhibet ad investiganda systemata non reducibilia, quorum coëfficientia sint constantia. Perpendit deinceps Fuchsiana systemata et pseudosystemata primae speciei, et, posito $n=3$, de eo, quem exceptum vocant casum, disserit, cuius geometricam dat interpretationem.

1. – Considerato un sistema lineare di forma ridotta

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{12}y^{(n-2)} + \dots + p_{1n}y + q_{11}z^{(n-1)} + q_{12}z^{(n-2)} + \dots + q_{1n}z = 0 \\ z^{(n)} + p_{21}y^{(n-1)} + p_{22}y^{(n-2)} + \dots + p_{2n}y + q_{22}z^{(n-2)} + \dots + q_{2n}z = 0 \, , \end{cases}$$

osserviamo che, se fosse a coefficienti costanti, tanto i suoi invarianti relativi che assoluti risulterebbero costanti; allora, dato il significato di invariante assoluto, possiamo senz'altro enunciare il TEOREMA: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare, di forma ridotta, sia riducibile ad uno a coefficienti costanti, è che i suoi invarianti assoluti risultino costanti.*

Osserviamo subito a questo proposito (analogamente a quanto si è osservato altrove per le equazioni lineari) che l'importanza pratica di questo teorema, a prima vista, è assai relativa, in quanto che per

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi l'11 novembre 1948.

un qualunque sistema differenziale, il verificare se effettivamente tutti i suoi invarianti assoluti risultano costanti, è praticamente impossibile, data l'enorme complicazione dei calcoli a cui andremmo incontro, senza parlare poi del fatto che la forma esplicita degli invarianti stessi andrebbe di volta in volta calcolata.

Però tale teorema si presta egualmente a darci un risultato di importanza pratica effettiva, perchè ci permette di *stabilire quella sostituzione che* (indipendentemente dalla preventiva conoscenza della possibilità) *attua la trasformazione del sistema dato in un altro a coefficienti costanti*, se tale trasformazione è possibile (cioè se siamo nelle condizioni richieste dal precedente teorema).

2. – A questo scopo infatti cominciamo con l'osservare che se gli invarianti assoluti sono costanti, cioè se si ha

$$J_m^{(i)} = k_i \ , \qquad j_m^{(i)} = h_i \ , \qquad (k_i, h_i \ \mathrm{cost^{ti}})$$

derivando logaritmicamente segue

$$\frac{\{\theta_m^{(i)}\}'}{\theta_m^{(i)}} - m\,\frac{\{\vartheta_1^{(1)}\}'}{\vartheta_1^{(1)}} = 0 \ , \qquad \frac{\{\vartheta_m^{(i)}\}'}{\vartheta_m^{(i)}} - \frac{m\,\{\vartheta_1^{(1)}\}'}{\vartheta_1^{(1)}} = 0$$

da cui

$$\frac{\{\theta_m^{(i)}\}'}{m\,\theta_m^{(i)}} = \frac{\{\vartheta_m^{(i)}\}'}{m\,\vartheta_m^{(i)}} = \frac{\{\vartheta_1^{(1)}\}'}{\vartheta_1^{(1)}}$$

Ciò premesso, riprendiamo le formule stabilite nella nota prima, relative al sistema trasformato

$$\left\{\begin{array}{l} P_{12} = \dfrac{1}{(\xi')^2}\left\{\dfrac{-2(n+1)\eta' + (n+1)\eta^2 + 12p_{12}}{12}\right\} \\[2ex] P_{13} = \dfrac{1}{(\xi')^3}\left\{\dfrac{-(n+1)\eta'' + 3(n+1)\eta\eta' - (n+1)\eta^3 - 12p_{12}\eta + 4p_{13}}{4}\right\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} Q_{11} = \dfrac{1}{\xi'}\,q_{11} \\[2ex] Q_{12} = \dfrac{1}{(\xi')^2}\left\{-q_{11}\eta + q_{12}\right\} \\[2ex] Q_{13} = \dfrac{1}{(\xi')^3}\left\{\dfrac{-(n+3)}{2}\,q_{11}\eta' + \dfrac{n+9}{4}\,q_{11}\eta^2 - 3q_{12}\eta + q_{13}\right. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

e le analoghe per P_{2k}, Q_{2k} ed imponiamo la condizione che i coefficienti P, Q risultino costanti, cioè che le loro derivate siano nulle. Otterremo in tal maniera $2(2n-1)$ equazioni differenziali nella qualità η, le quali dovranno essere tra loro compatibili; andremo quindi a stabilire tale compatibilità.

A questo scopo cominciamo con l'osservare che i coefficienti P_{1k}, Q_{2k} sono dati dalle stesse espressioni (salvo scambiare p_{1k} con q_{2k}) le quali, a loro volta, coincidono come si è osservato al n. 4 del lavoro precedente, con quelle che si ottengono nel caso delle equazioni lineari in una sola funzione incognita e quindi la compatibilità delle condizioni relative ad essi è già stata verificata a suo tempo [1], ottenendosi le relazioni

$$\eta = \frac{[\theta_3^{(i)}]'}{3\,\theta_3^{(i)}} = \frac{[\theta_4^{(i)}]'}{4\,\theta_4^{(i)}} = \dots = \frac{[\theta_n^{(i)}]'}{n\,\theta_n^{(i)}}\,.$$

Resterà quindi da verificare la compatibilità delle equazioni in η, che si ottengono derivando Q_{1k} e P_{2k}; cominciando a derivare le coppie di coefficienti

$$(Q_{11}\,,\ P_{21});\ (Q_{12}\,,\ P_{22});\ \dots$$

ed imponendo la condizione che tali derivate risultino nulle, otteniamo le coppie di condizioni in η:

$$[a]\qquad \begin{cases} -\eta\, q_{11} + q'_{11} = 0 \\ -\eta\, p_{21} + p'_{21} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$[b]\qquad \begin{cases} -q_{11}\,\eta' + 2q_{12}\,\eta^2 - q'_{11}\,\eta - 2q_{12}\,\eta + q'_{12} = 0 \\ -p_{21}\,\eta' + 2p_{22}\,\eta^2 - p'_{21}\,\eta - 2p_{22}\,\eta + p'_{22} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

e imponiamo la condizione che tali equazioni risultino tra loro compatibili.

---

[1] Vedi lavoro citato a nota 5 della memoria precedente e cioè: CHIELLINI: *Sulla effettiva riduzione di un'equazione differenziale lineare ed omogenea alla forma ridotta di Laguerre-Forsyth.* « Rend. Facoltà di Scienze di Cagliari », vol. VIII, 1938.

Cominceremo a stabilire la compatibilità delle (a) tra di loro, poi della prima delle $[a]$ con la prima delle $[b]$ e della seconda delle $[a]$ con la seconda delle $[b]$ e così di seguito.

Dalle $[a]$ eliminando η, si ottiene $\frac{q'_{11}}{q_{11}} = \frac{p'_{21}}{p_{21}}$ cioè senz'altro

$$\eta = \frac{[\vartheta_1^{(1)}]'}{\vartheta_1^{(1)}} = \frac{[\vartheta_1^{(2)}]'}{\vartheta_1^{(2)}} ;$$

dalla prima delle $[a]$ si deduce poi $\eta = \frac{q'_{11}}{q_{11}}$, da cui derivando

$$\eta' = \frac{q''_{11}}{q_{11}} - \left(\frac{q'_{11}}{q_{11}}\right)^2$$

e sostituendo nella prima delle (b), dopo semplici riduzioni, si trova

$$q'_{12} - q''_{11} = \frac{2q'_{11}(q_{12} - q'_{11})}{q_{11}}$$

cioè $\frac{[\vartheta_2^{(1)}]'}{2\vartheta_2^{(1)}} = \frac{[\vartheta_1^{(1)}]'}{\vartheta_1^{(1)}} = \eta$; analogamente si troverebbe $\frac{[\vartheta_2^{(2)}]'}{2\vartheta_2^{(2)}} = \frac{[\vartheta_1^{(2)}]'}{\vartheta_1^{(2)}}$

Per completare la ricerca, poichè i coefficienti p_{12}, q_{22} si determinano mediante le quadriderivate di q_{11} e p_{21}, dovremo stabilire la compatibilità per esempio tra la prima delle $[a]$ e l'equazione di condizione che si ottiene imponendo la condizione che la derivata di P_{12} sia nulla, cioè la compatibilità delle due equazioni

$$\left\{ \begin{array}{c} -\eta q_{11} + q'_{11} = 0 \\ 6(n+1)\eta\eta' - 2(n+1)\eta^3 - 24 p_{12} y - 2(n+1)\eta'' + 12 p'_{12} = 0 . \end{array} \right.$$

A questo scopo si ricava η dalla prima, si deriva due volte e si sostituisce nella seconda, ottenendo l'equazione di condizione:

$$[c] \quad 12(n+1)\left(\frac{q''_{11}}{q_{11}}\right)\left(\frac{q'_{11}}{q_{11}}\right) - 12(n+1)\left(\frac{q'_{11}}{q_{11}}\right)^3 - 2(n+1)\frac{q'''_{11}}{q_{11}} + 12p'_{12} - 26p_{12}q'_{11} = 0 ;$$

se ora prendiamo l'espressione della quadriderivata di q_{11}, cioè di $\theta_{1,1}^{(1)}$, che è un invariante di peso 4 ed imponiamo la condizione che sia

$$\frac{[\theta_{1,1}^{(1)}]'}{4\theta_{1,1}^{(1)}} = \frac{[\vartheta_1^{(1)}]'}{\vartheta_1^{(1)}} = \eta$$

otteniamo proprio la $[c]$.

In tal maniera la questione propostaci resta completamente risolta, e cioè: *Dato un qualunque sistema differenziale lineare di due equazioni di ordine n, sotto forma ridotta, si esegue su di esso la sostituzione di funzione incognita e di variabile, definita da*

$$y = \alpha \cdot Y\,, \quad z = \alpha \cdot Z\,, \quad \xi = \varphi(x)$$

con $\dfrac{\xi''}{\xi'} = \eta$, $\dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{-(n-1)}{2}\eta$, *dove la funzione trasformatrice* η *è data da*

$$\eta = \frac{[\vartheta_1^{(1)}]'}{\vartheta_1^{(1)}}$$

o da uno qualunque altro dei precedenti rapporti; se il sistema è riducibile ad uno a coefficienti costanti, la precedente trasformazione ve lo riduce.

3. – Esempio: *cerchiamo le condizioni sotto le quali il sistema*

$$y''' + \frac{z''}{x} - \frac{3}{x^2}y' - \frac{3}{x^3}y + a(x)\cdot z = 0\,, \qquad z''' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{5}{x^2}z' + b(x)\cdot y + \frac{z}{x^3} = 0$$

è riducibile ad uno a coefficienti costanti.

Si ha

$$\begin{cases} p_{12} = \dfrac{-1}{x^2}\,,\ p_{13} = \dfrac{-3}{x^3}\ ;\ q_{11} = \dfrac{1}{3x}\,,\ q_{12} = 0\ ,\ q_{13} = a(x) \\ p_{21} = 0\,,\ p_{22} = \dfrac{1}{3x^2}\,,\ p_{23} = b(x)\ ; \qquad q_{22} = \dfrac{-5}{3x^2}\,,\ q_{23} = \dfrac{1}{x^3} \end{cases}$$

e perciò in questo caso si trovano subito gli invarianti differenziali che risultano dati da

$$\begin{cases} \theta_3^{(1)} = \dfrac{-2}{x^3}\,,\ \theta_{3,1}^{(1)} = \dfrac{72}{x^8}\ ;\ \vartheta_1^{(1)} = \dfrac{1}{3x}\,,\ \vartheta_2^{(1)} = \dfrac{1}{3x^2}\,,\ \vartheta_4^{(1)} = \dfrac{a}{3x} \\ \theta_3^{(2)} = \dfrac{-4}{x^3}\,,\ \theta_{3,1}^{(2)} = \dfrac{-48\cdot 28}{x^8}\ ;\ \vartheta_2^{(2)} = 0\ ,\ \vartheta_2^{(2)} = \dfrac{1}{3x^2}\,,\ \vartheta_3^{(2)} = b + \dfrac{1}{x^3}\,. \end{cases}$$ [1]

[1] In base all'osservazione del numero 7 del precedente lavoro, poichè è $p_{21} = 0$, ci si serve di p_{22} (invariante di peso 2) e della formula $\vartheta_3^{(2)} = p_{23} - \dfrac{3}{2}p'_{22}$.

Allora gli invarianti assoluti risultano senz'altro costanti eccetto i due

$$J_4 = \frac{\vartheta_4^{(1)}}{[\vartheta_1^{(1)}]^4}\,, \qquad J_3 = \frac{\vartheta_3^{(2)}}{[\vartheta_1^{(1)}]^3}$$

per i quali si trova

$$J_4 = 27\,a\,x^3\;, \qquad J_3 = 27(b\,x^3 + 1)\,;$$

affinchè anche questi risultino costanti, dovrà perciò aversi

$$[d] \qquad a(x) = \frac{A}{x^3}\;, \qquad b(x) = \frac{B}{x^3}$$

con A, B costanti arbitrarie.

Ma procediamo secondo quanto si è detto nel numero precedente; si ha per la funzione trasformatrice $\eta = \frac{-1}{x}$, da cui

$$\xi' = \frac{1}{x}\;, \qquad \alpha = \frac{1}{x}$$

ed eseguendo la trasformazione

$$y = \frac{1}{x}\,Y\;, \qquad z = \frac{1}{x}\,Z\;,$$

segue di nuovo che $a(x)$ e $b(x)$ devono essere della forma (d)

4. – *I sistemi del tipo di Fuchs di prima specie.*

In analogia a ciò che si è fatto sia per le equazioni differenziali in una sola funzione incognita, che per i sistemi, nel caso di $n = 2$, chiameremo in generale *sistemi di Fuchs di 1ª specie* i sistemi lineari del tipo

$$\left\{\begin{aligned} & y^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} \frac{a_{1k}}{x^k}\, y^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} \frac{b_{1k}}{x^k}\, z^{(n-k)} = 0 \\ & z^{(n)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} \frac{a_{2k}}{x^k}\, y^{(n-k)} + \sum_1^n{}_k \binom{n}{k} \frac{b_{2k}}{x^k}\, z^{(n-k)} = 0 \end{aligned}\right.$$

con a_{ik}, b_{ik} costanti arbitrarie.

Riducendoli alla forma ridotta, mantengono ancora la forma precedente e quindi si trova senz'altro che gli invarianti fondamentali assumono la forma semplicissima

$$\begin{cases} \theta_m^{(1)} = \dfrac{A_{1m}}{x^m} & \theta_m^{(2)} = \dfrac{B_{2m}}{x^m} \\ \vartheta_m^{(1)} = \dfrac{B_{1m}}{x^m} & \vartheta_m^{(2)} = \dfrac{A_{2m}}{x^m} \end{cases} \quad (A_{im},\ B_{im}\ \text{cost}^{ti})$$

da cui si deduce che gli invarianti assoluti risultano costanti; perciò tali sistemi saranno riducibili a coefficienti costanti. La funzione trasformatrice è in questo caso

$$\eta = \frac{-1}{x}$$

e quindi dovremo eseguire la sostituzione definita da

$$y = x^{\frac{n-1}{2}}\,Y\,, \qquad z = x^{\frac{n-1}{2}}\,Z\,, \qquad \xi = \log x\,.$$

Se poi teniamo presente che, per integrare i sistemi a coefficienti costanti basta porre

$$Y = e^{\alpha\xi} + B\,e^{\beta\xi}\,, \quad Z = A\,e^{\alpha\xi} + e^{\beta\xi}$$

(con A, B, α, β costanti che si determinano algebricamente) se ne deduce che i sistemi di Fuchs di prima specie si possono integrare direttamente ponendo

$$Y = x^{\alpha} + B\,x^{\beta}\,, \quad Z = A\,x^{\alpha} + x^{\beta}$$

e questo risultato mostra l'intima analogia tra questi sistemi e le equazioni di Fuchs di prima secie.

5. – *Gli pseudosistemi di Fuchs di prima specie*

Estendiamo il risultato precedente, supponendo che la funzione trasformatrice relativa ad un certo sistema lineare sia

$$y = a\,x^{-1}\,,$$

con a costante arbitraria; tali sistemi li diremo *pseudosistemi di Fuchs di 1ª specie,* cioè chiameremo *pseudosistemi di Fuchs di prima specie quei sistemi differenziali lineari, di forma ridotta, i cui invarianti differenziali soddisfano alle condizioni*

$$[1] \qquad \frac{[\theta_m^{(i)}]'}{m\,\theta_m^{(i)}} = \frac{[\vartheta_m^{(i)}]'}{m\,\vartheta_m^{(i)}} = a\,x^{-1}$$

Sotto questa ipotesi gli invarianti assoluti risultano costanti e quindi tali sistemi saranno trasformabili in altri a coefficienti costanti.

Andiamo a stabilire la forma di tali sistemi differenziali; integrando le [1], segue

$$\begin{cases} \theta_m^{(1)} = \alpha_{1m}\,x^{ma} \;, & \vartheta_m^{(1)} = \beta_{1m}\,x^{ma} \\ \vartheta_m^{(2)} = \beta_{2m}\,x^{ma} \;, & \vartheta_m^{(2)} = \alpha_{2m}\,x^{ma} \end{cases} \qquad (\alpha_{im},\, \beta_{im} \text{ cost.}^{ti})$$

e quindi avremo per i coefficienti espressioni del tipo

$$[2] \qquad \begin{cases} p_{12} = \dfrac{A_{12}}{x^2} + B_{12}\,x^{2a} \\[2ex] p_{13} = \dfrac{A_{13}}{x^3} + B_{13}\,x^{3a} + C_{13}\,x^{2a-1} \\[2ex] p_{14} = \dfrac{A_{14}}{x^4} + B_{14}\,x^{4a} + C_{14}\,x^{3a-1} + D_{14}\,x^{2a-2} \\[2ex] p_{15} = \dfrac{A_{15}}{x^5} + B_{15}\,x^{5a} + C_{15}\,x^{4a-1} + D_{15}\,x^{3a-2} + E_{15}\,x^{2a-3} \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$[3] \qquad \begin{cases} q_{11} = a_{11}\,x^{a} \\ q_{12} = a_{12}\,x^{2a} + b_{12}\,x^{a-1} \\ q_{13} = a_{13}\,x^{3a} + b_{13}\,x^{2a-1} + c_{13}\,x^{a-2} \\ q_{14} = a_{14}\,x^{4a} + b_{14}\,x^{3a-1} + c_{14}\,x^{2a-2} + d_{14}\,x^{a-3} \\ q_{15} = a_{15}\,x^{5a} + b_{15}\,x^{4a-1} + c_{15}\,x^{3a-2} + d_{15}\,x^{2a-3} + e_{15}\,x^{a-4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

e analogamente per i coefficienti q_{2k}, p_{2k}.

6. – Però non tutti i sistemi i cui coefficienti sono dati dalle [2] e [3] appartengono al nostro tipo, nel senso che le costanti $A_{ik}, B_{ik} \ldots, a_{ik}, b_{ik} \ldots$ non sono del tutto arbitrarie; limitiamoci a verificarlo per il caso di $n=3$.

A questo scopo invertiremo in certo qual modo il risultato precedente, cioè partiremo da un sistema i cui coefficienti siano dati da espressioni del tipo [2] e [3] e cercheremo le condizioni perchè siano soddisfatte le [1]. Per $n=3$ le [2] e [3] si riducono a

$$[4] \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{12} &= \frac{A_{12}}{x^2} + B_{12} x^{2a} \\ p_{13} &= \frac{A_{13}}{x^3} + B_{13} x^{3a} + C_{13} x^{2a-1} \end{aligned} \right.$$

$$[5] \qquad \left\{ \begin{aligned} q_{11} &= a_{11} x^a \\ q_{12} &= a_{12} x^{2a} + b_{12} x^{a-1} \\ q_{13} &= a_{13} x^{3a} + b_{13} x^{2a-1} + c_{13} x^{a-2} \end{aligned} \right.$$

e alle analoghe per la seconda equazione

$$[5_1] \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{21} &= A_{21} x^a \\ p_{22} &= A_{22} x^{2a} + B_{22} x^{a-1} \\ p_{23} &= A_{23} x^{3a} + B_{23} x^{2a-1} + C_{23} x^{a-2} \end{aligned} \right.$$

$$[4_1] \qquad \left\{ \begin{aligned} q_{22} &= \frac{a_{22}}{x^2} + b_{22} x^{2a} \\ q_{23} &= \frac{a_{23}}{x^3} + b_{23} x^{3a} + c_{23} x^{2a-1} \end{aligned} \right.$$

Sostituendo nelle espressioni degli invarianti, si trova

$$\left\{ \begin{array}{lll} A_{12} = \dfrac{-a(a+2)}{3} \, , & A_{13} = a(a+2) \, , & C_{13} = 3a B_{12} \\ b_{12} = a\, a_{11} \, , & b_{13} = 2a\, a_{12} \, , & c_{13} = -3a\, a_{11} \end{array} \right.$$

e analogamente per la seconda equazione, così che il più generale sistema di Fuchs di 1ª specie, per n = 3, avrà la forma

$$y''' + 3 \left\{ \frac{-a(a+2)}{3x^2} + B_{12} x^{2a} \right\} y' + \left\{ \frac{a(a+2)}{x^3} + B_{13} x^{3a} + 3a B_{12} x^{2a-1} \right\} y +$$

$$+ 3 a_{11} x^a z'' + 3 \left\{ a_{12} x^{2a} + a\, a_{11} x^{a-1} \right\} z' + \left\{ a_{13} x^{3a} + 3a\, a_{12} x^{2a-1} - 3a\, a_{11} a^{a-2} \right\} z = 0$$

e analogamente per la seconda equazione. Eseguendo poi su di esso la trasformazione definita dalla funzione trasformatrice

$$\eta = \frac{a}{x} ,$$

il sistema si trasforma nel seguente a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y''' + 3\,B_{12}\,y' + B_{13}\,y + 3\,a_{11}\,z'' + 3\,a_{12}\,z' + a_{13}\,z = 0 \\ z''' + 3\,A_{21}\,y'' + 3A_{22}\,y' + A_{23}\,y + 3b_{22}\,z' + b_{23}\,z = 0 \,. \end{cases}$$

7. – *Il caso eccezionale per* $n = 3$: Se un'equazione del sistema è di ordine inferiore ad n, ci possiamo sempre riportare al caso generale, derivando ed eliminando opportunamente.

Però possiamo anche fare altrimenti e cioè stabilire direttamente, anche in tal caso, un sistema completo di invarianti, definendo preliminarmente, per ogni sistema, una particolare ed opportuna forma ridotta e poi procedendo su di essa in maniera analoga a quella che si tiene per il caso generale.

Per esempio, ed è questo il caso più interessante che ora vogliamo esaminare, supponiamo che un'equazione sia di ordine n e l'altra di ordine $n-1$, cioè supponiamo un sistema della forma

$$A\,y^{(n)} + B\,z^{(n)} \ldots = 0\,, \quad C\,y^{(n-1)} + D\,z^{(n-1)} + \ldots = 0\,; \quad (^1)$$

mediante la trasformazione $y = \lambda Y$, $z = \mu Z$ si possono far sparire, nella prima equazione, i termini in $y^{(n-1)}$ e $z^{(n-1)}$ ed è appunto questa la forma ridotta da cui conviene partire in questo caso, per stabilire il sistema completo di invarianti.

8. – È quanto mai interessante, per $n = 3$, dare l'interpretazione geometrica di questo caso, interpretazione che del resto si può senz'altro estendere in generale al caso di n qualunque.

Partiamo dal sistema differenziale sotto forma generale

$$[d] \quad \begin{cases} A\,y''' + B\,z''' + 3P_{11}\,y'' + 3\,P_{12}\,y' + P_{13}\,y + 3Q_{11}\,z'' + 3\,Q_{12}\,z' + Q_{13}\,z = 0 \\ C\,y''' + D\,z''' + 3P_{21}\,y'' + 3P_{22}\,y' + P_{23}\,y + 3Q_{21}\,z'' + 3\,Q_{22}\,z' + Q_{23}\,z = 0 \,; \end{cases}$$

(1) Vedi, per $n = 2$, il secondo dei nostri lavori citati a nota 1 della memoria precedente.

se $\Omega(x) = AD - BC \not\equiv 0$, il sistema stesso si può senz'altro scrivere sotto la forma ridotta

$$[6] \qquad \begin{cases} y''' + 3p_{12}y' + p_{13}y + 3q_{11}z'' + 3q_{12}z' + q_{13}z = 0 \\ z''' + 3p_{21}y'' + 3p_{22}y' + p_{23}y + 3q_{22}z' + q_{23}z = 0 \ , \end{cases}$$

mentre se $\Omega(x) = AD - BC \equiv 0$, il sistema si può ridurre alla forma

$$[7] \quad \begin{cases} y''' + Bz''' + 3P_{11}y'' + 3P_{12}y' + P_{13}y + 3Q_{11}z'' + 3Q_{12}z' + Q_{13}z = 0 \\ \qquad\qquad y'' + Nz'' + 3P_{22}y' + P_{23}y + 3Q_{22}z' + Q_{23}z = 0 \end{cases}$$

Indichiamo ora con $y_i(x), z_i(x) [i = 1, 2, \dots 6]$ sei coppie di soluzioni del sistema $[d]$; anche

$$[8] \qquad y(x) = \sum_{6}^{1}{}_i \, c_i y_i(x) \ , \qquad z(x) = \sum_{6}^{1}{}_i \, c_i z_i(x) \qquad (c_i = \mathrm{cost}^{ti})\ .$$

saranno coppie di soluzioni ed anzi ci daranno la soluzione generale se sarà possibile determinare le costanti c_i in guisa che, per un $x = x_0$ di regolarità dei coefficienti, le (y, z), (y', z'), (y'', z'') assumano valori arbitrari.

E ciò, come subito risulta, sarà possibile se il determinante

$$W(z) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & y'_1 & z'_1 & y''_1 & z''_1 \\ y_2 & z_2 & y'_2 & z'_2 & y''_2 & z''_2 \\ y_3 & z_3 & y'_3 & z'_3 & y''_3 & z''_3 \\ y_4 & z_4 & y'_4 & z'_4 & y''_4 & z''_4 \\ y_5 & z_5 & y'_5 & z'_5 & y''_5 & z''_5 \\ y_6 & z_6 & y'_6 & z'_6 & y''_6 & z''_6 \end{vmatrix}$$

sarà diverso da zero nel punto x_0 (1).

(1) Si trova subito, per $W(x)$, la formula

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} (p_{11} + q_{21})\, dx}$$

Supponiamo invece $W(x)$ identicamente nullo o di caratteristica 5; allora esisterà una sestupla di numeri $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ per cui risulta

$$\alpha_1 y_i + \alpha_2 y'_i + \alpha_3 y''_i + \beta_1 z_i + \beta_2 z'_i + \beta_3 z''_i = 0 \ ,$$

da cui si deduce, per le [8], che anche per ogni altra soluzione del sistema sarà

$$[9] \qquad \alpha_1 y_i + \alpha_2 y' + \alpha_3 y'' + \beta_1 z + \beta_2 z' + \beta_3 z'' = 0$$

così che il sistema dato si ridurrà alla forma [7] (1).

9. – Ciò premesso interpretiamo le due sestuple di soluzioni particolari (y_i), (z_i) come coordinate omogenee di un punto di un S_5 ed indichiamo con C_y, C_z le due curve normali di S_5, di equazioni parametriche

$$C_y) : \ y_i = y_i(x) \ ; \qquad C_z) : \ z_i = z_i(x) \ ;$$

poniamo poi tra i punti di esse una corrispondenza biunivoca senza eccezioni chiamando corrispondenti due punti P_y, P_z dati dallo stesso valore del parametro x. Le congiungenti $P_y P_z$ individueranno una varietà rigata V_2, la quale, evidentemente, risulterà determinata a meno di una proiettività, potendosi sempre sostituire le sei coppie di soluzioni (y_i, z_i) con altre $(\bar{y}_i, \bar{z}_i)$ legate alle precedenti dalle relazioni

$$\bar{y}_i = \sum_1^6{}_k c_{ik} y_k \ , \qquad \bar{z}_i = \sum_1^6{}_k c_{ik} z_k \qquad\qquad (c_{ik} = \text{cost.}^{ti})$$

con il determinante $\|c_{ik}\| \neq 0$.

Supponiamo ora che sia $W(x) \equiv 0$ e che la sua caratteristica sia 5; varrà la [9], che potremo scrivere sotto la forma

$$\alpha_1 y + \alpha_2 y' + \alpha_3 y'' = -(\beta_1 z + \beta_2 z' + \beta_3 z'') \ ,$$

da cui si deduce che i due punti

$$P_y{}^* \equiv (\alpha_1 y + \alpha_2 y' + \alpha_3 y'') \ , \quad P_z{}^* \equiv (-\beta_1 z - \beta_2 z' - \beta_3 z'')$$

(1) Se la caratteristica di W fosse minore di 5, di relazioni del tipo [9] ne esisterebbero almeno due ed allora il sistema si ridurrebbe a due equazioni del 2° ordine.

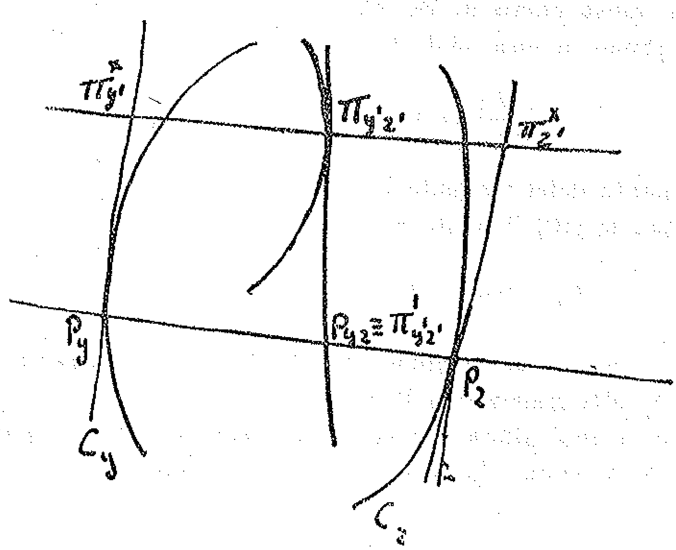
coincidono, il che porta di conseguenza che i piani osculatori alle C_y, C_z nei punti corrispondenti P_y, P_z, i quali sono individuati rispettivamente dalle terne di punti

$$\begin{cases} P_y \equiv (y)\,, \quad P'_y \equiv (y')\,, \quad P''_y \equiv (y'')\;; \\ P_z \equiv (z)\,, \quad P'_z \equiv (z')\,, \quad P''_z \equiv (z'')\;; \end{cases}$$

hanno a comune il punto $P_y^* \equiv P_z^*$ e quindi una retta.

Ma vi è un'altra conseguenza notevole che si può dedurre dal fatto di $W(x) \equiv 0$; infatti, sotto questa ipotesi, il sistema differenziale (d), si può trasformare nella forma ridotta

$$\begin{cases} y''' + \alpha z''' + p_{12} y' + p_{13} y + q_{12} z' + q_{13} z = 0 \\ y'' + p_{21} z'' p_{22} y' + p_{23} y + q_{22} z' + q_{23} z = 0 \end{cases}$$



mentre la sua seconda equazione si può scrivere

$$\frac{d}{dx}\left\{ y' + q_{21} z' + p_{22} y + q_{22} z - q'_{21} z \right\} = (p'_{22} - p_{23})\, y + (-q''_{21} + q'_{22} - q_{23})\, z$$

o anche

$$[10] \quad \frac{d}{dx}\Big\{[y'+p_{22}y]+[q_{21}z'+(q_{22}-q'_{21})z]\Big\}=(p'_{22}-p_{23})y+(-q''_{21}+q'_{22}-q_{23})z$$

Ma il punto

$$\overset{*}{\pi}_{y'} \equiv (y'+p_{22}y)$$

appartiene alla tangente alla C_y in P_y e analogamente il punto

$$\overset{*}{\pi}_{z'} \equiv (q_{21}z'+[q_{22}-q'_{21}]z)$$

appartiene alla tangente alla C_z in P_z; se ne deduce che il punto

$$\pi_{y'z'} \equiv \}(y'+p_{22}y)+(q_{21}z'+[q_{22}-q'_{21}]z)\{$$

è un punto della loro congiungente. Al variare di x tale punto descriverà una nuova curva di S_5, che indicheremo con $C_{y'z'}$ e il punto derivato primo di essa, cioè il punto

$$\pi'_{y'z'} \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)\left\{(y'+p_{22}y)+(q_{21}z'+[q_{22}-q'_{21}]z\right\}$$

sarà un punto della tangente in $\pi_{y'z'}$ alla $C_{y'z'}$.

Ma per la [10] il punto $\pi'_{y'z'}$ coincide col punto

$$P_{xz} \equiv \left([p'_{22}-p_{22}]y+[-q''_{11}+q'_{22}-q_{23}]z\right)$$

che è un punto della congiungente P_y P_z cioè la tangente alla $C_{y'z'}$ è incidente alla generatrice P_y P_z di V_2.

Se ne deduce allora che la *nostra rigata sarà una rigata sviluppabile e che la curva* $C_{y'z'}$ *è il suo spigolo di regresso.*