

SULLA PERMUTABILITÀ
DEI FRAZIONAMENTI ELEMENTARI
DI UN COMPLESSO TOPOLOGICO QUALSIASI (*)

MICHELANGELO VACCARO

SVMMARIVM. — Elementariae partitiones complexuum topologicorum perpenduntur, et determinantur omnes casus quibus inter eorum binos quoslibet permutatio fieri possit.

È noto ⁽¹⁾ che, dato un complesso topologico qualsiasi, il suo frazionamento regolare si può ottenere con una successione di frazionamenti elementari, disposti secondo un certo ordine, relativi alle singole sue celle. In molti casi però, e specialmente dal punto di vista pratico, non è necessario estendere il frazionamento regolare a tutto il complesso bensì di limitarlo ad alcuni frazionamenti elementari, ossia a un frazionamento regolare locale.

Risulta però essenziale in questi casi (quali ad esempio il frazionamento elementare applicato a tutte le celle della stessa dimensione di una data stella) saper riconoscere quand'è che due distinti frazionamenti elementari sono fra loro permutabili ossia conducono, dopo l'applicazione di entrambi, allo stesso complesso frazionato, qualunque sia l'ordine secondo cui essi vengono applicati.

Dall'analisi che faremo risulterà che esiste un solo caso di non permutabilità e precisamente allorchè le due celle, che vengono rispet-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

(¹) Vedi per es. P. ALEXANDROFF-H. HOPF, « Topologie » I, pag. 137.

tivamente frazionate, non sono incidenti ma hanno almeno un vertice in comune e sono contenute in almeno una stessa cella del complesso dato. In ogni altro caso invece i due corrispondenti frazionamenti elementari sono permutabili.

I complessi di cui ci occuperemo saranno sempre costituiti da sistemi di n -ple di punti, che per comodità chiameremo ancora celle, di un qualsiasi campo di vertici, tali che, se una n -pla fa parte del sistema, ogni n -pla ad essa subordinata ne fa ancora parte.

Esponiamo in breve quello che intendiamo per frazionamento elementare.

Dato un qualsiasi complesso K e una qualsiasi sua cella E , che si dirà la cella relativa al frazionamento elementare che vogliamo definire, si sopprima dal complesso K la stella di celle individuata da E , ossia tutte le celle di K contenenti E . Il sistema di celle che così si ottiene è ancora un complesso K' perchè se una cella di K non contiene E e quindi rimane, ogni sua faccia non contiene E e quindi rimane anch'essa.

Aggiungiamo al campo dei vertici di K un nuovo vertice P , che può simboleggiare, se si vuole, la cella E stessa, e consideriamo la stella Σ , di centro P , che proietta da P il complesso O_E , contenuto in K e K' , costituito da tutte le celle di K ottenibili prendendo una qualsiasi cella contenente la cella E e privandola di almeno un vertice di E .

La stella Σ così ottenuta è tale che le celle che le mancano perchè essa sia un complesso non sono altro che le celle del complesso O_E e appartengono quindi al complesso K' . Ciò vuol dire che il sistema di celle riunione del complesso K' e della stella Σ risulta ancora un complesso K_E il quale dicesi ottenuto da K mediante il *frazionamento elementare* relativo alla sua cella E .

In un qualsiasi frazionamento elementare ci sono celle che non mutano, celle che si trasformano e celle che compaiono *ex novo*. Precisamente una cella di K che non contiene la E non viene toccata dal frazionamento; una cella A che invece contiene la E si muta in una cella A' , che diremo la sua *trasformata*, che si ottiene sostituendo a tutti i suoi vertici contenuti anche in E l'unico nuovo vertice P . Si hanno infine delle nuove celle ottenibili prendendo la trasformata A' di una qualsiasi cella A contenente E e facendone la riunione con una qualsiasi cella non vuota del contorno di E .

In altre parole una qualsiasi cella A di K se non contiene E rimane inalterata, mentre se la contiene si muta nel sistema di celle del tipo:

$$A + P - B$$

ove B è una qualsiasi cella contenuta in E e *non vuota*. Se B coincide con E si ottiene la trasformata A' di A .

Se la cella E è costituita da un sol vertice di K il frazionamento elementare corrispondente si riduce all'identità, se invece E è la cella vuota del complesso K , siccome ogni cella di K contiene la E , non ci sono celle inalterate ma ogni cella E si muta nel sistema

$$A + P - B :$$

sistema che purtroppo è vuoto in quanto non ci sono celle B non vuote contenute nella cella vuota E . Il complesso K_E è pertanto il complesso vuoto.

La reiterazione di un qualsiasi frazionamento elementare porta a frazionare il complesso frazionato K_E in un suo vertice P , caso che, come abbiamo visto, è l'identità, ossia il frazionamento porta al K_E stesso.

Pertanto tutte le potenze dell'operazione « frazionamento elementare » a partire dalla seconda si riducono a coincidere col frazionamento stesso.

La situazione è un'altra se dopo un frazionamento elementare se ne applica uno diverso e qui appunto sorge la questione della loro permutabilità. Bisogna però precisare le cose. Consideriamo due diversi frazionamenti elementari di uno stesso complesso K , ossia relativi a due diverse celle E_1 e E_2 . Ognuno dei due frazionamenti può essere inteso oltre che applicato a K anche applicato al frazionato di K mediante il rimanente frazionamento elementare, ove è da intendersi che la cella ad esso relativa va sostituita con la sua trasformata se essa viene toccata dall'altro frazionamento.

Si ottengono con ciò due complessi $K_{E_1 E_2}$ e $K_{E_2 E_1}$ aventi lo stesso campo di vertici. Se questi complessi coincidono, i due frazionamenti corrispondenti si dicono *permutabili*, altrimenti no.

Non sempre esiste questa permutabilità e noi ci proponiamo appunto di ricercare i casi in cui essa vale. Il risultato della nostra ana-

lisi ci porta a concludere affermativamente per i frazionamenti elementari relativi a coppie di celle o disgiunte, o indipendenti o incidenti e negativamente nei casi contrari contemporaneamente a tutte e tre queste possibilità. Esaminiamo infatti i vari casi possibili.

1. CASO DI DUE CELLE DISGIUNTE. - Esaminiamo dapprima il caso di due frazionamenti elementari relativi a due celle E_1 e E_2 disgiunte, ossia prive di vertici comuni ad entrambe.

In questo caso ognuna delle due celle non è toccata dal frazionamento elementare relativo alla rimanente. Studiamo per esempio la struttura di $K_{E_1 E_2}$.

Una cella A non contenente la E_1 resta inalterata dopo il primo frazionamento. Se non contiene neppure la E_2 resta inalterata anche dopo il secondo, se la contiene si muta nel sistema di celle

$$A + P_2 - B_2.$$

Se invece si ha una cella A contenente la E_1 essa dopo il 1° frazionamento si muta nel sistema di celle del tipo

$$A + P_1 - B_1.$$

Se A non contiene E_2 nessuna di queste celle la contiene e restano pertanto inalterate nel 2° frazionamento; se A invece contiene E_2 , siccome B_1 è una cella contenuta in E_1 , è anch'essa disgiunta da E_2 e quindi ogni cella $A + P_1 - B_1$ contiene E_2 e si muta nel 2° frazionamento nel sistema di celle

$$A + P_1 + P_2 - B_1 - B_2.$$

Riassumendo si hanno i 4 tipi di celle:

a) A ,

b) $A + P_1 - B_1$,

c) $A + P_2 - B_2$,

d) $A + P_1 + P_2 - B_1 - B_2$,

ove A indica una qualsiasi cella K che rispettivamente:

- a) non contiene nè E_1 nè E_2 ,
- b) contiene la E_1 ma non la E_2 ,
- c) contiene la E_2 ma non la E_1 ,
- d) contiene sia la E_1 che la E_2 .

In questo caso pertanto la simmetria di struttura del complesso $K_{E_1 E_2}$ rispetto alle due celle E_1 e E_2 ci porta a concludere che esso coincide con $K_{E_2 E_1}$ ossia che *due frazionamenti elementari relativi a due celle disgiunte sono fra loro permutabili*.

2. CASO DI 2 CELLE INDIPENDENTI. - Esaminiamo ora il caso di due frazionamenti elementari relativi a due celle indipendenti ossia tali che nel complesso K non c'è alcuna cella che le contenga entrambe.

Anche in questo caso ognuna delle due celle non è toccata dal frazionamento relativo alla rimanente. Studiamo ad esempio la struttura del complesso $K_{E_1 E_2}$. Una cella A che non contenga la E_1 resta inalterata dopo il primo frazionamento. Se non contiene anche la E_2 , essa si ritrova inalterata in $K_{E_1 E_2}$; se contiene la E_2 essa si muta nel sistema di celle $A + P_2 - B_2$.

Se invece si è in presenza di una cella A contenente la E_1 , essa si muta nel sistema di celle $A + P_1 - B_1$. La cella A_1 contenendo la E_1 , non può contenere la E_2 perchè E_1 e E_2 sono indipendenti: da ciò risulta che neppure la $A + P_1 - B_1$ può contenere la E_2 e quindi ogni cella di questo tipo resta inalterata nel secondo frazionamento.

Riassumendo si hanno i 3 tipi di celle:

- a) A ,
- b) $A + P_1 - B_1$,
- c) $A + P_2 - B_2$,

ove rispettivamente A indica:

- a) una cella che non contiene nè E_1 nè E_2 ,
- b) una cella che contiene solo la E_1 ,
- c) una cella che contiene solo la E_2 .

Dalla simmetria del risultato si deduce anche qui che *frazionamenti relativi a celle indipendenti sono fra loro permutabili*.

3. CASO DI DUE CELLE INCIDENTI. - Esaminiamo infine il caso di due frazionamenti relativi a due celle incidenti ossia a due celle E_1 e E_2 di cui la seconda, ad esempio, è contenuta nella prima (ma non viceversa).

Esaminiamo dapprima la struttura di $K_{E_1 E_2}$. È da notare innanzi tutto che la E_2 resta inalterata nel primo frazionamento giacchè non contiene E_1 .

Una cella A che non contiene E_1 resta inalterata dopo il primo frazionamento. Se non contiene neppure la E_2 resta inalterata anche dopo il secondo. Se invece contiene la E_2 essa dà luogo al sistema di celle del tipo

$$A + P_2 - B_2.$$

Passiamo alle celle A che contengono la E_1 . Esse si mutano ciascuna in un sistema di celle del tipo

$$A + P_1 - B_1.$$

La A , in quanto contiene la E_1 contiene anche la E_2 e pertanto le celle $A + P_1 - B_1$, con B_1 cella B_1^* avente almeno un vertice in comune con E_2 , non contengono la E_2 e quindi restano inalterate; quelle invece con la B_1 priva di vertici in comune con E_2 contengono la E_2 e pertanto si mutano in sistemi di celle del tipo

$$A + P_1 - B_1 + P_2 - B_2.$$

B_1 e B_2 non hanno vertici in comune: B_1 è in $E_1 - E_2$ e B_2 in E_2 ; la loro riunione è quindi una qualsiasi cella B'_1 non vuota contenuta in E_1 ma non in E_2 nè in $E_1 - E_2$ e con ciò le celle in questione diventano della forma

$$A + P_1 + P_2 - B'_1.$$

Si hanno pertanto i 4 tipi di celle:

- a) A ,
- b) $A + P_2 - B_2$,
- c) $A + P_1 - B_1^*$,
- d) $A + P_1 + P_2 - B'_1$,

ove A indica rispettivamente

- a) una cella che non contiene nè E_1 nè E_2 ,
- b) una cella che non contiene E_1 ma solo E_2 ,
- c) e d) una cella che contiene E_1 (e quindi anche E_2).

Questa è la struttura di $K_{E_1 E_2}$. Passiamo ora a quella di $K_{E_2 E_1}$. È da notare innanzitutto che dopo il frazionamento relativo a E_2 la E_1 si trasforma nella

$$E_1 + P_2 - E_2$$

e pertanto è rispetto a quest'ultima che va applicato il secondo frazionamento.

Una cella A non contenente la E_2 rimane inalterata; essa non contiene neanche la $E_1 + P_2 - E_2$ per la presenza in questa di P_2 e quindi resta inalterata anche in $K_{E_2 E_1}$.

Consideriamo invece una cella A contenente la E_2 . Essa si muta nel sistema di celle del tipo

$$A + P_2 - B_2.$$

Ogni cella di questo sistema può o non può contenere a seconda dei casi la cella $E_1 + P_2 - E_2$ trasformata di E_1 . Per distinguere i due casi consideriamo la cella virtuale

$$A + P_2 - B_2 - (E_1 + P_2 - E_2) = A + E_2 - E_1 - B_2$$

che si può anche scrivere così:

$$(A - E_1) - (E_2 - B_2).$$

Questa risulterà una effettiva cella solo se la A contiene la E_1 . Pertanto se A non contiene la E_1 le celle del tipo $A + P_2 - B_2$ non contengono la cella $E_1 + P_2 - E_2$ e quindi restano inalterate nel secondo frazionamento. Se invece A contiene E_1 la cella

$$A + P_2 - B_2$$

contiene la $E_1 + P_2 - E_2$ e si muta quindi nel sistema di celle

$$A + P_2 - B_2 + P_1 - B_{E_1+P_2-E_2}$$

ove $B_{E_1+P_2-E_2}$ è una cella qualsiasi ma non vuota in $E_1 + P_2 - E_2$.

Distinguiamo a questo punto due casi secondoche questa cella B contiene il punto P_2 oppure non lo contiene. Nel primo caso si hanno le celle

$$A + P_1 - B_2 - B''_{E_1-E_2}$$

ove B'' può essere anche la cella vuota ossia perciò le celle

$$A + P_1 - B^*_1$$

ove B^*_1 è una qualsiasi cella di E_1 con almeno un vertice in E_2 .

Nel secondo caso invece si hanno le celle

$$A + P_1 + P_2 - B_2 - B_{E_1-E_2} = A + P_1 + P_2 - B'_1$$

con B'_1 qualsiasi di E_1 ma non contenuta in E_2 nè in $E_1 - E_2$.

Riassumendo si hanno i 4 tipi di celle

- a) A ,
- b) $A + P_2 - B_2$,
- c) $A + P_1 - B^*_1$,
- d) $A + P_1 + P_2 - B'_1$,

ove A indica rispettivamente:

- a) una cella che non contiene E_2 (e quindi nemmeno E_1),
- b) una cella contenente la E_2 ma non la E_1 ,
- c) e d) una cella contenente la E_1 (e quindi anche la E_2).

Dal confronto dei risultati raggiunti si conclude pertanto che nel caso di celle incidenti i relativi frazionamenti elementari sono fra loro permutabili.

4. CASO DELLA NON PERMUTABILITÀ. — Vogliamo ora far vedere che ogni volta che due frazionamenti elementari si trovano in ciascuna delle situazioni opposte ai tre casi precedenti contemporaneamente, ossia relativi a celle dipendenti, con almeno un vertice in comune e non incidenti, essi non sono fra loro permutabili.

Consideriamo infatti due celle E_1 e E_2 nella situazione suddetta: sia F la cella loro intersezione (minore di entrambe perchè non incidenti ma non vuota perchè esse non sono disgiunte), A la cella loro riunione (maggiore di entrambe perchè non incidenti ma appartenente al complesso K dato perchè esse sono dipendenti), H_1 e H_2 le due celle non vuote date da

$$H_1 = E_1 - F, \quad H_2 = E_2 - F$$

le quali risultano disgiunte fra loro in quanto F è l'intersezione di E_1 con E_2 .

Applichiamo ora successivamente nell'ordine i due frazionamenti relativi ad E_1 ed E_2 . Dopo il primo frazionamento compare la cella

$$H_1 + H_2 + P_1$$

appartenente al sistema in cui si muta la cella A (che contiene la E_1). Questa cella non contiene E_2 (che non è stata toccata dal primo frazionamento) e pertanto resta inalterata dopo il secondo frazionamento e fa parte di $K_{E_1 E_2}$. Facciamo vedere che essa invece non fa parte di $K_{E_2 E_1}$. Essa infatti non fa parte nè di K nè di K_{E_2} per la presenza in essa del vertice P_1 ; dovrebbe pertanto comparire dopo l'ultimo frazionamento, cioè quello relativo alla E_1 , ossia essere ottenibile da una cella di K_{E_2} contenente E_1 . Ora in essa c'è la cella H_2 che, dopo il primo frazionamento, risulta indipendente da E_1 in quanto ogni cella C contenente E_1 e H_2 (ossia A) scompare e al suo posto vengono celle del tipo $A + P_2 - B_2$, celle che in ogni caso non possono contenere contemporaneamente E_1 e H_2 giacchè B_2 è sempre non vuota. Ciò significa che ogni cella di K_{E_2} contenente la E_1 non può contenere la H_2 e non può generare quindi la $H_1 + H_2 + P_1$.

La $H_1 + H_2 + P_1$ non compare perciò nemmeno nell'ultimo frazionamento, non fa parte cioè di $K_{E_2 E_1}$. Analogamente per $H_1 + H_2 + P_2$. Si conclude pertanto che i due complessi $K_{E_1 E_2}$ $K_{E_2 E_1}$ sono fra loro distinti e quindi *due frazionamenti elementari relativi a una coppia di celle non incidenti, non disgiunte e dipendenti non sono mai fra loro permutabili.*