

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA

ANNVS XV
VOLUMEN XV



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCCLI

INDEX

	FOL.
1. G. ARUFFO, <i>Sulle condizioni di validità della formula di Green-Stokes generale</i>	1-14
2. L. BROGLIO, <i>Questioni analitiche inerenti ai problemi di stabilità dell'equilibrio elastico</i>	15-24
3. A. MERCATI, <i>Notizie sul gesuita Cristoforo Borri e su sue « invenzioni » da carte finora sconosciute di Pietro della Valle il Pellegrino</i>	25-45
4. M. GALLI, <i>Osservazioni critiche circa l'efficacia dimostrativa dell'esperimento di Kennedy</i>	47-56
5. A. MERCATI, <i>Il fisico tedesco Giorgio Mattia Bose e Benedetto XIV</i>	57-70
6. J. JUNKES S. J., <i>Ein Vorschlag zur empirischen Reduktion von Spektralverteilungen</i>	73-76
7. G. PLATONE, <i>Equazioni integrali a nuclei sommabili</i> .	77-92
8. M. CESA-BIANCHI e A. PERUGIA, <i>Un metodo di importazione analitica di una batteria di reattivi (cum 3 fig.)</i>	93-104
9. A. PERUGIA, <i>Ricerche sul comportamento degli interessi nell'età evolutiva (cum 3 fig.)</i>	105-120
10. L. FINZI, <i>Proprietà delle strutture elastoplastiche nello spazio delle iperstatiche (cum 5 fig.)</i>	121-136
11. E. VESSENTINI, <i>Dimostrazione intrinseca del teorema di Riemann-Roch sopra una curva</i>	137-152



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XV - N. 1
pag. 1-14

SULLE CONDIZIONI DI VALIDITÀ DELLA FORMULA DI GREEN-STOKES GENERALE (*)

GIULIO ARUFFO

SUMMARY. — Auctor demonstrat generalem GREEN-STOKES formulam tunc tantum valere, cum coefficientia formae integrandae gradus minoris sunt differentiables, coefficientia autem formae gradus maioris sunt continua. Integrale autem theorema CAUCHY deduci potest per formulam GREEN, (iuxta viam a RIEMANN indicatam) etiam in hypothesis a GOURSAT proposita.

1. — È ben noto che il teorema integrale di CAUCHY per una funzione analitica $f(z)$ di una variabile complessa $z = x + iy$, può dedursi immediatamente (con RIEMANN) dalla formula di GREEN nel piano, spezzando $f(z)$ nella sua parte reale $u(x, y)$ e nella immaginaria $iv(x, y)$. Tale dimostrazione necessita non soltanto dell'esistenza delle derivate parziali di u e v [già conseguente dall'esistenza di $f'(z)$], ma anche della loro continuità, poichè essa interviene nelle ordinarie formulazioni del teorema di GREEN.

D'altronde GOURSAT ha dimostrato, per altra via, il teorema di CAUCHY medesimo, nella sola ipotesi dell'esistenza di $f'(z)$ (1). Il ragionamento di GOURSAT sfrutta essenzialmente il fatto che se in un

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella riunione del 22 novembre 1951.

Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Genova.

(1) Cfr. E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*. Gauthier-Villars (1948), Tome II, pag. 74.

punto z_0 interno al campo di definizione di $f(z)$ esiste $f'(z_0)$, ivi la $f(z)$ è differenziabile ⁽¹⁾.

Si riconosce subito che ciò implica la differenziabilità di $u(x, y)$, $v(x, y)$. Perciò si affaccia spontaneamente la domanda se sia possibile, imitando il ragionamento di GOURSAT, stabilire la formula di GREEN nelle ipotesi corrispondenti, più generali del consueto, e precisamente ammettendo soltanto la differenziabilità dei coefficienti della forma differenziale integranda semplicemente, insieme alla continuità della funzione integranda doppiamente.

Anzi ci si può chiedere più in generale se, sotto analoghe ipotesi, valga la formula di GREEN-SOKES

$$[1] \quad \int_{\Gamma_k} \omega_k = \int_{V_{k+1}} d\omega_k$$

essendo ω_k una forma differenziale esterna di grado k nelle variabili reali x_1, x_2, \dots, x_n ($n > k$), $d\omega_k$ la forma di grado $k+1$ che si ottiene con la differenziazione di E. CARTAN, V_{k+1} una varietà $(k+1)$ -dimensionale orientata dello spazio euclideo $S_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e Γ_k il ciclo k -dimensionale contornante V_{k+1} .

Scopo di questa nota è appunto quello di dare risposta affermativa al precedente interrogativo, dimostrando il teorema seguente:

La formula [1] sussiste nelle ipotesi che:

1) *La varietà orientata V_{k+1} possa considerarsi come una catena di $(k+1)$ -simplessi (eventualmente singolari) di classe $u \geq 1$ ⁽²⁾ dello spazio S_n e sia $V_{k+1} \rightarrow \Gamma_k$ ⁽³⁾;*

⁽¹⁾ Diciamo che una funzione di una o più variabili (reali o complesse) è «differenziabile» in un punto P_0 interno al campo di definizione, quando l'incremento della funzione per uno spostamento da P_0 ad un punto prossimo P differisce dal differenziale corrispondente (differenziale totale se trattasi di più variabili) per un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla distanza P_0P . Mentre per le funzioni di una sola variabile (reale o complessa) derivabilità e differenziabilità coincidono, per le funzioni di più variabili l'esistenza delle derivate parziali in P_0 non trae seco la differenziabilità in P_0 ; d'altronde la continuità delle derivate parziali è più restrittiva delle differenziabilità. Cfr. F. SEVERI, *Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali*. «Annali di Matematica», Serie IV, Tomo XIII, pag. 1.

⁽²⁾ Vale a dire trasformati univoci (e non necessariamente biunivoci) di un $(k+1)$ -simpleso rettilineo (poliedro elementare) di uno spazio euclideo a $k+1$ dimensioni, essendo di classe u le funzioni che rappresentano la trasformazione (cfr. n. 3).

⁽³⁾ Seguendo il simbolismo di ALEXANDER, con la scrittura $A \rightarrow B$ intendiamo esprimere che la varietà A ha la varietà B come contorno orientato in relazione positiva con A . Il ciclo Γ_k risulta anche esso una catena di k -simplessi di classe u .

2) i coefficienti $A_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di ω_k siano differenziabili (e quindi continui) in una regione aperta R di S_n contenente V_{k+1} ;

3) siano continui in R i coefficienti della forma $d\omega_k$ (senza che tali siano di necessità le singole derivate delle $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$ che compongono quei coefficienti).

Nel caso $n=2, k=1$ (formula di GREEN nel piano) l'ipotesi 1) può anche venir sostituita con quella che la linea chiusa Γ_1 sia una *linea di Jordan semplice e regolare*, secondo proveremo al n. 5⁽¹⁾.

Ne segue che la dimostrazione di RIEMANN del teorema integrale di CAUCHY conserva la sua validità anche nelle condizioni generali di GOURSAT.

Osserviamo infine che, sempre con riferimento al caso $n=2, k=1$, una volta provata nelle condizioni dette la formula di GREEN, che scriveremo:

$$\int_{\gamma} (A dx + B dy) = \iint_D (B_x - A_y) dx dy \quad (D \rightarrow \gamma),$$

possiamo argomentare che, se le funzioni $A(x, y), B(x, y)$ sono differenziabili in una regione R semplicemente connessa ed ivi sussiste l'eguaglianza $B_x = A_y$, si ha:

$$\int_{\gamma} (A dx + B dy) = 0$$

per ogni linea di JORDAN chiusa regolare situata in R . Ne segue che $A dx + B dy$ è differenziale totale della funzione

$$G(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (A dx + B dy),$$

univocamente definita qualunque sia in R l'arco regolare di integrazione che conduce da (x_0, y_0) ad (x, y) .

Invece l'uguaglianza $B_x = A_y$, nella sola ipotesi della continuità di A, B insieme all'esistenza delle derivate parziali, non basta a garantire che $A dx + B dy$ sia un differenziale esatto, come ha dimostrato TOLSTOFF con un esempio⁽²⁾.

⁽¹⁾ Avvertiamo però che il ragionamento ivi sviluppato non sembra facilmente generalizzabile quando ci si ponga in condizioni analoghe per n, k qualunque.

⁽²⁾ Cfr. TOLSTOFF, *Recueil mathématique*, Moscou, (2), 9, pag. 461.

Questo fatto mostra che l'ipotesi 2) nel precedente enunciato generale non è sostituibile con la sola ipotesi dell'esistenza delle derivate parziali dei coefficienti della forma ω_k .

2. — Proveremo dapprima la [1] nel caso che V_{k+1} sia un semplice rettilineo n -dimensionale $E_n(k+1=n)$, il cui contorno indicheremo con e_{n-1} .

Nel caso presente le forme integrande possono scriversi:

$$\begin{aligned} \omega_{n-1} &= \sum_1^n A_i(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ [2] \quad d\omega_{n-1} &= \left\{ \sum_1^n (-1)^{i-1} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right\} d(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Per le ipotesi ammesse la funzione:

$$[3] \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_1^n (-1)^{i-1} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

è continua in $E_n + e_{n-1}$ ed inoltre, essendo $\bar{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ un punto di R prossimo a $P(x_1, \dots, x_n)$, può scriversi:

$$[4] \quad A_i(x_1, \dots, x_n) = A_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_r^n \frac{\partial A_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_r} (x_r - \bar{x}_r) + \alpha_i(P, \bar{P}) \overline{P\bar{P}}$$

dove le funzioni $\alpha_i(P, \bar{P})$ sono tali che, fissato $\varepsilon > 0$ può trovarsi $\delta_\varepsilon > 0$ siffatto che risulti:

$$|\alpha_i(P, \bar{P})| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

per tutti i punti P aventi da \bar{P} distanza $\overline{P\bar{P}} < \delta_\varepsilon$ (1).

Sia ora Q un ipercubo contenente E_n nel suo interno. Fissati ad arbitrio due numeri positivi λ, ε , mediante successive suddivisioni di Q in ipercubi parziali, possiamo supporre di aver decomposto Q in k ipercubi Q^1, \dots, Q^k di massima diagonale $\delta < \lambda$ siffatti che in

(1) Le funzioni $\alpha_i(P, \bar{P})$ non sono definite per $P \equiv \bar{P}$; ma quando ci occorra considerarle per $P \equiv \bar{P}$, intenderemo $\alpha_i(\bar{P}, \bar{P}) = \lim_{P \rightarrow \bar{P}} \alpha_i(P, \bar{P}) = 0$.

ognuna delle $h \leq k$ regioni $C^s = E_n \cdot Q^s$ non vuote (e siano quelle per cui $s=1, 2, \dots, h$) esista almeno un punto $Y^s(y_1^s, y_2^s, \dots, y_n^s)$ tale che risulti:

$$[5] \quad |z_i(P, Y^s)| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

per ogni P di $C^s + c^s$ essendo $C^s \rightarrow c^s$ ⁽¹⁾.

Sarà allora:

$$E_n = C^1 + C^2 + \dots + C^h, \quad e_{n-1} = c^1 + c^2 + \dots + c^h$$

$$\int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d\omega_{n-1} = \sum_1^h \left\{ \int_{c^s} \omega_{n-1} - \int_{C^s} d\omega_{n-1} \right\}.$$

In ciascuno dei domini $C^s + c^s$ possiamo esprimere i coefficienti di ω_{n-1} mediante la [4] nella quale si scelga $\bar{P} \equiv Y^s$, cosicchè risulta:

$$\omega_{n-1} = \sum_1^n A_i(y_1^s, \dots, y_n^s) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) +$$

$$+ \sum_1^n \left\{ \sum_1^n \frac{\partial A_i(y_1^s, \dots, y_n^s)}{\partial x_r} (x_r - y_r^s) \right\} d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) +$$

$$+ \sum_1^n \alpha_i(P, Y^s) \cdot \bar{P} \bar{Y}^s d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

D'altronde la [1] applicata nel dominio $C^s + c^s$ alle forme elementari qui di seguito indicate (per le quali la formula stessa può provarsi direttamente), dà:

$$[6] \quad \int_{c^s} d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$$

$$[7] \quad \int_{c^s} x_r d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } r \neq i \\ (-1)^{i-1} \int_{C^s} d(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{i-1} C^s & \text{per } r = i \end{cases}$$

ove con C^s si indica ad un tempo l'ipercubo considerato e la sua misura.

⁽¹⁾ Cfr. ad es. F. SEVERI e G. SCORZA DRAGONI: *Lezioni di analisi*, Zanichelli (1944), vol. II, Parte I, pag. 366, n. 10. Quanto interessa è ivi dimostrato nel caso $n=2$, ma le considerazioni ivi esposte sono ovviamente di carattere generale.

Tenuto conto delle [6], [7], [3], si ha:

$$\begin{aligned} \int_{c^s} \omega_{n-1} &= \sum_i^n \frac{\partial A_i(y_1^s, \dots, y_n^s)}{\partial x_i} (-1)^{i-1} C^s + \\ &+ \sum_i^n \int_{c^s} \overline{P Y^s} \alpha_i(P, Y^s) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ &= \varphi(y_1^s, \dots, y_n^s) C^s + \sum_i^n \int_{c^s} \overline{P Y^s} \alpha_i(P, Y^s) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) . \end{aligned}$$

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} \int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d \omega_{n-1} &= \sum_i^h \left\{ \varphi(y_1^s, \dots, y_n^s) C^s - \int_{C^s} d \omega_{n-1} \right\} + \\ &+ \sum_i^h \sum_i^n \int_{c^s} \overline{P Y^s} \alpha_i(P, Y^s) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

o anche, ricordando le [2], [3] e applicando il teorema della media:

$$\begin{aligned} [8] \quad \int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d \omega_{n-1} &= \sum_i^h \left\{ \varphi(y_1^s, \dots, y_n^s) - \varphi(z_1^s, \dots, z_n^s) \right\} C^s + \\ &+ \sum_i^h \sum_i^n \int_{c^s} \overline{P Y^s} \alpha_i(P, Y^s) d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

con $Z^s(z_1^s, \dots, z_n^s)$ punto opportuno di $C^s + c^s$.

Per l'uniforme continuità di $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in $E_n + e_{n-1}$, restringendo eventualmente λ possiamo ottenere che sia:

$$[9] \quad |\varphi(y_1^s, \dots, y_n^s) - \varphi(z_1^s, \dots, z_n^s)| < \varepsilon \quad (s=1, 2, \dots, h) .$$

Tenuto conto della [5] o della [9] si ha allora:

$$\left| \int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d \omega_{n-1} \right| < \varepsilon \sum_i^h C^s + \varepsilon \sqrt{n} \sum_i^h l^{(s)} \sum_i^n \left| \int_{c^s} |d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)| \right| ,$$

giacchè $P Y^s$ è minore o uguale della diagonale di Q^s , la quale vale $l^{(s)} \sqrt{n}$, indicando con l^s il lato di Q^s .

Ora, se Q è tutto interno ad E_n , c^s si riduce al contorno di Q^s e l'ultimo integrale scritto all'estensione di tale contorno, cioè $2nl^{(s)n-1}$. Se invece Q^s esce fuori di E_n , c^s comprende una porzione di e_{n-1} , che indicheremo (insieme alla sua misura) con e_{n-1}^s .

In ogni caso si può scrivere:

$$\left| \int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d\omega_{n-1} \right| < \varepsilon \left[E_n + n \sqrt{n} \sum_1^h l^{(s)} \} 2nl^{(s)n-1} + e_{n-1}^{(s)} \} \right]$$

e infine, ricordando che la lunghezza $l^{(s)} \sqrt{n}$ della diagonale di Q^s si è assunta $< \lambda$,

$$\left| \int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d\omega_{n-1} \right| < \varepsilon [E_n + 2n^2 \sqrt{n} Q + n \sqrt{n} \lambda e_{n-1}] ,$$

indicando al solito con E_n, Q, e_{n-1} le estensioni delle varietà omonime.

Stante l'arbitrarietà di ε , il primo membro dell'ultima diseguglianza scritta è nullo, come volevamo provare.

3. - Per giungere alla dimostrazione della formula di GREEN-STOKES nelle ipotesi generali del n. 1, faremo uso di un cambiamento di variabili. Ci occorre perciò premettere il seguente

Lemma: Se

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

è funzione differenziabile nella regione R e se:

$$[10] \quad x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_{k+1})$$

sono funzioni di classe $u \geq 1$, le quali pongono una corrispondenza univoca (non necessariamente biunivoca) tra i punti del semplice rettilineo $\bar{E}_{k+1} + \bar{e}_k$ ($\bar{E}_{k+1} \rightarrow \bar{e}_k$) dello spazio euclideo (u_1, \dots, u_{k+1}) e i punti del semplice (eventualmente singolare) $E_{k+1} + e_k$ ($E_{k+1} \rightarrow e_k$) appartenente ad R , allora la funzione:

$$F(u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) = f[x_1(u_1, \dots, u_{k+1}), \dots, x_n(u_1, \dots, u_{k+1})]$$

riesce differenziabile in ogni punto di $\bar{E}_{k+1} + \bar{e}_k$.

Consideriamo infatti in $\bar{E}_{k+1} + \bar{e}_k$ un punto comunque fissato $Q(u_1, \dots, u_{k+1})$ ed un punto $Q'(u_1 + \Delta u_1, \dots, u_{k+1} + \Delta u_{k+1})$ variabile nell'intorno di Q , e diciamo $P(x_1, \dots, x_n)$, $P'(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$ i punti che le [10] fanno corrispondere rispettivamente a P e P' .

Per le ipotesi le [10] sono differenziabili, e quindi:

$$[11] \quad \Delta x_i = x_i(Q') - x_i(Q) = \sum_1^{k+1} r \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} \Delta u_r + \alpha_i$$

con:

$$[12] \quad \lim_{Q' \rightarrow Q} \frac{\alpha_i}{\sqrt[k+1]{\sum_1^n \Delta u_r^2}} = 0.$$

Inoltre, per la differenziabilità di $f(x_1, \dots, x_n)$:

$$\Delta F = F(Q') - F(Q) = f(P') - f(P) = \sum_1^n \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \Delta x_i + \omega$$

con:

$$[13] \quad \lim_{P' \rightarrow P} \frac{\omega}{\sqrt[n]{\sum_1^n \Delta x_i^2}} = 0.$$

A causa della [11] l'incremento della funzione $F(u_1, \dots, u_{k+1})$ può scriversi:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \sum_1^n \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \left\{ \sum_1^{k+1} r \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} \Delta u_r + \alpha_i \right\} + \omega = \\ &= \sum_1^n \Delta u_r \sum_1^n \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} + \sum_1^n \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \alpha_i + \omega = \\ &= \sum_1^{k+1} r \frac{\partial F(Q)}{\partial u_r} \Delta u_r + \sum_1^n \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \alpha_i + \omega. \end{aligned}$$

Ricordando la [12], per dimostrare il lemma siamo ridotti a provare che:

$$[14] \quad \lim_{Q' \rightarrow Q} \frac{\omega}{\sqrt[k+1]{\sum_1^n \Delta u_r^2}} = 0.$$

Ora, se eventualmente accade che in ogni intorno di Q esistono posizioni di $Q' \neq Q$ per le quali si abbia $P' = P$, quando $Q' \rightarrow Q$ assumendo le dette posizioni si ha costantemente $\omega = 0$, cosicchè la [14] è soddisfatta limitatamente al modo specificato di far tendere Q' a Q .

Escluse codeste posizioni di Q' , si ha ad un tempo $Q' \neq Q$ e $P' \neq P$, onde può scriversi:

$$\left| \frac{\omega}{\sqrt{\sum_1^{k+1} \Delta u_r^2}} \right| = \left| \frac{\omega}{\sqrt{\sum_1^n \Delta x_i^2}} \right| \left| \sqrt{\frac{\sum_1^n \Delta x_i^2}{\sum_1^{k+1} \Delta u_r^2}} \right| \leq \left| \frac{\omega}{\sqrt{\sum_1^n \Delta x_i^2}} \right| \sum_1^n \frac{|\Delta x_i|}{\sqrt{\sum_1^{k+1} \Delta u_r^2}}.$$

Per la [13] e la continuità delle [10] il primo fattore del prodotto ad ultimo membro è infinitesimo per $Q' \rightarrow Q$; per provare la [14] basterà quindi far vedere che in un intorno di Q il secondo fattore è limitato.

Dalla [11] risulta:

$$\sum_1^n \frac{|\Delta x_i|}{\sqrt{\sum_1^{k+1} \Delta u_r^2}} \leq \sum_1^n \frac{\sum_1^{k+1} \left| \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} \right| \cdot |\Delta u_r|}{\sqrt{\sum_1^{k+1} \Delta u_r^2}} + \sum_1^n \frac{|\alpha_i|}{\sqrt{\sum_1^{k+1} \Delta u_r^2}} \leq \sum_{i,r} \left| \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} \right| + \sum_1^n \frac{|\alpha_i|}{\sqrt{\sum_1^{k+1} \Delta u_r^2}}$$

L'ultimo addendo è, per la [12], infinitesimo per $Q' \rightarrow Q$, mentre il primo è indipendente da Q' ; da ciò segue la limitatezza del quoziente a primo membro in un intorno di Q , e quindi la tesi.

4. - Passiamo ora alla dimostrazione della [1] nelle condizioni generali. Per le ipotesi fatte al n. 1, è

$$V_{k+1} = \sum_1^p a_i E_{k+1}^{(i)} \quad \Gamma_k = \sum_1^p a_i e_k^{(i)}$$

ove ciascuno degli $E_{k+1}^{(i)} \rightarrow e_k^{(i)}$ è un semplice di classe $u \geq 1$ e gli a_i sono interi.

Per la linearità degli operatori che entrano in gioco basterà provare che la [1] vale per ciascuno dei semplici $E_{k+1}^{(i)}$. Sopprimendo l'indice i , indicheremo questo semplicemente con $E_{k+1} \rightarrow e_k$.

Essendo E_{k+1} semplice di classe $u \geq 1$, esso può rappresentarsi su un semplice rettilineo $\bar{E}_{k+1} \rightarrow \bar{e}_k$ dello spazio euclideo $(u_1, u_2, \dots, u_{k+1})$ mediante una trasformazione del tipo [10].

Risulta allora:

$$[15] \quad \int_{e_k} \omega_k = \int_{\bar{e}_k} \bar{\omega}_k; \quad \int_{E_{k+1}} d\omega_k = \int_{\bar{E}_{k+1}} d\bar{\omega}_k$$

ove con $\bar{\omega}_k, d\bar{\omega}_k$ s'indicano le forme differenziali trasformate di $\omega_k, d\omega_k$ mediante le [10].

Per la nota invarianza della differenziazione di CARTAN rispetto ai cambiamenti di variabili, risulta $d\bar{\omega}_k = d\bar{\omega}_k$, mentre, per quanto si è provato al n. 3, le forme $\bar{\omega}_k, d\bar{\omega}_k$ soddisfano a quelle ipotesi di differenziabilità e continuità dei coefficienti sotto le quali è valido il risultato acquisito al n. 2.

Ne segue:

$$\int_{\bar{e}_k} \bar{\omega}_k = \int_{\bar{E}_{k+1}} d\bar{\omega}_k = \int_{\bar{E}_{k+1}} d\bar{\omega}_k$$

e quindi per le [15]:

$$\int_{e_k} \omega_k = \int_{E_{k+1}} d\omega_k.$$

Il teorema enunciato al n. 1 è così completamente provato.

5. — Ferme rimanendo le ipotesi 2) e 3) dell'enunciato al n. 1, dimostriamo che la formula di GREEN nel piano:

$$[16] \quad \int_{\gamma} (A dx + B dy) = \iint_D (B_x - A_y) dx dy,$$

sussiste anche se l'ipotesi 1) viene sostituita da quella che γ sia una linea regolare semplice chiusa di Jordan, circondante il dominio D .

Dal n. 2 risulta intanto la validità della [16] quando γ sia un triangolo tutto interno alla regione R e D sia la regione triangolare delimitata da γ . È allora ovvio che la [16] stessa continua a valere quando γ sia una poligonale chiusa non intrecciata p tutta interna ad R e D la regione poligonale delimitata da p .

È poi noto⁽¹⁾ che nelle ipotesi ammesse per la linea γ si può scegliere su di essa un numero finito di punti $P_0, P_1, \dots, P_n \equiv P_0$ succedentisi nel senso positivo su γ , in modo tale che la poligonale p_δ di vertici consecutivi P_i non sia intrecciata, abbia il massimo lato δ^* minore di un segmento comunque prefissato, e che il verso di percorrenza determinato su p_δ dai punti P_i risulti positivo per p_δ .

Inoltre, detti D' e D'' due qualsiasi domini tali che $D' \subset D \subset D''$ senza che le frontiere abbiano punti a comune, può trovarsi un δ tale che, ogni qualvolta sia $\delta^* < \delta$, risulti $D' \subset \mathcal{S}_\delta \subset D''$, essendo \mathcal{S}_δ la regione poligonale delimitata da p_δ . Seguo da ciò che l'area di \mathcal{S}_δ tende all'area di D per $\delta^* \rightarrow 0$.

Si controlla poi facilmente che, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, può trovarsi un $\delta_\varepsilon^* > 0$ tale che, se P e Q sono due qualsiasi punti di γ aventi distanza minore di δ_ε^* sia: $|\text{arco } PQ| < \varepsilon$.⁽²⁾ Negli enunciati precedenti si può pertanto sostituire ovunque la considerazione di δ^* con quella del massimo, δ , degli archi $P_i P_{i+1}$.

Ciò premesso, consideriamo in R un dominio \bar{D} che contenga D nel suo interno; in base a quel che si è detto per δ minore di un opportuno $\bar{\delta}$, \mathcal{S}_δ è tutta interna a D . Considereremo nel seguito quelle sole poligonali p_δ per cui $\delta < \bar{\delta}$.

(1) Cfr. F. SEVERI e G. SCORZA DRAGONI, *Lezioni di analisi*, già cit., II₁, pag. 163.

(2) Ed infatti assunta l'ascissa curvilinea s come parametro su γ , notiamo che, nelle ipotesi ammesse, s è funzione univoca del punto P variabile nell'insieme chiuso γ . Per provare l'affermazione fatta basterà mostrare che tale funzione è continua (e quindi uniformemente continua) in γ , e cioè che, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, ad ogni punto $P_0(s_0)$ di γ può associarsi un numero $\rho_\varepsilon(P_0)$ tale che a tutti i punti di γ interni al cerchio di centro P_0 e raggio $\rho_\varepsilon(P_0)$ corrispondano valori di s soddisfacenti la $|s - s_0| < \varepsilon$, vale a dire costituenti un intorno $\gamma_\varepsilon(P_0)$ di P_0 su γ . Ora, se così non fosse, in ogni cerchio di centro P_0 cadrebbero punti di $\gamma - \gamma_\varepsilon(P_0)$ e quindi P_0 medesimo sarebbe punto di $\gamma - \gamma_\varepsilon(P_0)$ (insieme chiuso), cosicchè P_0 proverrebbe oltrechè da s_0 , da qualche valore di $s \neq s_0$, contro l'ipotesi che γ sia costituita di punti semplici.

Per ognuna di esse, secondo si è detto, vale la eguaglianza:

$$[17] \quad \int_{p_\delta} (A dx + B dy) = \iint_{\mathcal{S}_\delta} (B_x - A_y) dx dy .$$

Se proveremo che è:

$$[18] \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{p_\delta} (A dx + B dy) = \int_\gamma (A dx + B dy)$$

$$[19] \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{\mathcal{S}_\delta} (B_x - A_y) dx dy = \iint_D (B_x - A_y) dy$$

sarà stabilita la [16].

Cominciamo col dimostrare la [18]. Indicati genericamente con $P_k(x_k, y_k)$ i vertici di p_δ e posto:

$$S_\delta = \sum_1^n \{ A(P_k)(x_k - x_{k-1}) + B(P_k)(y_k - y_{k-1}) \} ,$$

risulta:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S_\delta = \int_\gamma \{ A dx + B dy \}$$

onde per provare la [18] basta mostrare che la differenza $\int (A dx + B dy) - S_\delta$ tende a zero per $\delta \rightarrow 0$.

All'uopo si può scrivere:

$$[20] \quad \int_{p_\delta} (A dx + B dy) - S_\delta = \sum_1^n \int_{P_{k-1} P_k} \{ [A(x, y) - A(P_k)] dx + [B(x, y) - B(P_k)] dy \}$$

ed osservare che, per l'uniforme continuità di $A(x, y)$, $B(x, y)$ in D , scelto $\varepsilon > 0$ può trovarsi un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per $\delta < \delta_\varepsilon$ le espressioni in parentesi quadre nella [20] risultino in valore assoluto minori di $\frac{\varepsilon}{2\gamma}$ (ove con γ s'indica la lunghezza della linea omonima).

Risulta allora:

$$\left| \int_{p_\delta} (A dx + B dy) - S_\delta \right| < \frac{\varepsilon}{\gamma} p_\delta \leq \varepsilon .$$

Passiamo a dimostrare la [19]. Detto M il massimo in D della funzione continua $|B_x(x, y) - A_y(x, y)|$ e fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, siano D' e D'' due domini tali che:

$$D' \subset D \subset D'' \subset \bar{D}$$

scelti in modo che le aree di D' e D'' differiscano per meno di $\frac{\varepsilon}{M}$. Si è detto che esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per $\delta < \delta_\varepsilon$ sia:

$$D' \subset \mathcal{G}_\delta \subset D''.$$

Indicheremo con G_δ il dominio (e la sua area) costituito da tutti i punti del piano interni ad uno solo dei due domini D , \mathcal{G}_δ e dai loro punti di accumulazione. Tutti i punti di G sono esterni a D' ed interni a D'' , e pertanto è:

$$G_\delta \subseteq D'' - D' < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Inoltre:

$$\left| \iint_D (B_x - A_y) dx dy - \iint_{\mathcal{G}_\delta} (B_x - A_y) dx dy \right| \leq \iint_{G_\delta} |B_x - A_y| dx dy \leq M G_\delta < \varepsilon$$

e con ciò è provata la [19].



QUESTIONI ANALITICHE INERENTI AI PROBLEMI DI STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO (*)

LUIGI BROGLIO

SYMMARIUM. — Ut elastici aequilibrii instabilitatem in subtilibus structuris investiget, Auctor quaerit expressionem tensoris deformationis in elastica re quae finitis ab alio loco in alium translationibus subiciatur. Exhibet deinde expressiones laboris deformationis usque ad secundi ordinis terminos, quod attinet ad velum cylindricum, ad quodlibet velum, et ad quodlibet medium tridimensionale.

1. — Una struttura sottile, dotata di curvatura e irrigidita da opportuni elementi di riquadro (timpani, centine, ordinate, ecc.) può, come è noto, sostenere i carichi a guisa di velo o membrana o guscio, cioè aflessionalmente. Un siffatto comportamento statico consente spessori minimi con l'ovvia conseguenza però che laddove il velo risulti compresso si verificano condizioni qualitativamente non dissimili da quelle di una sottile asta caricata di punta. Sorge così per molte moderne strutture (volte-travi, volte di traslazione, ali e fusoliere a guscio dei velivoli, ecc.) un problema di stabilità elastica che generalizza gli analoghi più classicamente acquisiti — nella fattispecie il cilindro circolare assialmente compresso e il medesimo soggetto a torsione semplice — sia sotto l'aspetto geometrico, perchè dal cilindro circolare si passa a qualunque tipo di velo continuo, sia sotto il profilo dell'iniziale distribuzione di sforzi che, ben più complessa della semplice e costante compressione o del semplice e costante scorrimento, presenta contemporanee e variabili da punto a punto tutte e tre le componenti degli sforzi a membrana e cioè i flussi di tensione normale T_1 e T_2 secondo due direzioni ortogonali e il flusso di taglio S .

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Gaetano Arturo Crocco nella riunione del 22 novembre 1951.

In tale ordine di problemi si presenta talora singolarmente efficace, come spesso accade nella trattazione delle più ribelli questioni di elasticità, l'impostazione energetica ⁽¹⁾, secondo cui in una struttura soggetta agli sforzi a membrana T_1 , T_2 , S e per la quale siano e_1 , e_2 gli allungamenti unitari (nelle direzioni T_1 , T_2) e ω lo scorrimento, derivanti da una arbitraria terna congruente u , v , w , di spostamenti, il minimo moltiplicatore critico λ_{cr} del carico si ottiene minimizzando rispetto a u , v , w , il rapporto:

$$\lambda = \frac{W^{(1)}}{L^{(2)}}$$

ove $W^{(1)}$ è potenziale elastico corrispondente ai termini del primo ordine in u , v , w , ed $L^{(2)}$, il lavoro degli sforzi noti T_1 , T_2 , S , per effetto dei soli termini di e_1 , e_2 , ω , del secondo ordine in u , v , w .

Poichè il calcolo di $W^{(1)}$ rientra nella ordinaria elasticità lineare, risulta la importanza del calcolo di $L^{(2)}$, cioè dei termini di e_1 , e_2 , ω , del secondo ordine negli spostamenti. Anzi si può osservare che la approssimazione fino ai termini del secondo ordine negli spostamenti è sufficiente solo per spostamenti infinitesimi, cioè quando si assuma la ordinaria impostazione euleriana dei problemi di stabilità. È però ben nota ⁽²⁾ la fondamentale osservazione per cui un velo curvo, per effetto di spostamenti finiti può trovarsi in condizioni più gravi che per lo imbozzamento incipiente, e cioè sopportare un carico inferiore allo euleriano. Di qui l'interesse teorico ed applicativo, per la teoria generale della stabilità dell'equilibrio elastico, di conoscere l'espressione del tensore della deformazione per un corpo elastico soggetto a spostamenti finiti. Questo appunto è il problema studiato nella presente nota.

Nella prima parte del lavoro sono date, in forma adatta alle applicazioni, le espressioni di e_1 , e_2 , ω , per un velo qualsiasi e per spostamenti finiti, mentre nella seconda parte della nota si è data la

⁽¹⁾ W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, Cap. IX, Springer, Berlin, 1934; G. KRALL, *Moltiplicatore critico di una distribuzione di carico su una volta autoportante*. Nota I. « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », 1946, vol. I.

⁽²⁾ THEODOR VON KÄRMÄN.

espressione delle componenti del tensore delle deformazioni per spostamenti finiti anche nel caso di un mezzo tridimensionale per il quale, come è noto, la struttura del potenziale elastico per spostamenti finiti non è peranco del tutto precisata ⁽¹⁾.

Vale forse la pena rilevare da ultimo che il metodo geometrico di cui ci si è giovati nella presente indagine ha carattere di generalità e potrebbe di conseguenza trovare vantaggiosa applicazione allo studio di svariate altre questioni di meccanica.

2. - Nei problemi della elasticità gli allungamenti unitari e scorrimenti debbono avere espressione coerente a quella degli sforzi e debbono perciò farsi dipendere da coordinate intrinseche alla struttura che si studia. In tale ordine di idee il LOVE ⁽²⁾ ha calcolato e_1 , e_2 , ω , per un velo qualsiasi, ma limitatamente ai termini del primo ordine in u , v , w . Il FLÜGGE ⁽³⁾ ha fornito, per il cilindro circolare e_1 , e_2 fino ai termini del secondo ordine. Nello stesso ordine di approssimazione il GALLI ⁽⁴⁾ ha ottenuto, sempre per il velo cilindrico circolare, tutte e tre le quantità e_1 , e_2 , ω . Il KRALL, nella nota citata, ha fornito le espressioni esplicite di e_1 , e_2 , ω fino ai termini del 2° ordine nel caso del velo cilindrico quale si voglia.

Come casi particolari si ritrovano, in questa nota, i risultati del LOVE e del KRALL, non esattamente quelli del FLÜGGE e del GALLI i quali due ultimi autori hanno assunto una diversa definizione per gli spostamenti ⁽⁵⁾.

3. - Considero dapprima un velo cilindrico quale si voglia, soggetto a spostamenti finiti. Indico con P e P' le posizioni occupate da un generico punto del velo prima e dopo la deformazione di questo ultimo. Lo spostamento (P'—P) abbia componenti u , v , w secondo la terna intrinseca in P, costituita dalla generatrice, dalla tangente e dalla

⁽¹⁾ A. SIGNORINI, *Recenti progressi della teoria delle trasformazioni termo-elastiche finite*, « Atti del Convegno Matematico », 8-12 Nov. 1942.

⁽²⁾ LOVE A. E. H., *A Treatise On The Mathematical Theory of Elasticity*.

⁽³⁾ *Op. cit.*

⁽⁴⁾ A. GALLI, *Premesse analitiche alla stabilità delle volte autoportanti*. « Rend. Mat. Università di Roma », 1943.

⁽⁵⁾ G. KRALL, *op. cit.*, pag. 1290.

normale in P alla direttrice del cilindro. La terna intrinseca sia destra. Volendo studiare la deformazione nell'intorno di P , assumo come riferimento una terna x, y, z fissa, cioè non vincolata al velo, e coincidente, per comodità, con la terna intrinseca in P dianzi descritta. Gli spostamenti dei punti P_1 e P_2 , infinitamente vicini a P nelle direzioni x ed y , hanno ovviamente, riferiti alle terne intrinseche locali, le componenti

$$[1] \quad u + u' dx \quad v + v' dx \quad w + w' dx$$

$$[2] \quad u + \frac{\dot{u}}{R} dy \quad v + \frac{\dot{v}}{R} dy \quad w + \frac{\dot{w}}{R} dy$$

essendo $\frac{\partial}{\partial x} = (\quad)'$, $\frac{\partial}{\partial \psi} = (\quad)^*$; $\frac{1}{R}$ e ψ rispettivamente curvatura in P della direttrice ed angolo che la normale in P alla direttrice forma con una direzione assegnata.

Rispetto la terna fissa x, y, z le componenti di $(P'_1 - P_1)$ sono ancora date dalle [1] e così la componente secondo x di $(P'_2 - P_2)$ è ancora data dalla prima delle [2]. Poichè, invece, tangente e normale in P_2 sono ruotate di un angolo $d\psi$ rispetto le analoghe in P , segue che le componenti secondo y e z di $(P'_2 - P_2)$ valgono rispettivamente

$$\left[v + \frac{\dot{v}}{R} dy \right] \cos d\psi - \left[w + \frac{\dot{w}}{R} dy \right] \sin d\psi \quad \text{e} \quad \left[w + \frac{\dot{w}}{R} dy \right] \cos d\psi + \left[v + \frac{\dot{v}}{R} dy \right] \sin d\psi.$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e ponendo

$$[3] \quad \begin{array}{lll} U_1 = u' & V_1 = v' & W_1 = w' \\ U_2 = \frac{\dot{u}}{R} & V_2 = \frac{\dot{v} - w}{R} & W_2 = \frac{\dot{w} + v}{R} \end{array}$$

si conclude che le componenti di $(P'_1 - P_1)$ e di $(P'_2 - P_2)$ secondo x, y, z valgono

$$[4] \quad \begin{array}{lll} u + U_1 dx & v + V_1 dx & w + W_1 dx \\ u + U_2 dx & v + V_2 dx & w + W_2 dx \end{array}$$

Il problema è ridotto ad essere identico a quello in coordinate cartesiane. Si può scrivere

$$\begin{aligned} (P'_1 - P') &= (P'_1 - P_1) + (P_1 - P) - (P' - P) \\ (P'_2 - P') &= (P'_2 - P_2) + (P_2 - P) - (P' - P) \end{aligned}$$

e cioè i vettori $(P'_1 - P')$ e $(P'_2 - P')$ hanno, secondo x, y, z , in base alle [4] le componenti

$$[6] \quad \begin{array}{ccc} (1 + U_1) dx & V_1 dx & W_1 dx \\ U_2 dy & (1 + V_2) dy & W_2 dy \end{array}$$

Si ottengono allora immediatamente gli allungamenti unitari e_1, e_2 e lo scorrimento ω :

$$[7] \quad \begin{aligned} e_1 &= \sqrt{(1 + U_1)^2 + V_1^2 + W_1^2} - 1 \\ e_2 &= \sqrt{(1 + V_2)^2 + W_2^2 + U_2^2} - 1 \end{aligned} \quad \sin \omega = \frac{U_2 + V_1 + U_1 U_2 + V_1 V_2 + W_1 W_2}{(1 + e_1)(1 + e_2)}$$

Naturalmente, per $R \rightarrow \infty$, le [3] forniscono

$$U_2 = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad V_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad W_2 = \frac{\partial w}{\partial y}$$

e si ha il caso della lastra piana.

Se, per un velo cilindrico qualsiasi, nelle [7] si suppone che le quantità U_h, V_h, W_h , siano piccole rispetto la unità e tra loro dello stesso ordine di grandezza, sviluppando in serie le [7] e ricordando che per ξ, η, ω piccoli si ha:

$$[8] \quad \begin{aligned} \sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2} &= 1 + \xi + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \xi \eta^2 + \dots \\ \arcsin \omega &= \omega + \frac{\omega^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

si ottengono e_1, e_2, ω in serie di potenze fino all'ordine di approssimazione desiderato.

Così, ad esempio, arrestandosi ai termini del 2° ordine, poichè

$$\begin{aligned} \sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2} &= 1 + \xi + \frac{1}{2} \eta^2 \\ \frac{\xi + \eta^2}{(1 + e_1)(1 + e_2)} &= \xi + (\eta^2 - e_1 \xi - e_2 \xi) \end{aligned}$$

dalle [7] si ricava:

$$[9] \quad \begin{cases} e_1 = U_1 + \frac{1}{2} (V_1^2 + W_1^2) + \dots \\ e_2 = V_2 + \frac{1}{2} (W_2^2 + U_2^2) + \dots \end{cases}$$

$$[10] \quad \omega = (U_2 + V_1) + [(U_1 U_2 + V_1 V_2 + W_1 W_2) - (U_2 + V_1) U_1 - (U_2 + V_1) V_2]$$

cioè

$$\omega = (U_2 + V_1) + [W_1 W_2 - U_1 V_1 - U_2 V_2] + \dots$$

Le [9] e [10], naturalmente insieme con le [3], coincidono con i risultati trovati dal LOVE, per i termini del 1° ordine, e dal KRALL per i termini del 2° ordine, nei lavori citati.

4. — Nel caso di un velo qualsiasi soggetto a spostamenti finiti, le formule precedenti, dalle [4] in poi, valgono integralmente. Si tratta quindi semplicemente di precisare, per questo problema più generale, le formule corrispondenti alle [3]. Indico ancora con P e P' le posizioni occupate da un generico punto del velo prima e dopo la deformazione. Lo spostamento (P' - P) abbia componenti u, v, w , secondo la terna intrinseca in P, costituita dalle tangenti alle due linee α e β di curvatura, e della normale al velo in P. Assumo ancora — per studiare la deformazione nell'intorno di P — come riferimento fisso una terna x, y, z coincidente, per comodità, con la terna intrinseca in P ora descritta. Gli spostamenti dei punti P₁ e P₂ infinitamente vicini a P nella direzione x ed y hanno ovviamente, riferiti alle terne intrinseche locali, le componenti

$$[1'] \quad u + \frac{u'}{A} dx \quad v + \frac{v'}{A} dx \quad w + \frac{w'}{A} dx$$

$$[2'] \quad u + \frac{\dot{u}}{B} dy \quad v + \frac{\dot{v}}{B} dy \quad w + \frac{\dot{w}}{B} dy$$

essendo $\frac{\partial}{\partial \alpha} = (\quad)'$, $\frac{\partial}{\partial \beta} = (\quad)'$; $A d\alpha = dx$, $B d\beta = dy$ gli elementi lineari sulle due linee di curvatura uscenti da P.

Per ottenere le componenti di (P'₁ - P₁) e (P'₂ - P₂) secondo x, y, z basta rilevare i coseni direttori delle terne x_1, y_1, z_1 , x_2, y_2, z_2 , intrinseche in P₁ e P₂, rispetto x, y, z , secondo la seguente tabella, ove R₁ ed R₂ stanno ad indicare i raggi di curvatura delle sezioni normali del velo che hanno per tangente in P gli assi x ed y rispettivamente.

	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2
x	1	$\frac{\dot{A}}{AB} dx$	$-\frac{dx}{R_1}$	1	$-\frac{B'}{AB} dy$	0
y	$-\frac{\dot{A}}{AB} dx$	1	0	$\frac{B'}{AB} dy$	1	$-\frac{dy}{R_2}$
z	$\frac{dx}{R_1}$	0	1	0	$\frac{dy}{R_2}$	1

[11]

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e ponendo

$$[3] \quad \begin{aligned} U_1 &= \frac{u'}{A} + \frac{\dot{A}}{AB} v - \frac{w}{R_1}; & V_1 &= -\frac{\dot{A}}{AB} u + \frac{v'}{A}; & W_1 &= \frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A} \\ U_2 &= \frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB} v; & V_2 &= \frac{B'}{AB} u + \frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{R_2}; & W_2 &= \frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B} \end{aligned}$$

si ottengono nuovamente le formule [4] e quindi tutte le seguenti fino alle [10] incluse.

In particolare, dalle [7] e [3'] si ottengono gli allungamenti unitari e_1 , e_2 e lo scorrimento ω per un velo qualsiasi e spostamenti finiti:

$$[7'] \quad \begin{aligned} e_1 &= \sqrt{\left(1 + \frac{u'}{A} + \frac{\dot{A}}{AB} v - \frac{w}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{v'}{A} - \frac{\dot{A}}{AB} u\right)^2 + \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A}\right)^2} - 1 \\ e_2 &= \sqrt{\left(1 + \frac{B'}{AB} u + \frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B}\right)^2 + \left(\frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB} v\right)^2} - 1 \\ \sin \omega &= \frac{\left(\frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB} v\right) + \left(\frac{v'}{A} - \frac{\dot{A}}{AB} u\right) + \left(\frac{u'}{A} + \frac{\dot{A}}{AB} v - \frac{w}{R_1}\right) \left(\frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB} v\right) + \left(\frac{B'}{AB} u + \frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{R_2}\right) \left(\frac{v'}{A} - \frac{\dot{A}}{AB} u\right) + \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A}\right) \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B}\right)}{(1 + e_1)(1 + e_2)} \end{aligned}$$

In base alle [9], [10] e [3'] i termini di e_1 , e_2 , ω del 2° ordine valgono:

$$[9'] \quad \begin{aligned} e_1^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v'}{A} - \frac{\dot{A}}{AB} u \right)^2 + \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A} \right)^2 \right] \\ e_2^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB} v \right)^2 + \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Per i veli nei quali sia nulla la derivata logaritmica di A secondo β e di B secondo α si ha, più semplicemente:

$$[9''] \quad \begin{aligned} e_1^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v'}{A} \right)^2 + \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A} \right)^2 \right] \\ e_2^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\dot{u}}{B} \right)^2 + \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$[10''] \quad \omega_2^{(2)} = \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A} \right) \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B} \right) - \left(\frac{u'}{A} - \frac{w}{R_1} \right) \frac{v'}{A} - \left(\frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{R_2} \right) \frac{\dot{u}}{B}.$$

5. - Nel caso infine di un mezzo tridimensionale soggetto a spostamenti finiti, non si tratta che di ripetere, generalizzandole, le considerazioni precedenti. Indico ancora con P e P' le posizioni occupate da un punto del mezzo prima e dopo la deformazione. Lo spostamento P' - P abbia componenti u, v, w secondo la terna intrinseca in P costituita dalle tangenti in P alle tre linee coordinate α, β, γ del sistema di coordinate curvilinee generali alle quali il mezzo si intende riferito. Per studiare la deformazione nello intorno di P, assumo ancora come riferimento una terna destra x, y, z fissa e coincidente, per comodità con la terna intrinseca in P dianzi descritta. Gli spostamenti dei punti P_1, P_2, P_3 infinitamente vicini a P nelle direzioni x, y, z hanno ovviamente, riferiti alle terne intrinseche locali, le componenti:

$$[1''] \quad \begin{array}{lll} u + \frac{u'}{A} dx & v + \frac{v'}{A} dx & w + \frac{w'}{A} dx \\ u + \frac{\dot{u}}{A} dy & v + \frac{\dot{v}}{B} dy & w + \frac{\dot{w}}{B} dy \\ u + \frac{u^*}{C} dz & v + \frac{v^*}{C} dz & w + \frac{w^*}{C} dz \end{array}$$

essendo $\frac{\partial}{\partial x} = ()'$; $\frac{\partial}{\partial \beta} = ()'$; $\frac{\partial}{\partial \gamma} = ()^*$ e $A d\alpha = dx$, $B d\beta = dy$;

$C d\gamma = dz$ gli elementi lineari sulle tre linee coordinate uscenti da P. Per ottenere le componenti di $(P'_1 - P_1)$, $(P'_2 - P_2)$, $(P'_3 - P_3)$ secondo x, y, z basta rilevare i coseni direttori delle terne $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ (intrinseche in $P_1 P_2 P_3$) rispetto x, y, z secondo la seguente tabella in cui, ad esempio, r_{23} rappresenta il raggio di curvatura in P della

sezione normale alla superficie $\beta = \text{cost}$ che ha in P per tangente l'asse z .

	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
x	1	$-\frac{dx}{r_{21}}$	$-\frac{dx}{r_{31}}$	1	$\frac{dy}{r_{12}}$	0	1	0	$\frac{dz}{r_{13}}$
[12] y	$\frac{dx}{r_{21}}$	1	0	$-\frac{dy}{r_{12}}$	1	$-\frac{dy}{r_{32}}$	0	1	$\frac{dz}{r_{23}}$
z	$\frac{dx}{r_{31}}$	0	1	0	$\frac{dy}{r_{32}}$	1	$\frac{dz}{r_{13}}$	$\frac{dz}{r_{23}}$	1

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e ponendo

$$\begin{aligned}
 [3''] \quad U_1 &= \frac{u'}{A} - \frac{v}{r_{21}} - \frac{w}{r_{31}} & V_1 &= \frac{u}{r_{21}} + \frac{v'}{A} & W_1 &= \frac{u}{r_{31}} + \frac{w'}{A} \\
 U_2 &= \frac{\dot{u}}{B} + \frac{v}{r_{12}} & V_2 &= -\frac{u}{r_{12}} + \frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{r_{32}} & W_2 &= \frac{v}{r_{32}} + \frac{\dot{w}}{B} \\
 U_3 &= \frac{u^*}{C} + \frac{w}{r_{13}} & V_3 &= \frac{v^*}{C} + \frac{w}{r_{23}} & W_3 &= -\frac{u}{r_{13}} - \frac{v}{r_{23}} + \frac{w^*}{C}
 \end{aligned}$$

si conclude che le componenti di $(P'_1 - P_1)$, $(P'_2 - P_2)$, $(P'_3 - P_3)$ secondo x, y, z valgono

$$\begin{aligned}
 [4''] \quad & u + U_1 dx & v + V_1 dx & w + W_1 dx \\
 & u + U_2 dy & v + V_2 dy & w + W_2 dy \\
 & u + U_3 dz & v + V_3 dz & w + W_3 dz
 \end{aligned}$$

Il problema è ancora una volta ricondotto ad essere come se il mezzo fosse riferito a coordinate cartesiane ordinarie.

Con il solito ragionamento si conclude che le componenti di $(P'_1 - P')$, $(P'_2 - P')$, $(P'_3 - P')$ secondo x, y, z valgono:

$$\begin{aligned}
 [6''] \quad & (1 + U_1) dx & V_1 dx & W_1 dx \\
 & U_2 dy & (1 + V_2) dy & W_2 dy \\
 & U_3 dz & V_3 dz & (1 + W_3) dz
 \end{aligned}$$

cosicchè i tre allungamenti e_1, e_2, e_3 ed i tre scorrimenti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ valgono:

[7'']

$$e_1 = \sqrt{1 + U_1^2 + V_1^2 + W_1^2} - 1 \quad \sin \omega_1 = \frac{V_3 + W_2 + U_2 U_3 + V_2 V_3 + W_2 W_3}{(1 + e_2)(1 + e_3)}$$

$$e_2 = \sqrt{(1 + V_2)^2 + U_2^2 + W_2^2} - 1 \quad \sin \omega_2 = \frac{W_4 + U_3 + U_3 U_4 + V_3 V_4 + W_3 W_4}{(1 + e_1)(1 + e_3)}$$

$$e_3 = \sqrt{(1 + W_3)^2 + U_3^2 + V_3^2} - 1 \quad \sin \omega_3 = \frac{U_2 + V_4 + U_4 U_2 + V_4 V_2 + W_4 W_2}{(1 + e_1)(1 + e_2)}$$

CONCLUSIONE. - Le formule [7''] forniscono le sei componenti del tensore delle deformazioni in un punto qualsiasi di un mezzo elastico tridimensionale soggetto a spostamenti finiti. Le formule [7'] particularizzano il risultato stesso per un mezzo bidimensionale soggetto a spostamenti finiti. Tali risultati possono utilizzarsi, come detto al n. 1, per lo studio della stabilità elastica di strutture complesse quali le grandi coperture e le ali e le fusoliere a guscio dei moderni velivoli.

NOTIZIE SUL GESUITA CRISTOFORO BORRI
E SU SUE "INVENTIONI" DA CARTE FINORA
SCONOSCIUTE DI PIETRO DELLA VALLE,
IL PELLEGRINO (*)

ANGELO MERCATI

Accademico Pontificio Soprannumerario

SYMMARIUM. — E documentis, adhuc penitus ignotis, tabularii Della Valle-Del Bufalo, quae anno 1947 Vaticano Tabulario concedita sunt, compleres significantur notitiae de Christophori Borri S. I. (1583-1632) mediolanensis, scientifica opera et hereditate, quas notitias tradidit celeberrimus ille peregrinator et doctor Petrus Della Valle, cui agnomen Peregrinus.

Da Goa, ove era arrivato l'8 di aprile del 1623, il noto viaggiatore PIETRO DELLA VALLE ⁽¹⁾ indirizzava il 27 dello stesso mese all'amico Mario Schipano a Napoli una lettera, nella quale narrava le sue avventure dal 23 marzo precedente ⁽²⁾ e, riferendogli delle persone vedute « nel convento della casa professa » di quei Gesuiti, scriveva: « Trovai quivi molti padri italiani, della qual nazione la Compagnia si serve assai, e particolarmente molto nelle missioni di

(*) Nota presentata il 13-III-1951.

⁽¹⁾ Nato in Roma 11 aprile 1586: partì per l'Oriente nel 1614 e rientrò a Roma il 28 marzo 1626, morendovi il 20 aprile 1652 (*Enciclopedia italiana*, XII, 559). V. ora R. ALMAGIA, *Per una conoscenza più completa della figura e dell'opera di Pietro della Valle*, in « Rendiconti » della classe di scienze morali, storiche e filologiche dell'Accademia nazionale dei Lincei, « Atti », serie VIII, vol. VI (1951), 375-381, ove comunicazioni dal fondo della Valle del Bufalo.

⁽²⁾ È stampata nella *Parte terza dei Viaggi di Pietro della Valle il Pellegrino, L'India ed il ritorno in patria* (v. l'edizione di Brighton [ma realmente Torino] 1843, II, 576-600).

Cina, Giappone, India ed altri luoghi d'Oriente, onde, oltre i due già nominati [Antonio Schipano e Vincenzo Sorrentino d'Ischia)], trovai d'Italiani il padre Cristoforo Boro milanese detto Brono in India, per non offender le orecchie Portoghesi con la voce *boro* che in lor lingua non suona bene ⁽³⁾, il quale con un gran matematico, e fu poi anco mio confessore, il padre Giuliano Baldinotti pistoiese ⁽⁴⁾, giovane destinato in Giappone, verso dove poi andai » ⁽⁵⁾. Il Borri, nato a Milano nel 1583 ed entrato nella Compagnia di Gesù il 16 settembre 1601, andò missionario nell'India, dove fu uno dei primi a penetrare nella Cocincina, in cui dimorò cinque anni (1616-1622), dandone in seguito una *Relatione* molto interessante dedicata ad Urbano VIII, che fu stampata in Roma nel 1631 ⁽⁶⁾: nel 1624 ritornò

⁽³⁾ *Borro* in portoghese vuol dire montone fra uno e due anni e *burro*, invece, *asino*.

⁽⁴⁾ Della nota famiglia pistoiese, nato nel 1591 ed entrato nella Compagnia di Gesù nel 1609, partì per la Cocincina nel 1621, andò nel Tonchino dando una *Relatione* di questo suo viaggio (v. R. STREIT, *Bibliotheca missionum*, V, Aachen 1929, 588-590, n° 1622, 1626, 1631) e morì a Macao nel 1631 (G. M. MAZZUCHELLI, *Gli scrittori d'Italia*, II 1, Brescia 1758, 141; C. SOMMERVOGEL, *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus: Bibliographie*, I, Bruxelles - Paris 1890, 828; H. CORDIER, *Bibliotheca Indosinica*, III, Paris 1914, 1915 s.). V. su di lui il cap. 40 del libro quarto della *Cina* di D. Bartoli.

⁽⁵⁾ *Viaggi*, ed. cit., loc. cit., 597. Così in tutte le edizioni, ma il testo, che sintatticamente non corre, è certamente guasto (come ha notato G. GABRIELI, *Un anonimo « gesuita portoghese » del carteggio galileiano ora identificato*, in *Atti della reale accademia d'Italia, Rendiconti*, serie settima, III [1943], 103-109, p. 108 in nota 3 di p. 107) e credo che debba restituirsi così: « il quale è un gran matematico e fu poi anco mio confessore, e il padre Giuliano Baldinotti pistoiese, giovane destinato in Giappone, verso dove », ma non saprei come correggere qui: ad ogni modo il « poi andai » non va, perchè il della Valle non andò mai in Giappone, nè in quei venti giorni scorsi dall'8 al 27 aprile 1623 egli si allontanò da Goa.

⁽⁶⁾ *Relatione della nuova missione delli PP. della Compagnia di Giesu, al regno della Cocincina, scritta dal Padre Christoforo Borri Milanese della medesima Compagnia, che fu uno de primi ch'entrarono in detto Regno*, che, pubblicata nel testo italiano a Parma nel 1691 (nella parte seconda di *Il Genio Vagante* del conte A. degli Anzi), è stata tradotta in fiammingo (Lovanio 1631), francese (Rennes 1631), latino (Vienna 1633), inglese (1633 ed altre edizioni del 1704, 1732, 1744, 1752, 1808) e tedesco (Vienna 1633, Berlino 1763 e Lipsia 1790: v. SOMMERVOGEL, op. cit., 1821 s.; STREIT, op. cit., I, Münster i. W. 1916, 315, n° 715; 341, n° 760; 484, n° 1001; 547, n° 1067; V, 1929, n° 590-593; British Museum, *General Catalogue of printed books*, XXII, London and Beecles 1938, 762; CORDIER, loc. cit., 1917-19).

in Europa passando a insegnare matematiche a Coimbra e Lisbona, donde nel 1630 venne a Roma, dove, uscito dalla Compagnia di Gesù, entrò fra i Cisterciensi e morì nel 1632 (7). « Il aurait découvert un moyen de déterminer les longitudes par la déclinaison de l'aiguille aimantée et aurait été le premier à marquer graphiquement ces déclinaisons sur les cartes » (8). Ora nell'Archivio della Valle-del Bufalo, affidato nel 1947 all'Archivio Vaticano dai duchi Rivera, ho trovato diverse carte di Pietro della Valle, che riguardano il Borri e che per i molti particolari nuovi che comunicano vale la pena di riprodurre anche se si incontreranno ripetizioni e se lo scrittore sia molto prolisso.

Nel n° 52 si trova la seguente lettera « del Sig.^r Ingoli (9) a

(7) Borri, Borrus, Burrus: SOMMERVOGEL, op. cit., I, 1821 s. e VIII, 1878; J. DE CARVALHO, *Galileu e a cultura portuguesa sua contemporânea*, in *Biblos (Revista da faculdade de letras da universidade de Coimbra)*, XIX (1943), 399-482, pp. 404-411 e 423-438; A. DE BIL in *Dictionnaire d'histoire et de géographie ecclésiastiques*, IX, Paris 1937, 1279 s. Presso GABRIELI, loc. cit., 106 nota, vedi altre indicazioni bibliografiche del P. Lamalle, che vi spiega anche il metodo borriano per fissare le longitudini. - Il capitolo 158 del libro terzo della *Cina* di DANIELLO BARTOLI è intitolato: « Fine infelice di C. Borro, licenziato dalla Compagnia ».

(8) DE BIL, loc. cit. Il dotto contemporaneo Leone Allacci così ne scrive: « Scripsit praeterea de Arte navigandi opus exactissimum. In quo scopus Auctoris fuit artem a se primo inventam patefaciendi, ac demonstrandi uti certissimam, qua in quovis maris situ unusquisque gradum longitudinis infallibiliter posset invenire, rem navigantibus summopere necessariam, quod etiam ut melius pateret usui, Chartas, quas vocant navigandi, plenas erroribus, correxit, et emendavit, addiditque e Lunaribus Ecclipsibus aliisque Mathematicis observationibus, ab eodem summo studio elucubratis distantias locorum. Id ut melius succederet, instrumentum ex metallo confectum excogitavit, obtulitque acerrimo iudici, et aestimatori integerrimo. Visum placuit, dignumque iudicatum est, quod in tanti Principis [Urbano VIII] manibus renatum, *Naugnomonis* nomen ab eodem haberet, et viveret » (L. ALLATIUS, *Apes Urbanae*, Romae 1633, 66).

(9) Ingoli Francesco nato a Ravenna 21 novembre 1578, † a Roma 29 aprile (nel *Necrologium romanum* del GALLETTI, *Cod. Vatic. lat. 7880*, f. 118 la data è il 24 aprile) 1649 e sepolto a S. Andrea della Valle, nominato da Gregorio XV Segretario della S. Congregazione di Propaganda Fide novellamente fondata durandovi fino alla morte e rendendosi molto benemerito delle missioni (P. P. GINANNI, *Memorie storico-critiche degli scrittori Ravennati*, I, Faenza 1769, 437-442; L. VON PASTOR, *Storia dei Papi*, XIII, Roma 1931, ai luoghi segnati nell'indice a p. 1084 e XIV 1, Roma 1932, 146. Era anche segretario della Congregazione cerimoniale e fu lui che persuase Urbano VIII a dare ai cardinali il titolo di *Eminenza* (GINANNI, loc. cit., 438: v. circa la attribuzione del titolo VON PASTOR, loc. cit., 715).

me » vi annota il della Valle, « Per gli libri del Padre Borro in nome del Sig.^r Card. Barberino ⁽¹⁰⁾ »:

Ill.^{mo} Sig.^r mio Oss.^{mo}

Il Sig.^r Card. Barbarino padrone hà ordinato, che V. S. Ill.^{ma} procuri li libri del padre Borri, delli quali habbiamo hoggi parlato insieme, e che si compiaccia di portarli à S. Emza, la quale darà poi quegl'ordini che pareranno necessarij per servitio publico, et con questo a V. S. Ill.^{ma} bacio humilmente le mani. Di casa li 19 Maggio 1632.

Di V. S. Ill.^{ma}

Divotiss.^o servitor

Francesco Ingoli

All' Ill.^{mo} mio Sig.^r oss.^{mo}

Il Sig. Pietro della Valle

Vieno poi la risposta del della Valle:

« Al Sig.^r Ingoli. Ricordo di Pietro Della Valle. Per lo libro della Hidrografia in Portoghese ⁽¹¹⁾. In Roma 21 Maggio 1632.

Fra i libri stampati del Padre Borro ce n'è uno in lingua Portoghese intitolato Hidrografia, overo Exame de Pilotos, qualo in Portogallo è libro ordinario: ma qui, dove libri di Spagna rari ne vengono, non si trova, et havendolo io molte volte cercato, non ho mai potuto haverlo. Questo libro contiene cose buonissime per la navigatione,

⁽¹⁰⁾ Il cardinale Antonio Barberini seniore, cappuccino, fondatore del collegio e chiesa di Propaganda Fide, † 11 settembre 1646: v. *Dictionnaire cit. d'hist. et de géogr. ecclés.*, VI, 640 s.

⁽¹¹⁾ Nessuno dei bio-bibliografi del Borri (Allacci, Alegambe, Southwell, Argelati, Mazzuchelli, Sommervogel) conosce quest'opera, che non ho trovato elencata in nessun catalogo degli stampati di biblioteche. Il Pellegrino fu in Persia negli anni 1617-1621 e il Borri fu in Portogallo, a quanto se ne sa, solo dopo il 1624 e non si capisce come prima del 1618 abbia potuto pubblicare un'opera in portoghese. Forse la memoria qui ha servito male il della Valle facendogli attribuire al Borri quel trattato di idrografia datogli in Persia da quel portoghese che invece era d'altro autore, che io non sono riuscito a identificare. Noto però che nel capitolo V della sua *arte de navegar* il Borri scrive: « Navegar ou demarcar, o que na lingua grega e latina chamam Hidrografia... » (p. 17 dell'edizione notata qui sotto a nota 18).

e fra le altre, vi sono in esso i semi della inventione del Padre Borro de' i gradi della longitudine, cosa in mare importantissima. E dico, che in questo libro vi è, non la inventione di questa cosa tanto necessaria, ma solo i semi di essa, e certi principij, da i quali, e sopra i quali speculando, e bene operando, a mio giudicio, si sarebbe per aventura potuta trovare. Di che io mi accorsi, leggendo questo libro in Persia, dove da un Portoghese mi fu prestato, molto prima che io vedessi mai il Padre Borro; e fin d'all' hora hebbi animo e desiderio di provare a travagliarmi per trovar questa sì bella inventione, ma non lo potei fare perchè non aveva appresso di me ne carta da navigare, ne istrumenti nautici, ne libri, con che potermi aiutare; e mi trovava in terra lontano assai dal mare, dove ne anche poteva far di mare sperienza alcuna. Quando poi in India il Padre Borro mi comunicò questa sua inventione, da lui già trovata, se ben solo theoricamente all' hora, e non ancor comprobata, come poi fece nel viaggio verso Portogallo, con le sperienze, io subito gli dissi, che in questo libro ve ne erano alcuni lumi, dietro a i quali io ancora aveva havuto animo di andarla ricercando (*); et egli liberamente mi confessò che era vero, e che sopra quelli principij aveva esso speculato e trovatala. Mi comunicò anche il modo co' l quale aveva proceduto nella speculatione, e le ragioni et i fondamenti che ci aveva. Venuto dopo a Roma, qui ancora mi ha comunicato tutte le sperienze, che nell' ultimo suo viaggio ne ha fatte, e come, et in qual maniera ha comprobato con esse tutta questa arte, della quale hà scritto il suo bel libro; quali cose tutte mi son parute sempre buonissime, eccellentissime, e quelle stesse in somma, che io aveva in animo di operare al medesimo fine. Sì che essendo questo libro stampato della Hidrografia così buono, o dilettrandomi io grandemente di questa arte nautica, della quale Dio gratia ho tanta cognitione, e per theorica, e per pratica, che forse in Italia non cedo a niuno altro; e sopra tutto questa sì bella inventione del Padre Borro, per havermela esso tante volte e così a minuto comunicata, essendo io per aventura più d'ogni altro atto a poterla praticare, quando bisognasse, desidererei sommamente di haver questo libro stampato della Hidrografia; però se co' l favore di V. S. in qualche modo si potesse fare, che i Padri

(*) Potrebbe anche leggersi « riunendo ».

di San Vito ⁽¹²⁾, o chi haverà le robbe del Padre Borro, me ne volessero favorire, pagandoglielo, mi sarebbe sommo favore; già che di questi libri qui non ce ne è, e per farmelo venire da Portogallo, non ho corrispondenza alcuna in quei paesi ».

Indi ancora un'informazione per l'Ingoli:

« Al Signor Ingoli Informatione mia de gli scritti del Padre Borro per darsi al Signor Cardinal Barberino. In Roma 21 maggio 1632.

Delle scritture e robbe, che son rimaste del Padre Borro, e che si son trovate appresso di lui, se ne fece inventario, di ordine di Monsig.^r Torniello ⁽¹³⁾, da Giovanni Magrino Notaro di Roma ⁽¹⁴⁾,

⁽¹²⁾ La chiesa di S. Vito in Roma presso l'arco di Gallieno sull'Esquilino, che Sisto V aveva assegnata alle Monache Cisterciensi, trasferite poi a S. Susanna, succedendo loro il procuratore generale dei Cisterciensi, presso i quali si era da ultimo ritirato il Borri (A. NIBBY, *Roma nell'anno MDCCCXXVIII, parte prima moderna*, Roma 1839, 760; M. ARMELLINI - C. CECHELLI, *Le chiese di Roma*, Roma 1942, 1002 s.).

⁽¹³⁾ Non sarà l'Ottavio Tornielli della famiglia comitale novarese, che il 28 ottobre 1628 prese possesso d'un beneficio nella basilica di S. Pietro, diventandone canonico l'11 giugno 1624 succedendogli poi per morte un altro il 28 agosto 1650 (I. GRIMALDI, *Descendentiae canonicorum* ecc. della basilica Vaticana, in *Cod. Vatic. lat. 10171*, ff. 157 e 111), mentre nel *Necrologio romano* del GALLETTI, *Cod. Vatic. lat. 7882*, f. 15, è riferito da un avviso di Roma del 28 luglio 1650 che il martedì (cioè il 19) precedente il conte Tornielli canonico di S. Pietro morto a 80 anni fu seppellito a S. Carlo de' Catinari, ove in fatti lo ricor da una iscrizione data da V. FORCELLA, *Iscrizioni delle chiese... di Roma*, VII, Roma 1876, 274, nella quale però gli si danno soli 78 anni, ma l'altro Tornielli Antonio, che, vicegerente del cardinale vicario di Roma (non del governatore, come è detto da G. RAVIZZA, in *La Novara sacra del ven. vescovo C. Bescapè tradotta*, Novara 1878, 436 e ripetuto da A. VIGLIO, *Il palazzo della banca popolare di Novara*, in *Bollettino storico per la provincia di Novara*, XVI [1922], fasc. I, 13, nota 3), fu creato il 15 dicembre 1636 vescovo della patria Novara e morirà in Roma il 9 marzo 1650 venendo seppellito provvisoriamente a S. Maria in Aquiro (*Necrologio* cit. del GALLETTI, loc. cit., f. 6) e definitivamente nella cattedrale di Novara; fu anche referendario *utriusque Signaturae* (B. KATTERNACH, *Referendarii u. S. ecc.* in *Sussidi per la consultazione dell'Archivio Vaticano*, II, Città del Vaticano 1931, 260, 274, 303) e fu in casa di lui vicegerente, come esporrà il della Valle nella lettera al re di Portogallo, che il Borri fu colto dal malore che lo condusse rapidamente alla morte: si comprende bene come l'ordine di fare l'inventario delle cose sue venisse da lui, appunto perchè vicegerente.

⁽¹⁴⁾ Notaio all'ufficio quarto del tribunale della romana Rota dal 1610 al 1641 (A. FRANCOIS, *Elenco di notari che rogarono atti in Roma dal secolo XIV all'anno 1886*, Roma 1886, 5).

che si trovò presente alla sua morte, chiamatovi per fare il testamento, quale haveva cominciato a scrivere, ma non potè finirlo. Però egli, et altri che vi erano presenti, sentirono dal Padre molte cose a bocca della sua intentione, e bisognando, ne potranno far fede.

De gli scritti, che si trovarono, e che furono messi nell'inventario, due sono di momento, cioè

Un libro manuscritto *De tribus Caelis*, ⁽¹⁵⁾ molto meglio aggiustato, e più corretto di quello, che, messo insieme di varie sue lettioni, fù stampato già in Ispagna da un suo scolare, et

Un trattato a Nostro Signore di cose appartenenti alla Congregazione de Propaganda fide, per l'India Orientale ⁽¹⁶⁾, e per altri posti; quale adesso haveva finito, e lo comunicò con me, e certo è

(¹⁵) Il SOMMERVOGEL, loc. cit., 1821 sotto il n° 2 nota: « *Doctrina de tribus Coelis, Aereo, Sydereo et Empireo, opus Astronomis, Philosophis et Theologis favens*. Ulyssipone, per Alvar. Ferrerum 1641 (?) 4° », che per la data non potè essere nota al della Valle, poi « *Collecta astronomica ex doctrina P. Chr. Borri... de tribus Coelis... Jussu et studio domini D. Gregorii da Castelbranco... Ulyssipone, apud Matthiam Rodrigues MDCXXXI* », ricordando poscia un codice persiano della Biblioteca Vaticana contenente la versione in persiano ad opera del della Valle in Goa l'anno 1624 di un compendio latino « d'un trattato del Padre Christoforo Borro Gesuita della nuova costituzione del mondo secondo Tichone Brahe e gli altri astrologi moderni », come suona la traduzione italiana fattane dallo stesso della Valle a Roma nel 1631 (vedi E. Rossi, *Elenco dei manoscritti persiani della Biblioteca Vaticana* [Studi e Testi, 136], Città del Vaticano 1948, 35 s., ma v. già A. Mai, *Scriptorum veterum nova collectio*, IV, Romae 1831, 683, n° IX e X dei *codices persici biblioth. Vaticanae* indicato semplicemente con t. IV n. IX in SOMMERVOGEL o da HARTIG, in *The catholic Encyclopedia*, II, New York 1902, 685). Il confratello del Borri, padre Domenico le Jeune-homme, che partì per le missioni nel 1627 (SOMMERVOGEL, op. cit., IV, 799), scrisse in quel medesimo anno che il Borri « inventa une opinion touchant les cieux qu'ils estoient liquides; et qu'il n'y avoit que trois cieux, un que nous appelons air, l'autre pour les planètes ou estoiles, et l'autre empyrée; ce qui desplut grandement à Rome du temps du P. Claude Aquaviva [che fu generale della Compagnia di Gesù dal 19 febbraio 1581 alla morte avvenuta il 31 gennaio 1615: fu dunque quello del Borri un lavoro giovanile]: dont il en tira une penitence et un petit mot au bout. Depuis ce temps-là, il a encore tronvé le moyen de cognoistre les distances de longitude de l'Orient à l'Occident, et une façon nouvelle pour mieux naviguer, ce qui aura, comme on croit, par icy [scrive da Lisbona] grande vogue » (presso SOMMERVOGEL, op. cit. I, 1822 e GABRIELI, loc. cit., 108).

(¹⁶) Nell'Archivio di Propaganda Fide è una *Informatione del P. Christoforo Borro gesuita a S. S. d'una nuova India per poter in quella con sua autorità Apostolica mandar a piantare, e propagare la Santa Fede à petitione della Santa Congrega-*

cosa molto degna, che Nostro Signore lo veda, e lo consideri bene, e della maggior parte delle cose che scrive in esso, io ancora son testimonio di veduta. Ma bisogna avertire, che di questo ce n'è due copie; una di sua mano, che fù il primo sbozzo, et è il manco aggiustato, perchè nel correggerlo molte cose ne levò, molte ne aggiunse, et è ancora più difficile ad intendere per le molte cassature e rimesse, che vi sono; l'altro è più facile, e più aggiustato, di mano di' un copista: ma il Padre mi disse, che il copista in questo haveva fatto degli errori, per non haveere in qualche luogo inteso bene il suo carattere, però con l'altro originale di sua mano si potranno correggere; et io, che insieme co'l Padre stesso ho letto più volte e discusso l'originale, lo potrei far facilmente.

Queste due cose, cioè il libro de tribus Caelis, e'l trattato a Nostro Signore dell'India etc., insieme con certe altre bagattelle che li parvero, se le ha prese il Padre Maestro di Sacro Palazzo ⁽¹⁷⁾, che fu a visitare i libri e scritture del Padre Borro l'istesso giorno poco dopo che ne fu fatto l'inventario; ma però ne ha fatto ricevuta alli Padri di San Vito, che le havevano in mano.

Oltra di questo, e di tutto quello, che nell'inventario si contiene, delle cose del Padre Borro ne mancano tre principali, che non sono state poste nell'inventario, perchè non si trovarono appresso di lui, che erano in mano di altri, e sono le infrascritte.

Un libro della navigazione ⁽¹⁸⁾ manoscritto, da lui composto, con la sua inventione di sapere i gradi della longitudine in qualsivoglia luogo del mare; nel qual libro insegna e dichiara questa arte e tutti

zione de Cardinali de propaganda fide, che dev'essere la scrittura qui indicata dal della Valle e della quale l'ALLACCI, loc. cit., scrive: «scripsit item *Relatione à sua Santità delle cose dell'India Orientale, del Giappone, della China, dell'Etiopia, dell'Isola di S. Lorenzo, del Regno di Monomotapa, e della terra incognita Australe*, Qna Sacra Congregatio de Fide propaganda melius illis populiis consulere posset»: vedi J. SCHMIDLIN, *Die ersten Madagaskarmissionen im Lichte der Propagandamaterialien*, in *Zeitschrift für Missionswissenschaft*, XII (1922), 199-205, p. 198:

⁽¹⁷⁾ Maestro del Sacro Palazzo fu negli anni 1629-1639 il genovese Niccolò Riccardi, che morì a Roma l'11 maggio 1639 (I. TAURISANO, *Hierarchia Ordinis Praedicatorum*², Romae 1916, 56).

⁽¹⁸⁾ Sarà il *Tratado da arte de navegar, pelo Rão Pe Christovão Brono, da Companhia de Jesus: Em Lisboa no Collegio de Santo Antão da mesma Com-*

i secreti di essa, con le ragioni e prove necessarie, e con le sperienze fattene; scrivendone scientificamente. Questa è cosa utilissima e di grande importanza per le navigationi dell'Oceano degna non solo di conservarsi, e di stamparsi a publico beneficio, ma di farsi anche insegnare nelle scuole di mathematica, per istruzione de' piloti, a comun beneficio de' naviganti, e particolarmente de' Ministri Evangelici, che per servizio di Dio, con tante fatiche e pericoli, vanno per l'Oceano in paesi lontanissimi. Di più

La carta di navigare, da lui corretta, et aggiustata con la sua inventione, necessaria all'uso di essa, et

Un istrumento mathematico e nautico, pur da lui fatto, e pur necessario per praticare la sua inventione.

Hora di queste tre cose che mancano, il libro della navigatione lo prestò il Padre Borro al Padre Christoforo Scheiner Giesuita ⁽¹⁰⁾, a fine che se lo facesse trascrivere, che volse esso haverne una copia; quale in effetto fu fatta, et il Padre Scheiner l'ha: però l'originale, havendoglielo il Padre Borro ridomandato, il Padre Scheiner rispose, che non l'haveva, e che era rimasto in mano dello scrittore,

panhia, Anno Domini 16..., che si conserva nella biblioteca di Coimbra (J. H. DA CUNHA RIVARA, *Catalogo dos manuscriptos de la bibliotheca publica eborensis*, I, Lisboa 1850, 9) pubblicato da un manoscritto di Coimbra a Lisbona nel 1940 (*Arte de navegar pelo padre mestre Cristóvão Bruno (1628). Prefácio por A. Fontoura da Costa*, che ricorda (p. IX) anche un *Regimento que o P.^e Cristóvão Bruno da Comp. de Jesus, por ordens que S. M. dá aos pilotos das naus da India para fazerem a experiência sobre a invenção de navegar de leste ao oeste*, che era in un manoscritto all'accademia delle scienze di Lisbona, poi smarrito, ma del quale ha dato un sunto J. DE ANDRADE CORVO a pp. 394-398 della sua edizione del *Roteiro de Lisboa a Goa* di J. DE CASTRO, Lisboa 1882).

⁽¹⁰⁾ L'inventore del pantografo (su questo istrumento vedi M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* ² [riproduzione], II, Leipzig 1913, 693 s.), matematico, fisico e astronomo C. S., nato a Wald in Svevia 25 luglio 1575, entrato nei Gesuiti nel 1595, † a Neisse nella Slesia 18 luglio 1650, insegnò diverse discipline a Ingolstadt, Friburgo di Brisgovia e Roma, dove fu negli anni 1624-1633: scoperse egli pure le macchie del sole, ma rimase un antigalileiano vedi SOMMERVOGEL, op. cit., VII, 734 s. coll'elenco delle opere 735-740; B. DUHR, *Geschichte der Jesuiten in den Ländern deutscher Zunge*, II 2, Freiburg i. Br. 1913, 226-29, 434-39, 470 s.; L. KOCH, *Jesuiten - Lexikon*, Paderborn 1934, 1601 s. e vedi in *Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale*, XX, Firenze 1909, 319 s., indicati i molti luoghi dei volumi precedenti, nei quali sono cose sue o riferentisi a lui.

il quale fù un tal Laertio Alberti da Orte, che era partito da Roma, e se ne era andato al paese. Il Padre Borro, non trovando altro rimedio per riaverne il suo originale, ultimamente aveva fatto citare costui da Orte a restituirlo per gli atti del vicario all'ufficio del Cesio⁽²⁰⁾; ma per esser quello assente, e per la morte sopravvenuta, non ha havuto la cosa alcuno effetto. Ma chiara cosa è, che questo originale si troverà, o in mano del detto Laertio Alberti da Orte, o in mano del Padre Scheiner: e quando l'originale non si trovasse, havendone al certo il Padre Scheiner la copia, bisognerebbe almeno avere in ogni modo una copia della copia; perchè in somma è cosa di molta stima, da non lasciarsi perdere in modo alcuno, nè da permettere, che vada a rischio, che altri un giorno si facesse bello delle fatiche del Padre Borro, che non sarebbe giusto⁽²¹⁾.

La Carta di navigare la prestò pur all'istesso Padre Scheiner, che ne voleva far fare una copia; et havendogliela il Padre Borro più volte ridomandata, non la potè mai riaverne, forse, perchè non doveva esser finita quella che lo Scheiner faceva fare per se. Di questa ne ha un'altra copia il Padre Assistente di Portogallo nel Giesù, che la fece fare dal Greuter⁽²²⁾: ma perchè il Greuter non aveva più lavorato di carte da navigare, e questa fù la prima, benchè la facesse con particolare assistenza del Padre Borro, tutta via quella sua originale, che portò fatta in Portogallo da huomini pratici in questo, senza dubbio sarà migliore et in somma, come cosa alla inventione necessaria o l'originale, o una copia, bisognerebbe ricuperare in ogni modo.

L'istrumento di metallo, al quale il Padre Borro soleva gloriarsi che Nostro Signore, havendolo veduto, avesse posto il nome di Naugnomon, è pur in mano del Padre Scheiner, ovvero di un maestro, che per esso Padre Scheiner ne aveva da fare un'altro simile. Que-

(20) Nell'ufficio terzo della curia del cardinale vicario di Roma era notaio negli anni 1607-1635 Michelangelo Cesi (FRANCOIS, op. cit., 112).

(21) Anche l'ALLACCI (loc. cit.) esprimeva il timore che per la *mors inopina* del Borri, *non solum viro, amicisque infausta, sed scriptonibus etiam, et meditatatis, quae in aliorum manibus, nolo plagiariorum dicere, delitescunt*, queste vedessero un giorno la luce, *nescio an sub veri parentis nomine*.

(22) Matteo Greuter rinomato incisore in rame morto a Roma, ove era venuto prima del 1606, il 22 agosto 1638 (U. THIEME - U. BECKER, *Allgemeines Lexikon der bildenden Künstler*, XV, Leipzig 1922, 7-9).

sto pur è necessario per l'uso della inventione, e per conseguenza necessario di ricuperarsi.

Ma, perchè il Padre Scheiner, si dice che ha da partir presto per Alemagna, bisognerebbe farne quanto prima diligenza.

Vi sono ancora molte altre carte e fogli volanti del Padre Borro, e fra essi delle cose per la navigatione da non dispreggiarsi, delle quali tutte bisognerebbe tener cura; e sono con le altre sue robbe in San Vito », seguendo nell'anno 1642 (nel n° 53). « Ricordi miei al Padre Fra Luys Coutinho ⁽²³⁾ per rintracciare in Portogallo l'inventione del Padre Borro per le navigationi dell'India Datigli in Roma a 24 aprile 1642 » e nel 1650 una « lettera mia / alla S. M. del Re di Portogallo ⁽²⁴⁾ / Della Carta da navigare aggiustata / del Padre Borri / e del regimento per li Piloti / fatto dall'istesso / Da me fatti ricercare in Roma fra Gesuiti / e che il Padre Nuno da Cunha / porterà a Sua Maestà / Di Roma 23 ottobre 1650 ⁽²⁵⁾ ».

Eccone i testi:

A

« Ricordi che serviranno in Portogallo, a fine di poter rintracciare la inventione del Padre Christoforo Borro utilissima per le navigationi dell'India.

Il Padre Christoforo Borro (alias, frà Portoghesi, Brono) Gesuita, Italiano Milanese, fu quello, che trovò la inventione da saper di certo il punto della longitudine nelle navigationi del mare. Comunicò con me questi suoi studij in Goa gli anni 1623 e 1624 che ci trovammo ivi insieme, essendo esso già ritornato dalla Cocincina, dove era stato in missione; della qual missione poi in Roma lasciò stampato un libretto ⁽²⁶⁾. Partì da Goa il detto Padre Christoforo

⁽²³⁾ L'agostiniano L. Coutinho nativo di Lisbona, donde si recò nell'India entrando nell'ordine in Goa l'anno 1606: tornato in patria fu nominato vicario provinciale nel 1628: ripassò in India ritornandone nel 1634 e venendo poi eletto provinciale del Portogallo; « no se dan otras noticias en su biografia » (GREGORIO DE SANTIAGO VELA, *Ensayo de una biblioteca ibero-americana de la Orden de San Agustin*, II, Madrid 1915, 165).

⁽²⁴⁾ Giovanni IV di Braganza, nato 18 marzo 1604, salito al trono alla fine del dominio spagnuolo (dicembre 1640), † 6 novembre 1656.

⁽²⁵⁾ Annotazione di mano di Pietro della Valle, mentre la lettera che segue è copia d'altra mano.

⁽²⁶⁾ V. qui addietro la nota 6.

nel principio di febbraio del 1624, con una sola nave, che quell'anno passò da Goa a Portogallo, nella quale ancora era imbarcato Don Garcia de Silva y Figueroa, che era stato Ambasciadore per la Maestà Cattolica in Persia ⁽²⁷⁾, donde ritornato in Goa esso ancora per quella via se ne tornava in Spagna.

Arrivato che fu in Portogallo il Padre Christoforo da suoi Padri Giesuiti fu mandato in Coimbra a legger Mathematica; et io in Roma ricevei la prima lettera sua di Coimbra, data a 21 di settembre 1626 ⁽²⁸⁾. Nelle lettioni che fece in Coimbra, cominciò a legger di questa materia di trovar la longitudine certa in mare; ma avvertito da i suoi Padri, che questa era cosa d'importanza, e non da divulgarsi a tutti nelle lettioni, soprassedè il leggerne, et i Padri volsero esaminar la inventione fra di loro, e conosciutala di fondamento, risolverono che si proponesse in Lisbona al Vicerè ovvero a chi all'ora governava, per servitio del Re ⁽²⁹⁾. Per questo rispetto il Padre Borri andò poi in

⁽²⁷⁾ Sul quale varie cose riferisce il DELLA VALLE nella parte seconda, *La Persia*, dei suoi viaggi nelle lettere quarta e quinta, ed. cit., I, 550-711 e 712-870: leggasi anche *A chronicle of the Carmelites in Persia*, London 1939, ai luoghi elencati nell'indice a p. 1368. Sui suoi *Comentarios de la embajada que de parte del rey de España don Felipe III hizo al rey Xa Abds de Persia*, pubblicati a Madrid 1903-1905 da SERRANO SANZ per la Sociedad de bibliófilos españoles vedi M. ASÍN in *Boletín de la real academia de la historia*, XCII (1928), 497-510.

⁽²⁸⁾ Nel n° 188 dell'Archivio della Valle - del Bufalo, che è un registro di lettere spedite da Pietro dal 15 dicembre 1614 al 7 marzo 1652, trovo annotate le seguenti al Borri, delle quali non c'è copia nell'archivio (a lui quando partì pel Portogallo il della Valle consegnò il 25 gennaio 1624 in Goa una lettera per il cardinale Crescenzo: «per lo padre Brono nella nave»); «1626. Da Roma a 18 dicembre per via de Padri Giesuiti una lettera in Coimbra di Portogallo al Padre Christoforo Brono della Compagnia di Gesù risp.»; da Roma 4 settembre 1627 «una lettera in Coimbra lunga al P. C. Brono Giesuita risp. della stampa del libro [quale? l'Arte de navegar?] etc... un'altra lettera al medesimo insieme con un libro del funerale di Sitti Maano Gioerida mia moglie [stampato a Roma nel 1627; vedi P. DELLA VALLE, *Viaggio in Levante a cura di L. BIANCONI*, Firenze 1942, 351]; «a 17 gennaio (1630) per via del Padre João Lopez (v. più avanti) una lettera in Lisbona al P. C. Brono risp.»; «a 16 febbraio per via del P. J. Lopez una lettera in Madrid al P. C. B. e del fun(erale) inviatoli già nuove di me»; «a di detto (13 agosto 1630) per via del P. J. L. una lettera al P. C. Borri dove la mia risposta e parer mio sopra la sua venuta in Italia»; «a di detto 28 settembre (1630) per lo procaccio una lettera in Napoli al Padre C. Borri risp.».

⁽²⁹⁾ Il Portogallo era allora (dal 1580) sotto la sovranità del re di Spagna, che dal 31 marzo 1621 era Filippo IV.

Lisbona, et io in Roma ricevei la sua prima lettera di Lisbona data in 7 di Marzo 1629. E questa lettera me la mandò per un Padre Giesuita Portoghese, chiamato il Padre Juáo Lopez⁽³⁰⁾, il quale era stato suo discepolo di Mathematica, e mi scriveva il Padre Borro, che il Padre Juáo Lopez era informato di tutti i sopradetti negotiati circa la detta inventionione.

Con un'altra sua lettera, data in Lisbona alli 17 di Marzo 1629, mi da conto il Padre Borro che la sua inventionione della navigatione era stata esaminata, et approvata in Lisbona nel Consiglio reale; e me lo scrive con queste precise parole: "Il mio negotio della inventionione de Leste a Oeste già sta esaminato, et approvato in questo Consiglio reale di Portogallo, dove concorsero tutti li savij et intelligenti nella materia con tutti li Piloti di questo Regno. E dopo se approvò nel Consiglio di Madrid. Finalmente il Re comanda che questo Marzo l'armata che va a India di tre navi, e sei galeoni, col Vicerè navighi con questa mia inventionione. Già sono fatti l'istrumenti necessarij, per tutte le navi con spese reali; già sono istrutti li Piloti, o obligati a seguire l'inventionione et cet."

Dopo questo il Padre Borro fu chiamato in Castiglia dal Re, et in una sua lettera, che io ricevei, scritta in Madrid a 12 di Decembre 1629, mi dice queste precise parole. "Dopo d'haver mandato l'armata del Vicerè di 3 Navi e 6 Galeoni, per il mio modo di navigare con la graduatione della longitudine del mare, con li gastì regij, sono venuto chiamato dal Re, e a sua costa, a questa Corte, dove già tre volte ho dimostrato la inventionione in tre consulte di varie persone per questo effetto; e subito il Re mandò che si faccia l'ultima consulta per determinare il premio; et in questo mentre mi manda dare la sustentatione, et il gasto della impressione del libro di questa materia, auzi che l'istesso Re mi mandò dire, che vole vedere la inventionione. Le due Corone di Portogallo, e di Castiglia, vanno a gara sopra di me; quella vole che io torni in Lisbona per soprintendente delle sue navigationi, questa mi vole per Siviglia, accioche io gli applichi la medesima inventionione alle loro Navi delle Indie Occidentali insino as Filippinas, et cet."

(30) Nulla ho trovato su questo gesuita.

Alcuni mesi dopo io ricevei una lettera del Padre Borro, scritta in Barcellona a di 20 luglio 1630, nella quale mi dice queste precise parole: "Dopo che la mia inventione della graduatione della longitudine dall'Oriente a Ponente fu approvata con universale applauso nella Corte; il Re e Conte di Olivares mi volsero nominare Vescovo di Macao; ma li nostri Padri Portoghesi impedirono il tutto per essere io forestiero, sì che decretarono quelli del Consiglio reale, che il Re mi mandasse a Siviglia ad insegnare quelli Piloti delle Indie Occidentali, e provedergli degl'istrumenti necessarij per porre in pratica la nova arte per quelli mari, rogandomi a non volere essere manco liberale con la Corona di Castiglia di quello che io fui con quella di Portogallo, quando l'anno passato ordinai l'armata per la India Orientale. Ma io, così per essere la verità, come per farmi desiderare più, andai dal Re e Conte di Olivares ⁽³¹⁾, e dissegli che già era tardo per potere io fare cosa veruna in Siviglia per questo anno, per quanto la flotta haveva da partire fra pochi giorni, e per apparecchiare il necessario de istrumenti et cet. sempre bisognavano tre mesi; e così domandai al Re licenza di venirmi a Roma, il quale me la diede, ma con conditione, che tornassi a tempo per l'anno che viene inviare (sic) la flotta; e con questo mi sono partito, et arrivato a questo porto di Barcellona, donde in breve partirò per Italia et cet."

Non tardò molto il Padre Borro ad arrivare a Roma chiamatovi dalla Congregatione di Propaganda, dove si trattenne poi infin' alla sua morte. Mentre stava in Roma hebbe nuove di Spagna che era venuto avviso colà del successo del viaggio di quella armata che haveva navigato da Lisbona in India con la sua inventione, e di notabile era occorso questo. Il Piloto (essendosi così ordinato da Ministri regij) carteggiava secondo il modo solito all'antica. Et un Padre Giesuita oltramontano e se ben mi ricordo Alamanno, che era imbarcato nella medesima nave, e gli era stata data questa cura, come a persona intendente delle Mathematiche, e bene istruito della inventione del Padre Borro, carteggiava con la carta del Padre Borro, e secondo la sua nuova inventione; e ciò senza comunicarsi uno con

(31) Gaspare de Guzmán, conte - duca di Olivares, l'onnipotente ministro di Filippo IV, caduto poi in disgrazia, nato in Roma nel 1587, † 22 luglio 1645 (v. *Enciclopedia italiana*. XXV, 283 s.).

l'altro. Hora un giorno, che il Piloto, secondo il suo conto si faceva molto vicino all'India, ma più a mezzo giorno di Goa, sotto anche Cocin, il Giesuita all'incontro, con le regole del Padre Borro, si faceva in mezzo delle Isole Maldive, luogo pericolosissimo per ogni rispetto: ma guardando bene intorno, e non si scoprendo terra da nessuna banda, dove che le Isole Maldive sono assai vicine una all'altra, pensò al certo di havere errato, e che per conseguenza la inventione del Padre Borro, che da lui era stata osservata diligentemente, non fosse altrimenti buona. Tuttavia, per riputatione del Borro, tacque, e non volse dir niente. La mattina seguente poi, a pena fù fatto giorno, che si scoprì terra per proda. Il Piloto, e tutti gli altri Portoghesi, tutti allegri, conforme al lor conto fatto, cresero certo che fosse l'India, e già ogni uno si allestiva per smontare quanto prima in terra: ma quando si avvicinarono, conobbero, che quella terra era a punto una delle Isole Maldive, la ultima a levante in quella fila; e per conseguenza si accorsero, che il giorno precedente, conforme per a punto mostrava la inventione del Borro, si erano trovati, con non poco pericolo, in mezzo delle Isole Maldive, e quel che importa, da dugento e forse più leghe lontano donde si faceva il Piloto, secondo il modo del carteggiare ordinario. E se non havevano scoperto terra, era perchè si dovettero trovare in uno di quei canali più larghi fra le dette Isole, permettendo ciò forse Dio per salvargli da i pericoli in che, trovandosi altrove in canali più stretti, senza dubbio sarebbero incorsi. Da che si può comprendere quanto beneficio da quella inventione si potrebbe cavare. La relatione di questo successo fù mandata al Padre Borro in Roma da Spagna, autentica per man di Notaio con testimonij e con tutte le solennità.

Quello che poi avvenisse del Padre Borro; perchè non ritornasse più in Ispagna: come finalmente morisse in Roma a 14 di Maggio 1632⁽³²⁾; non occorre che io racconti che son cose già note. Solo dico che stante la sua morte, e l'essersi soppresso in quella et il suo libro, e gli strumenti, e tutta la sua inventione; per servitio della Corte di Portogallo

(32) Tutti i bio-bibliografi del Borri pongono la morte di lui al 24 maggio 1632: avrà ragione il della Valle, che scrive qui dieci anni dopo la morte? Nel *Necrologio romano* cit. del GALLETTI non ricorre il nome del Borri.

sarebbe necessario di far diligenza per rinvenirla, se fosse possibile. E come questa inventione in Portogallo fù esaminata più volte, et in Coimbra et in Lisbona, e nell'esaminarla fu anche insegnata e comunicata a diversi, non solo fra i Padri della Compagnia, a quello in particolare che navigò con le navi praticandola, ma anche in Lisbona a chi governava all'hora, et a molti Piloti et intendenti dell'arte, non sarebbe gran cosa di poter trovar qualche uno, che o la sapesse, o gli bastasse l'animo di rintracciarla. E benché uno non la sapesse tutta, pur nondimeno da chi ne sapesse una parte, e da chi ne sapesse un'altra, accozzando insieme le cose, si potrebbe in qualche modo andar rappezzando.

Quanto a gli strumenti necessarij per praticarla, erano due, et io amendue gli ho veduti. Uno era una Carta da navigare aggiustata dal Padre Borro e molto ben rettificata nelle distanze con osservationi di Eclissi fatte da lui con somma diligenza: nella qual Carta (che è quel che importa) vi sono alcune linee grosse, spettanti a questa inventione, co i loro spartimenti necessarij, che nelle altre carte non ci sono; e senza queste linee e spartimenti la inventione non si può praticare, perchè in quella consiste il secreto, del quale io ne sò buona parte, ma non sò il tutto. Di questa Carta così aggiustata e lineata, l'originale che il Padre Borro portò da Portogallo, qui in Roma l'ebbe (credo per denari prestatigli) il Padre Christoforo Scheiner pur Giesuita Alamanno, e buon Mathematico ⁽³³⁾, il quale la portò in Germania, come dicevano, per donarla all'Imperatore. Però in Roma ne restò una copia, fatta far con diligenza e con l'assistenza del medesimo Padre Borro, e restò in mano del Padre Assistente di Portogallo della Compagnia di Giesù, che era all'hora il Padre Nuno Mascarenhas ⁽³⁴⁾, nella cella del quale io l'ho veduta più volte attaccata al muro. E se io potessi havere in mano, o quella, o una copia diligente di essa, con commodità di poterla studiare, spererei forse di poterne cavar qualche costrutto.

L'altro Istrumento pur necessario per questa inventione, era un Istrumento Mathematico di ottone o metallo, inventato dal Padre Borro per certa operatione; al quale Istrumento Nostro Signore Papa

⁽³³⁾ Vedi qui addietro la nota 19.

⁽³⁴⁾ Varii Mascarenhas, non però il Nuno, sono in SOMMERVOGEL, V, 663-5.

Urbano Ottavo, fra le altre sue virtù e dottrine, intendentissimo ancora delle mathematiche, un giorno che il Padre Borro glielo mostrò, discorrendogli di questa materia, come ad Istrumento, nuovo, non ancora usato, ne da altri nominato, mise per ciò il nome, e lo chiamò, molto a proposito, con voce greca, Nagnomon. Quello che aveva il Padre Borro, fatto in Portogallo, l'ebbe pur in Roma il medesimo Padre Scheiner, e lo portò con se in Germania insieme con la Carta. Però questo Istrumento l'ho veduto bene, e sò tanto bene quello che è, come si ha da adoperare, et a che ha da servire, che senza vederne altro, mi basterebbe l'animo, da ogni mastro che intenda di questi lavori, di farlo far da me.

Pietro Della Valle».

B.

« Sacra Maestà,

Il Padre Christoforo Borri (ò Brono, come dicevano in Portogallo) Gesuita di patria Italiano Milanese, et all'ora Lettor di Mathematica in Coimbra, mio grande amico; havendo fatto molti viaggi per mare da Portogallo in India, e fino in Cocincina, con la sua dottrina, e con le sperienze fatte aveva trovato una bellissima inventionione, per poter saper di certo ne' viaggi del mare i gradi della longitudine; cosa importantissima nelle navigationi, et infn' hora non saputa con certezza. Per praticar questa inventionione con più esattezza, già che le carte da navigare non si trovano totalmente giuste, fabricò egli una carta aggiustatissima nelle distanze de' siti, havendola rettificata con l'osservation diligente di molti eclissi in varie parti del Mondo osservati da Mathematici valenti, che è la via più certa e più sicura in questa materia. Di più aveva fabricato un'istrumento mathematico, del quale navigando bisognava servirsi ogni giorno per la sua operatione. E di tutte queste cose aveva scritto un buon libro, nel quale dottrinalmente le esplicava a pieno. Queste sue inventioni furono esaminate in Portogallo da' Piloti, per ordine del Vicerè che vi era in quel tempo, e de gli altri Ministri Regij di Lisbona; et essendosi trovate buone, furono approvate da tutti, e se ne diede conto alla Corte. Fù chiamato il Padre in Castiglia per questo negotio; et ivi pur in Madrid furono esaminate di nuovo le sue cose da i migliori

Mathematici e Piloti che vi fossero; da i quali tutti furono approvate per buonissime; ordinandosi che si mettessero in esecuzione. Et in effetto nella prima flotta che partì da Lisbona verso India, si mandò un'altro Padre Gesuita istruito dal Padre Borri, il quale per tutto il viaggio, da se a parte andò carteggiando con questa inventione; mentre il Piloto da un'altra banda carteggiava al modo ordinario; e questa del Padre Borri riuscì tanto migliore, che in certa occasione d'importante pericolo, il Padre Gesuita con essa si trovò nel luogo giustissimo per a punto, dove che il Piloto si faceva di là lontano molte e molte leghe con errore. Della qual cosa io vidi una testimonianza authentica, che d'India ne fù mandata al Padre Borri infino a Roma, dov'egli all'hora si trovava, chiamatoci dalla Congregatione di Propaganda Fide. In Roma il Padre Borri hebbe molti travagli co' i suoi Superiori; a i quali non piaceva che esso trattasse co'l Papa, e con quella Congregatione, di negotii di propagation di Fede; ma il Padre Borri innocentemente, come nuovo in Roma, e mal'informato, haveva intrapreso questi trattati, credendo che la sua Religione, con la Congregatione, fosse di volontà tutt'una cosa, tendendo amendue ad un medesimo fine del servizio di Dio; però in questo s'ingannò, e n'ebbe per ciò tali molestie da i Superiori, che fù necessitato con beneplacito del Papa, che ve lo favorì con Brevi speciali, di uscir dalla Religione de' Gesuiti, e di passarsene a quella de' Monaci Cisterciensi. Quivi ancora hebbe travagli grandi dalli Spagnuoli, che havevano havuto a male la sua venuta in Roma, e che trattasse co'l Papa alcune cose per servitio della Christianità dell'India, che a loro non piacevano. In somma, le persecutioni contro 'l Padre Borri da tutte le parti furono tante e tali, che il poverello, trovandosi un giorno in casa di Monsig.^r Vicegerente ⁽³⁶⁾ a trattar de' fatti suoi, o fosse per li fastidij che haveva, ò pur per qualche aiuto che gli fosse dato, come si sospettò, assalito all'improvviso da certi gravi dolori, in termine di meno di sedici hore di malatia se ne morì. Dopo la sua morte, la carta da navigare originale da lui aggiustata, l'istrumento matematico da adoperarsi per la sua inventione, e'l libro che di queste cose haveva scritto, restarono in potere del Padre Scheiner Gesuita

(36) Vedi qui addietro la nota 18.

che era stato suo amico. il quale poi, tornando in Alemagna sua patria, portò tutte queste cose a donare all'Imperatore; et ivi, senza essersi più vedute, nè usate, si devono conservare, per sola galanteria, frà le curiosità matematiche. Io, che di tutte queste cose era informato, e dal Padre Borri istruito a sufficienza, desiderai sopramodo, che così bella inventione non si perdesse; ma che si risuscitasse, se fosse stato possibile, a beneficio di Portogallo, accioche se ne potesse servire, conforme il Padre Borri hebbe sempre intentione. Delle trè cose che bisognavano, cioè la carta da navigare, l'istrumento mathematico, e'l libro scrittone; del libro non mi curava più che tanto; perchè lasciati i lunghi discorsi scientifici, i quali io supponeva per veri, e provati, mi bastava d'haver solo le regole pratiche per usar della inventione, le quali io già sapeva a mente. L'istrumento mathematico che era necessario, havendolo io veduto, et osservato bene, mi bastava l'animo di farlo fare. La carta solo da navigare mi mancava, della quale pur ci era necessità per la giustezza de' siti. E sapendo io che il Padre Borri, quando era ancor frà Gesuiti, ne haveva fatto fare una assai buona per lo Padre Mascarenhas che era all'hora Assistente di Portogallo, e quando esso partì da Roma, facilmente doveva esser restata in mano de' Padri Gesuiti; usai ogni diligenza per farla ritrovare; interponendovi in Roma fin l'autorità del Sig.^r Vescovo di Lamego⁽³⁶⁾ quando era qui; ma non fù possibile di haverne mai nuova. In Portogallo ancora, ne feci più volte diligenza, per via del Padre Fra Luis Coutinho Agostiniano⁽³⁷⁾, pregandolo che in Lisbona et in Coimbra facesse cercare tutto quel che si poteva trovare di questa inventione, lasciatovi per ventura dal Padre Borri; ma nè anche per questa via potei arrivar mai a niente. Ultimamente, trovandosi in Roma il Sig.^r

(36) Nel concistoro del 14 maggio 1636 era stato nominato vescovo di Lamego Michele di Portogallo della famiglia del futuro re Giovanni IV, che, salito al trono, lo manderà a Roma, ove egli arrivò il 20 novembre 1641, ripartendone il 18 dicembre 1642 dopo lo svolgimento di dolorosi incidenti, frutto della ostilità fra Spagna, Portogallo e Francia come può vedersi in F. DE ALMEIDA, *História da Igreja em Portugal*, III 2, Coimbra 1915, 68-72 e L. VON PASTOR, *Storia dei Papi*, XIII, Roma 1931, 747-752. Morirà ai 3 di gennaio 1646 (P. GAUCHAT, *Hierarchia catholica medii et recentioris aevi*, IV, Monasterii 1936, 213; DE ALMEIDA, loc. cit., 880).

(37) Vedi qui addietro la nota 28.

Fra Manuel Alvarez Carrilho⁽³⁸⁾, l'informai di questo negotio, e lo pregai di adoperarvisi per beneficio del Regno, e per lo servitio che ne risultava a Vostra Maestà. Il Sig.^r Carrilho, con la sua solita efficacia, ne ricercò il Padre Nuno da Cunha Assistente all'hora di Portogallo⁽³⁹⁾; tenendo io per certo, che la carta, fatta già per lo Padre Mascarenhas, non potesse essere altrove, che appresso di lui, ò de' suoi Padri Gesuiti. In fine, nella Cella del Padre Nuno da Cunha si ritrovò; conservata sì, ma nascosta, e poco conosciuta. Io, andato a vederla, e riconoscerla, insieme co'l Sig.^r Carrilho, ne diedi ad amendue la notizia che bisognava; e'l Padre Nuno promise di portarla egli stesso a Vostra Maestà. Accioche i Piloti in Portogallo la intendano, e se ne possano servire, haveva io pensato di scriverne brevemente la istruttione, per reggimento loro: ma essendosi qui cercato meglio nella Cella del Padre Nuno da Cunha, si è trovato che vi è questa istruttione ancora, ò reggimento per li Piloti, fatto dal medesimo Padre Borri, che senza dubbio sarà migliore di quello, che havrei fatto io; onde non occorre che io scriva altro. Quanto all'istrumento mathematico, siamo restati co'l Signor Carrilho, che si farà diligenza in Lisbona, se a sorte se ne trovasse alcuno, fatto far là dall'istesso Padre Borri, che potrebbe essere: ma, caso che non si trovi, scriveranno a me, et io lo farò far qui in Roma, e lo manderò. Ma perchè questo istrumento si può fare in più modi, che tutti io potrò e saprò farli; cioè per via di gradi, o di parti proportionali, o di altre maniere che vengono ad esser poi tutt'uno in sostanza, benchè spiegate diversamente: quando bisogni, che io faccia far l'istrumento, non sapendo io qual di questi modi habbia tenuto il Padre Borri nella sua istruttione, ò reggimento per li Piloti, perchè il Padre Nuno da Cunha non me l'hà mostrata; se mi si comunicherà questa istruttione ò reggimento del Padre Borri; io farò far l'istrumento, conforme a punto al modo che egli haverà tenuto; che, sia qual si voglia de' modi diversi, a me che gl'intendo, tutti saran facili. Questa istrut-

(38) Agente del clero di Portogallo mandato a Roma nel 1648, ma *de facto* per trattarvi negozi del re: DE ALMEIDA, loc. cit., 79 s., 723.

(39) Nato nel 1594, entrato nella Compagnia nel 1611, † a Lisbona 14 ottobre 1674 (SOMMERVOGEL, op. cit., II, 1726 s.).

tione ancora del Padre Borri, insieme con la carta, promette il Padre Nuno da Cunha di portare a Vostra Maestà. Resti Vostra Maestà servita di stimare assai queste cose; perchè sono importantissime per le navigationi dell'Indie, e del Brasil; e da me prenda a grado questo piccolo servizio delle diligenze che ho fatte per farle ritrovare: che certo, se non era io, non si sarebbero ritrovate già mai, e restavan per sempre sepolte qui in Roma nella cella de' Padri Assistenti di Portogallo, senza essere usate, nè forse conosciute, come si doveva. Il Signor Carrilho potrà informare Vostra Maestà del tutto: et io finisco, con pregar Dio per la lunga vita e felicissimi successi di Vostra Maestà, alla quale con ogni affetto fò riverenza. Di Roma li 23 di ottobre 1650.

Di V. S. Maestà

Humiliss.^o e Divotiss.^o Ser.^{re}
Pietro Della Valle ⁽⁴⁰⁾

⁽⁴⁰⁾ Nel cit. n° 188 dell'Archivio della Valle - del Bufalo è notato: «Da Roma 1650... a 22 e 23 ottobre per lo Padre Frà Stefano di San Girolamo Franceseano, che fu già Custodio. Due lettere in Portogallo a Sua Maestà. La prima, di complimento, e della mia lunga e grave infermità, e della recuperata salute. La seconda, della Carta da navigare del Padre Borri; e della istruzione, o regimento (v. qui addietro nota 18) per li Piloti, composto dal medesimo, da me fatta ritrovare nella Cella de' Padri Assistenti di Portogallo della Compagnia di Giesù, dove tutte queste cose stavano nascoste, e non conosciute. E che a mia istanza il Padre Nuno da Cugna, ultimo Assistente, che torna hora in Portogallo, le porterà a Sua Maestà. Con tutta la Historia del Padre Borri; e di quanto io ho fatto in questo negotio. Di amendue queste lettere tengo copia appresso di me ».

OSSERVAZIONI CRITICHE CIRCA L'EFFICACIA DIMOSTRATIVA DELL'ESPERIMENTO DI KENNEDY (*)

(Con una figura)

MARIO GALLI

SUMMARY. — Auctor demonstrare vult quosdam hypotheses, quibus solent physici uti in interpretando experimento a MICHELSON olim peracto, non necessario praesupponi, si experimenta MICHELSON et a KENNEDY facta inter se recta ratione (quae hic describitur) conferantur eorumque exitus recto examini subiciatur. Ex quo patet communem physicorum conclusiones novo efficaciore argumento confirmari.

1. — Qualche articolo apparso recentemente ha tentato di infirmare la validità dell'esperimento di MICHELSONE MORLEY ⁽¹⁾. La pubblicazione non ha provocato polemiche soprattutto per il fatto che la teoria della relatività è ormai considerata al riparo da ogni obbiezione. Una messa a punto dovuta ad A. METZ pubblicata in « Revue d'Optique » ⁽²⁾ mette in rilievo il fatto che le nuove critiche non presentano nulla di nuovo rispetto a quelle pubblicate in passato e che furono a suo tempo ampiamente discusse. Veramente a noi risulta che lo spirito informatore delle note apparse recentemente sia alquanto diverso, con la differenza peraltro che le critiche del passato, dovute talvolta, a fisici sommi, mettevano in risalto (sia pure esagerandolo) un punto realmente debole nel ragionamento di MICHELSON e MORLEY, gli arti-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 16 maggio 1952.

⁽¹⁾ J. SIVADJIAN, « Revue Philosophique ». Genn. 1950, p. 72; « Revue d'Optique », v. 30 (1951), pag. 323.

⁽²⁾ G. RAMBAUD, *Ether et Relativité*. Valence sur Rhône (1950).

⁽³⁾ A. METZ, « Revue d'Optique », v. 31 (1952), pag. 124.

coli recenti insistono su un equivoco che non ci appare degno di molta considerazione. In sostanza impugnano ciò che è evidente.

Per conseguenza con questa nota non abbiamo alcuna intenzione di sottoporre ad analisi critica le recenti pubblicazioni nè vogliamo riassumere e confutare le critiche del passato. Queste critiche sono assai numerose ed una critica estesa costituirebbe un problema di scarsa attualità ⁽¹⁾.

Noi riteniamo che le critiche rivolte in passato contro l'efficacia dimostrativa dell'esperimento di MICHELSON siano confutabili mediante un esame accurato di esse. Tuttavia non ci risulta che si sia procurato di eliminare tali dubbi, invece con un'analisi critica, mediante una opportuna variazione dello stesso esperimento di MICHELSON. Ciò è stato fatto, ma non intenzionalmente, nel 1932 da KENNEDY e THORNDYKE ⁽²⁾. Infatti lo scopo diretto di questi sperimentatori era diverso, come vedremo tra poco. A noi sembra tuttavia che l'esperimento medesimo sia idoneo a dissipare i dubbi che illustri fisici sollevarono contro la validità dell'esperimento di MICHELSON. Riteniamo anzi che mediante l'esperimento di KENNEDY ci si possa rendere indipendenti dalla postulazione del principio di HUYGHENS-FRESNEL, che è utilizzato sia dai sostenitori che dagli avversari. E questo costituisce indubbiamente un vantaggio non disprezzabile.

2. - Per quanto, come abbiamo già dichiarato, non intendiamo riassumere e confutare le critiche del passato, è necessario, in ordine agli scopi prefissi, rievocare alla mente lo spirito informatore di tali critiche.

⁽¹⁾ Sono degni di particolare menzione i seguenti lavori: W. SUTHERLAND, « Phil. Mag. », 45 (1898) pag. 23; « Nature », v. 63 (1900), pag. 23; W. H. HICKS, « Phil. Mag. », v. 3 (1902), pag. 9, 256, 566; E. KOHL, « Ann. d. Phys. », v. 33 (1910), pag. 186; A. RIGHI, « Nuovo Cimento », v. 16 (1918), pag. 213; v. 18 (1919), p. 91, v. 19 (1920), pag. 141; v. 21 (1921).

Per le critiche che si concludono in senso favorevole si può utilmente consultare: M. v. LAUE, « Ann. d. Phys. », v. 33 (1910), pag. 186; « Phys. », Zeits, v. 13 (1912), pag. 501; J. VILLEY, « C. R. », 170 (1920), pag. 1175; 171 (1920), pag. 298; A. METZ, « C. R. » 178 (1924), pag. 314, 1275; G. VALLE, « Nuovo Cimento » 2 (1925), pag. 39, 171; R. J. KENNEDY, « Phys. Rev. », 47 (1935), pag. 965.

⁽²⁾ R. J. KENNEDY, « Phys. Rev. », 42 (1932), pag. 400.

Nel ragionamento di MICHELSON e MORLEY c'è effettivamente un punto debole. Supponiamo infatti di considerare il fenomeno dal punto di vista dell'osservatore mobile, cioè solidale con l'interferometro supposto in moto rispetto all'etere. MICHELSON e MORLEY presuppongono implicitamente che il cammino geometrico dei raggi interferenti sia il medesimo che si avrebbe se la terra fosse ferma rispetto all'etere. Tuttavia si può dimostrare mediante una rigorosa applicazione del principio di HUYGHENS-FRESNEL che tale supposizione non è del tutto esatta ⁽¹⁾. L'angolo di riflessione su uno specchio mobile non dovrebbe coincidere con quello previsto mediante le ben note leggi elementari, ma dovrebbe differirne alquanto. La differenza peraltro (se valutata dall'osservatore mobile) dovrebbe essere molto piccola e precisamente dell'ordine di grandezza di $(v/c)^2$. Poichè nel valutare la differenza di fase delle onde interferenti bisogna tenere conto dei termini di quest'ordine di grandezza, sembra che l'approssimazione di MICHELSON e MORLEY non sia lecita. A. RIGHI, ad esempio, ritiene che, se si tiene conto del valore esatto dell'angolo di riflessione, non si dovrebbe avere lo spostamento di frange previsto da MICHELSON.

A tutte queste critiche, a nostro avviso, si può rispondere vittoriosamente. Aggiungiamo peraltro che, quando si vuole tenere conto del valore esatto dell'angolo di riflessione, i calcoli diventano in ogni caso molto complicati, e per conseguenza, anche quando si conclude in favore della conclusione generalmente accettata, poco persuasivi. Purtroppo è tanto facile in memorie molto lunghe, dove i calcoli sono assai involuti, introdurre nascostamente qualche errore. Ciò è infatti accaduto ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Si confrontino a questo riguardo le già citate memorie di KOHL e RIGHI.

⁽²⁾ Le memorie scritte a questo scopo sono molto ponderose. Per capire che è facile errare nell'esecuzione di calcoli lunghi e complicati (a parte il giudizio sui criteri adottati) valgano i seguenti esempi. La memoria dianzi citata di HICKS comprende 32 pagine; eppure conclude con un paradosso. Secondo questo autore, per spiegare l'esito negativo dell'esperimento di MICHELSON bisognerebbe ammettere una dilatazione dei corpi nella direzione del movimento. L'errore fu poi riconosciuto dallo stesso autore dietro segnalazione di H. M. MACDONALD. [Cfr. «Nature», v. 45, p. 343 (1902)]. RIGHI (se ci riferiamo solo alle note pubblicate sul «Nuovo Cimento») ha scritto in complesso quasi un centinaio di pagine. Ma secondo VALLB, vi sarebbero alcune sviste nei calcoli, correggendo le quali si riesce a prevedere lo stesso spostamento calcolato da MICHELSON.

A ciò si aggiunga poi, per quanto possa apparire a prima vista paradossale, che i calcoli così impostati sono anche incompleti. La critica del RIGHI, per quanto sotto molti rispetti debba considerarsi assai accurata, è infondata in quanto è male impostata.

La figura di interferenza che egli considera, non ha nulla a che vedere con quella considerata da MICHELSON. RIGHI, e con lui molti altri, si limitano a considerare un'onda piana che incida sulla lamina semiargentata facendo con la normale un angolo di 45° e qui si divide in due onde rispettivamente trasmessa e riflessa, e successivamente considerano le frange di interferenza che darebbero queste due onde dopo riflessione sui due specchi dell'interferometro supposti orientati in modo da formare tra loro un angolo uguale o prossimo a 90° . Anche semplificando in questo modo il problema, i calcoli sono abbastanza lunghi. Ma la figura considerata da MICHELSON è ben diversa. Essa risulta dall'interferenza (dopo alcune riflessioni) di infinite onde piane che incidono sulla lamina semiargentata con angoli diversi (sebbene il vettore di propagazione di ciascuna di esse sia contenuto entro un angolo solido $\Delta\omega$ piccolissimo). Il calcolo delle figure di interferenza che ne deriva, se eseguito con metodo di RIGHI, sarebbe assolutamente proibitivo. Bisogna a questo scopo agire come ha agito MICHELSON, supporre cioè che il cammino geometrico (rispetto all'osservatore mobile) non sia variato. Ciò fatto, è naturalmente doveroso chiedersi se l'approssimazione adottata è lecita. La risposta è affermativa. Infatti un errore dell'ordine di grandezza di $(v/c)^2$ nell'apprezzamento degli angoli implica un errore di ordine superiore al secondo, perciò trascurabile, nella valutazione del ritardo di fase ⁽¹⁾. Tuttavia le critiche menzionate proiettano qualche ombra sulla chiarezza del ragionamento elementare che si fa abitualmente. Questo non è così semplice come appare a prima vista. Si basa, almeno implicitamente, su approssimazioni il cui uso occorre giustificare.

In ogni caso l'entità delle approssimazioni adottate è valutata (sia dai fautori che dagli avversari dell'efficacia probativa dell'esperimento di MICHELSON) conformemente alle esigenze del principio di HUYGHENS-FRESNEL. Sebbene a questo principio non si possano muovere obie-

⁽¹⁾ Cfr. R. J. KENNEDY, « Phys. Rev. », 47 (1935), pag. 965.

zioni fondate, tuttavia esso costituisce un presupposto che è (nel caso attuale) alquanto discutibile. Ed infatti:

a) O esso si introduce come un postulato, come si fa nei trattati elementari di ottica.

b) Oppure si giustifica con la teoria elettronica di LORENTZ.

Nel primo caso esso può essere giustificato solo a posteriori, mediante la congruenza delle conseguenze da esso dedotte con la realtà concreta. Ma si deve tenere presente che, quando si deve tenere conto di termini di second'ordine in $(v/c)^2$ l'entità dell'effetto è molto inferiore all'approssimazione conseguibile in circostanze ordinarie. Non si può dire che il successo dell'applicazione del principio di HUYGHENS si estenda tanto oltre da garantire la correttezza di previsioni così delicate. Nel secondo caso è per lo meno falso quanto si asserisce da taluni, che cioè i principi sui quali si fonda l'esperimento di MICHELSON concernono solamente la propagazione della luce nel vuoto e non il comportamento (che potrebbe essere alquanto oscuro) della materia in moto.

A noi sembra che sarebbe molto opportuno modificare (se possibile) lo stesso esperimento di MICHELSON, in modo da eliminare l'incognita che getta qualche ombra su di esso: la legge della riflessione su specchi in moto. Eliminare del tutto ogni riflessione non è possibile. Ma si può fare in modo che l'incognita (l'angolo esatto di riflessione) non pregiudichi alle previsioni teoriche. Ciò è consentito, a nostro avviso, da un uso appropriato dell'esperimento di KENNEDY, nel modo che vedremo.

3. - Il dispositivo adoperato nell'esperimento di KENNEDY è l'interferometro di MICHELSON ma con l'importante differenza che qui i bracci sono disuguali. La teoria elementare dell'esperimento di MICHELSON è troppo nota perchè occorra soffermarci ad illustrarla. Tuttavia vogliamo riepilogarla brevissimamente con l'unico scopo di fare intendere il funzionamento dell'esperimento di KENNEDY. Siano A e B due punti rigidamente collegati (sia ad esempio, A un punto della lamina semiargentina e B un punto di uno degli specchi riflettenti). Tutto l'apparecchio si sposti nell'etere con velocità v . Sia φ l'angolo che

→

formano i due vettori $(B - A)$ e \vec{v} . Allora si dimostra che il tempo occorrente alla luce per il doppio percorso $\overline{AB} + \overline{BA}$ è dato dalla formula:

$$[1] \quad \tau_{AB} = \frac{2 l_{AB}}{c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \beta^2}$$

Questo tempo viene così a dipendere dalla velocità $|v|$ e dall'angolo φ . Nell'esperimento di MICHELSON si tenta di verificare la dipendenza da φ , confrontando i tempi di percorso di due lunghezze uguali formanti un angolo ψ che è generalmente di 90° .

La differenza ⁽¹⁾

$$[2] \quad \tau_{AB} - \tau_{AC} = \frac{2l}{c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}}{1 - \beta^2}$$

dovrebbe variare orientando diversamente sul piano orizzontale tutto l'apparecchio. È ben noto invece che non si è mai riusciti a constatare questa previsione.

Questo esito negativo si spiega ammettendo la contrazione di LORENTZ. In conseguenza: $l = l' \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}$

$$\sin \varphi = \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi'}}$$

Quindi

$$[3] \quad \tau = \frac{2 l'}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Da cui:

$$[4] \quad \tau_{AB} - \tau_{AC} = 0$$

Il compenso però non avviene se i bracci dell'interferometro sono disuguali, ossia se $l_{AB} \neq l_{AC}$

Sia Δl la differenza. Allora:

$$[5] \quad \tau_{AB} - \tau_{AC} = \frac{2 \Delta l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

⁽¹⁾ Supponiamo che il vettore v giaccia nel piano definito dalle due rette parallele ai vettori $(B - A)$ e $(C - A)$.

In questo caso si dovrebbe avere spostamento di frange dipendente solo da $|v|$.

La verifica di questa conseguenza è immensamente più difficile.

Non giova infatti in questo caso rotare l'apparecchio di un angolo φ qualunque, poichè $\tau_{AB} - \tau_{AC}$ non dipende dall'orientazione dell'apparecchio.

Bisogna confrontare le fotografie della figura d'interferenza ottenute con lo stesso apparecchio in identiche condizioni fisiche ed in istanti diversi, quando presumibilmente la velocità assoluta è cambiata. L'operazione è difficile per due ragioni.

a) È arduo garantire la conservazione delle stesse condizioni fisiche per un lungo periodo di tempo, ad esempio, parecchi mesi, fino a tal segno che gli inevitabili errori di osservazione siano inferiori al previsto spostamento di frange.

b) la distanza Δl non può essere fatta troppo grande (nell'esperienza di KENNEDY era solo di circa cm. 30) perchè in caso diverso sparisce la visibilità delle frange.

Queste difficoltà sono tuttavia superabili, come si può vedere nel citato articolo di KENNEDY.

4. - Come abbiamo fatto osservare, KENNEDY presupponeva esistente la contrazione di LORENTZ, e voleva col suo esperimento mettere in evidenza il rallentamento relativistico degli orologi.

Ma l'esperimento si presta anche ad altre applicazioni. Supponiamo infatti di ignorare la contrazione di LORENTZ. In tal caso la formula assegnante lo spostamento di frange sarebbe:

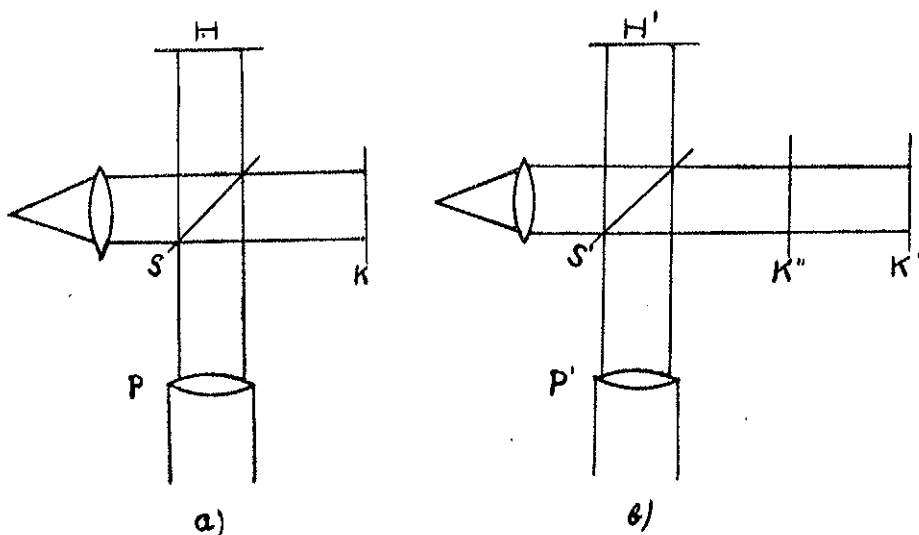
$$[1'] \quad \tau_{AB} - \tau_{AC} = \frac{2}{c} \frac{l_{AB} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi} - l_{AC} \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}}{1 - \beta^2}$$

Queste formole presuppongono sempre che le leggi della riflessione siano quelle normali. Ma supponiamo di non volere fare un atto di fede nel principio di HUYGHENS-FRESNEL.

Il mancato spostamento di frange, quando i bracci dell'interferometro sono uguali, si potrebbe attribuire, secondo RIGHI, al fatto che l'angolo di riflessione non è quello previsto da MICHELSON e MORLEY

nei loro calcoli. Quantunque, vogliamo ripeterlo, il dubbio possa essere eliminato mediante un'analisi accurata dei ragionamenti che fanno gli oppositori, tuttavia concediamo pure che ciò sia possibile.

Il dubbio può essere superato, rendendoci inoltre indipendenti da qualunque ipotesi, realizzando un esperimento differenziale nel modo seguente:



In figura sono schematizzati due interferometri. L'interferometro b) differisce dall'interferometro a) in quanto lo specchio K' è più distante da S' che non K da S .

Per giudicare della differenza di comportamento dei due apparecchi basta notare che in ambedue i casi i cannocchiali P e P' fanno convergere nel piano focale dell'obbiettivo, una infinità di onde piane il cui vettore di propagazione è compreso entro un angolo solido $\Delta\omega$ piccolissimo. In entrambi i casi le onde elementari, prima di entrare nel cannocchiale, hanno lo stesso vettore di propagazione. Infatti, qualunque siano le leggi della riflessione, questa deve avvenire esattamente allo stesso modo nei due casi. Infatti, l'angolo di incidenza che le corrispondenti onde elementari formano con le omologhe superfici riflettenti dei due apparecchi non può non essere uguale.

L'unica diversità è costituita dalla differenza di fase. Infatti (prima di entrare nell'obbiettivo del cannocchiale) le onde elementari (tra-

smesse dalle lamine semiargentate S ed S') hanno percorso un cammino geometrico diverso, corrispondente alla doppia distanza tra K" e K'.

Ciò posto, supponiamo di volere da principio sperimentare con l'apparecchio a). Ammettiamo pure che con questo non debba attendersi alcun spostamento di frange quando si fa rotare l'apparecchio di 90° ovvero quando si ripete l'esperimento in un tempo diverso, quando la velocità assoluta $|v|$ è verosimilmente cambiata. Qualunque sia il motivo, l'esperienza ci dice che non si ha spostamento di frange.

Ma questo implica (qui risiede essenzialmente la forza della nostra argomentazione), che ripetendo esperimenti consimili con l'apparecchio b) l'eventuale spostamento di frange può essere previsto ignorando completamente il cammino comune e considerando solo il cammino supplementare.

La cosa è del tutto evidente nel caso particolare che nei due esperimenti la velocità sia normale allo specchio K' ma sia diversa in valore assoluto. In questo caso le onde che seguono il cammino $SK' + K'S'$ dovrebbero giungere all'obbiettivo del cannocchiale con un ritardo dato da: $\frac{2\Delta l}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}$. Qui la considerazione del vero angolo di riflessione non può avere alcuna importanza.

Da queste considerazioni emerge chiaramente che il fatto di avere avuto esito negativo tanto sperimentando nella forma a) che nella forma b) dimostra sicuramente l'insufficienza della cinematica classica. Questo doppio insuccesso non può essere spiegato in alcun modo in base ad una presunta ignoranza del vero angolo di riflessione. Inoltre ci si rende realmente indipendenti da qualunque ipotesi concernente il comportamento della materia e la sua interazione con la radiazione elettromagnetica.



IL FISICO TEDESCO GIORGIO MATTIA BOSE E BENEDETTO XIV (*)

ANGELO MERCATI

Accademico Pontificio Sopranumerario

SVMMARIVM. — Praeter complementa nonnulla ad « Lettere di scienziati dell'Archivio Vaticano », quae in Commentationum vol. VII (1943) editae sunt, editur epistola, observantiae plena, a G. M. Bose, germanico physico protestantico, praeclaro Universitatis Wittenbergensis magistro, scripta, quae, propter eximias reverentiae erga Summum Pontificem exhibitiones et liberam cogitandi ac sentiendi rationem, acriter reprehensa est ab Athenaeo illo protestantico, quod suos sensus antiromanos expressit. Editur etiam benigna Summi Pontificis responsio.

WITTENBERG ⁽¹⁾, la cittadina sászone, dove coll'affissione alla porta del castello delle sue 95 tesi Lutero iniziò la sua rottura con Roma e dove circondato da venerazione era il suo sepolcro, aveva fin dal 1502 la sua università ⁽²⁾ colle quattro facoltà di teologia, di diritto, di medicina e di filosofia, che duecento anni or sono venne messa a rumore per incidenti suscitati dall'umore ambizioso e che dovremo dire strano, di un professore di fisica, G. M. BOSE ⁽³⁾, che anche fuori

(*) Memoria presentata il 22 gennaio 1951.

(1) Officialmente dal 1922 detta « Lutherstadt Wittenberg ».

(2) W. FRIEDENSBURG, *Geschichte der Universität Wittenberg*, Halle a. S. 1917. Fu unita a quella di Halle nel 1816.

(3) Nacque a Lipsia il 22 settembre 1710 e dal 1736 era professore all'Università di Wittenberg: morirà ai 17 di settembre del 1761 a Magdeburg, ove l'avevano trasportato i prussiani come ostaggio il 26 agosto 1760 (allora egli era rettore dell'università) nelle vicissitudini della guerra dei sette anni (FRIEDENSBURG, op. cit., 520, n. 2; *Allgemeine deutsche Biographie*, III, Leipzig 1876, 186; A. HELLER, *Geschichte der Physik*, II, Stuttgart 1884, 474 s.). Si occupò specialmente di

di Germania godeva buona nomèa scientifica, come minutamente espongono le *Acta historico-ecclesiastica* ⁽⁴⁾ in una comunicazione sottoscritta il 1° maggio 1752 dal « Decanus, Senior, und andere Professores der theologischen Facultät zu Wittenberg », i quali non risparmiarono parole dure all'indirizzo del professore, che sparse sui teologi di Wittenberg il sospetto di volerlo limitare nella sua attività scientifica per preoccupazioni ecclesiastiche ⁽⁵⁾. Costui che era anche socio dell'Istituto di Bologna, aveva osato indirizzare addì 1° dicembre 1748 a Benedetto XIV, il Papa di Roma, una lettera tutta ammirazione, lode ed ossequio, ed avutane una risposta dal cardinale Segretario di Stato Silvio Valenti Gonzaga ⁽⁶⁾, n'aveva dato notizia in giornali di Lipsia, pensando con ciò, dicono i firmatarii, di accrescere la propria fama mentre noi non possiamo comprendere come possa egli accordare col giuramento da lui prestato in *Libros Symbolicos* e specialmente in *Articulos Smalcaldicos* ⁽⁷⁾ i titoli usuali dati al ricordato vescovo di Roma. Poi il 1° maggio 1749, « in luogo sacro, nella chiesa accademica, nella quale, come è noto, ebbe il principio la benedetta riforma ed in tutta prossimità del sepolcro del nostro beato Dr. Lutero », tenne un discorso *de Rectore servo servorum* sulla lettera di Benedetto XIV, contrario alla proposta di un altro professore dell'univer-

elettricità e fu lui che accese « colla scintilla la polvere da cannone » (*Enciclopedia italiana*, XXXV, 573). V. un lungo elenco di sue pubblicazioni (i *saecularia Torricelliana* furono pubblicati anche nel tomo XXXII della *Raccolta d'opuscoli scientifici e filologici* del CALOGERA, sul quale vedi L. PICCIONI, *Il giornalismo letterario in Italia*, Torino-Roma, 1890 passim) in *Catalogue général des livres imprimés de la Bibliothèque Nationale de Paris. Auteurs*, XVI, Paris 1903, 626-629.

⁽⁴⁾ XVI (Weimar 1752-53), 756-788: *Der theologischen Facultät zu Wittenberg Ablehnung derer wider dieselbe zeithero ausgestreuten Unwahrheiten*.

⁽⁵⁾ Vedi FRIEDENSBURG, op. cit., 614.

⁽⁶⁾ Nato in Mantova nel 1690, creato cardinale da Clemente XII il 19 dicembre 1738, che morirà a Viterbo il 28 agosto 1756, Segretario di Stato di Benedetto XIV dall'inizio del pontificato (v. il bell'elogio di L. VON PASTOR, *Storia dei Papi*, XVI, parte I, Roma 1933, 34 s.).

⁽⁷⁾ *Acta* cit. 769. Invero non può darsi maggior contrasto fra i titoli dati dal Bese a Benedetto XIV e il trattamento fatto da Lutero al Papa nei suoi *Schmalkaldische Artikel* del 1537 (vedine l'edizione in D. MARTIN LUTHERS *Werke. Kritische Gesamtausgabe*, 50. Band, Weimar 1914, 192 ss. e v. l'articolo su di essi di TH. KOLBE, in A. HAUCK, *Realencyklopädie für protestantische Theologie und Kirche*, XVII, Leipzig 1906, 640-645).

sità che osava *titulum, Pontificibus Romanorum Maximis a tot seculis sacrum, privative quasi, et cum iure prohibendi, auferre nostrisque Rectoribus vindicare. Me tamen maxime contradicente. Me nempe omnium minime decet haec temeritas. Me, quem Benedictus XIV suo nomine, suo iussu exaratis literis, laureatis quasi, triumphare permisit, quamvis nos Wittembergenses ex 232 iam annis fatales successoribus scilicet Petri et curiae Romanae. Nec tamen Magnus Lambertini, qua est in universos gratia, in me clementia inaudita, malam hoc vel ipse in partem foret interpretaturus, si et amico meo adstipularer* » (8).

L'università e la facoltà teologica non presero dapprima provvedimenti contro questo « sconsideratissimo » (9) procedere del Bose, ma quando tra i forestieri si sparse la voce che a Wittenberg, ad *Cineres Lutheri*, era stato tenuto un panegirico al Papa di Roma, si fece tutto il possibile per parare ogni ulteriore inquietante e nocivo rumore. Appena infatti corse voce che il professore Bose aveva di nuovo composto in onore di Benedetto XIV una scrittura, con cui nella sua funzione di decano della facoltà filosofica voleva intimare una imminente promozione magistrale e che l'aveva data alla stampa e, come parimenti dicevasi, intendeva mandarla subito a Roma col mezzo degli Italiani intervenuti alla fiera lipsiense di capo d'anno, la facoltà teologica che da precedenti fatti era stata persuasa delle stravaganze boseane e della sua leggerezza religiosa, richiese, come era suo dovere, all'accademia che si facesse comunicare e sottomettere alla censura il programma del Bose e tutto ciò che riguardava il Papa romano e le cose teologiche *sub eventuali appellatione ad Potentissimum* (10).

Il Bose, prevedendo che l'adulazione da lui fatta alla sede romana non sarebbe rimasta in piedi nella censura, aveva mandato il suo nuovo programma *De Sesostridis Augusti et Benedicti XIV obelisco* (11)

(8) *Acta* cit. 760 s. I 232 anni fatali per la curia romana portano, dal 1749, al 1517, l'anno in cui addì 31 ottobre, Lutero affisse alla porta del castello di Wittenberg, le sue 95 tesi.

(9) *Acta* cit. 761.

(10) *Acta* cit. 762.

(11) Non ho potuto vedere la stampa di questo programma, che nel *Catalogue* cit. della Nazionale di Parigi, *Auteurs*, è detto (col. 626 s. e col titolo *Commercium epistolicum de Sesostridis Augusti et Benedicti XIV obelisco*) come uscito poi a

al consiglio ecclesiastico regio in Dresda, ma per ordine superiore dovette in dicembre 1749 spedirlo all'università di Wittenberg, che lo fece esaminare dal seniore della facoltà filosofica, il quale ne cancellò le lodi tributate al Papa romano. La facoltà teneva a far notare che da tutto risultava « da sè che 1°) l'*ordo theologorum* non aveva mai presentato appello contro la stampa di scritti, inclusi anche quelli di contenuto fisico e astronomico, senza esaminarli prima, come il signor Prof. Bose per mezzo dei suoi buoni amici ha voluto dare a bere al pubblico in varie gazzette contro la verità ed a suo proprio disdoro; 2°) che nè dalla corte nè dalla università non è stato mai proibito semplicemente, molto meno sotto la pena di una alta multa, di stampare o di distribuire lo spesso menzionato programma *de Sesostridis Augusti et Benedicti XIV obelisco*, come anche egli ha spesso divulgato o fatto divulgare in mala fede ed a dispetto dei suoi superiori, ma che gli è stato ordinato di non darlo alla stampa senza la debita e consueta censura e che la stampa stessa di esso era stata soltanto

Greifswald nel 1759 a cura di Andrea Mayer, il matematico, astronomo e cosmografo nato ad Augsburg l'8 giugno 1716, professore a Greifswald e che morirà il 19 dicembre 1782 (*Allgem. deutsche Biographie*, XXI, Leipzig 1885, 87 s.), che le cit. *Acta* p. 771 e anche 785, definiscono « corrispondente » famigliare del Bose e che rimproverano fortemente per il contegno tenuto favorevole al Bose nei contrasti coll'università. Deve trattarsi dell'obelisco scavato a Roma sotto Benedetto XIV nel 1748 presso la chiesa di S. Lorenzo in Lucina e che restaurato fu eretto sotto Pio VI nella Piazza di Montecitorio. Per incarico di Benedetto XIV ne diede una dotta illustrazione in latino e in italiano l'erudito fiorentino ANGELO MARIA BANDINI, *De obelisco Caesaris Augusti e Campi Martii ruderibus nuper eruto commentarius*, Romae 1750 (e v. su di esso A. NIBBY, *Roma nell'anno MDCCCXXXVIII*, parte II antica, Roma 1839, 260-270; S. BALL. PLATNER-*A. ASHBY, A topographical dictionary of ancient Rome*, Oxford 1929, 366 s.; G. LUGLI, *I monumenti antichi di Roma e Suburbio*, III; *A traverso le Regioni*, Roma 1939, 191-194. Era stato eretto da Psammetico II (anni 594-589 a. C.), attribuito a Sesotri e trasportato a Roma da Leontopoli il 10 a. C. sotto Augusto che lo destinò a gnomone di un *solarium* nel Campo Marzio. In appendice al suo *de obelisco* il BANDINI ha pubblicato diverse lettere di letterati e scienziati (come il marchese Poleni, Scipione Maffei, L. A. Muratori, R. Boscovich) ad illustrazione di alcuni problemi suscitati dalla posizione dell'obelisco nel Campo Marzio e l'*VIIIa* (a pp. LV-LVII), data da Wittenberg 4 marzo 1749 non può essere che del nostro Giorgio Mattia Bose sebbene poco esattamente sia intitolata *epistol. Gerardi M. de Bose*.

rinviata fino a una ulteriore risoluzione finale, e che, siccome la promozione magistrale si avvicinava sempre più, gli è stato ordinato di scrivere intanto un altro programma ».

Non tardò ad avverarsi un altro urto tra il Bose e la facoltà teologica, pretendendo il professore che essa avesse ostacolato la diffusione di osservazioni sue astronomiche su eclissi di sole e di luna del gennaio 1750, venendo ad aggravare la posizione il fatto che prendesse le difese del Bose la società reale di Londra, la quale rese di pubblica ragione che « scripta pervenit haec observatio ad Regiam Societatem. Dignissimam eam iudicavimus, quae typis mandaretur, quibus eam mandare celeberrimus observator non ausus est, cum Theologi Wittenbergenses, utrum superstitione, an bile, moti, nescimus, in Supremo Senatu Ecclesiastico, qui Dresdae est, eo rem redegerint, ut et impressio et distributio duarum eius proxime antecedentium observationum, ridiculo sane ausu, ab eo sit prohibita. Nos hic, ubi tantos Tyrannos Ecclesia non fert, eam divinae Astronomiae cultoribus non invidendum esse iudicavimus. Londini die 24. Iulii MDCCL ». Naturalmente la facoltà teologica oppose una smentita censurando il Bose ed i suoi sostenitori, ma poi tutto finì sotto il silenzio imposto alle parti dal re il 15 gennaio 1753 ⁽¹²⁾.

Non sono a mia notizia altre beghe del genere nel seno della università di Wittenberg occasionate dal Bose, che anzi in *Nova acta eruditorum* pubblicati nel 1761 a pp. 514-520 è inserito un elogio di lui, in cui se ne fanno lodi anche in fatto di professione religiosa.

Non ho ancora potuto appurare se la lettera del Bose e la risposta del cardinale Valenti Gonzaga sia stata pubblicata nel bollore delle controversie Wittenberghesi: importa sapere che l'originale della lettera del professore l'ho trovato in un volume di recente formazione delle *Lettere di Particolari* degli anni 1701-1749, mentre la minuta della risposta è nel vol. 108 delle *Epistulae ad Principes*.

Non può recar meraviglia che anche un protestante tedesco abbia espresso sentimenti di viva simpatia per Benedetto XIV, essendo noto quanto egli abbia fatto per l'incremento dato alle scienze ed all'arte

(12) FRIEDENSBURG, op. cit., 614, n. 2.

e quali fossero le sue relazioni cogli scrittori del suo tempo, che l'apprezzavano molto ⁽¹³⁾.

Ecco ora il testo dei due documenti che diedero occasione alla riferita polemica, la quale rimane una luminosa testimonianza del fascino esercitato sugli intellettuali dal Papa Lambertini cultore degli studi e del gretto spirito antiromano di certi circoli oltramontani.

Beatissime Pater, Serenissime Princeps, Celsissime Domine.

Miraberis procul dubio, Celsissime Domine audaciam hominis, in ultimo quasi Saxoniae angulo haerentis, sed ad TE sustentis literas exarare. Novi istud discrimen, quo Solium a schola, Purpura ab arena, Roma Wittembergâ, et Pontifex Maximus, Cui vel Reges cedunt dextram, a professore distat; novi istud discrimen, est enim infinitum. Novi attamen, et Castam Minervam ad Ipsius Pontificis Maximi admitti Thronum. Quis enim Apollinis Lambertini opera non noverit? duratura per secula, et ipsa superbae Memphis miracula, et ipsum porphyritam, et ipsum granitum victura aeternitate? Differt equidem haec mea quam colo physica et mathesis, mirum quantum a magnis istis negotiis, quae Magno Lambertino debent aeternitatem mutuo Eundem Immortalem reddentia. Nec tamen ab hisce meis studiis, Pontificem Maximum, omnium studiorum Iudicem maxime competentem, plane abhorre crediderim; nec ego inter meos plane inops habeor omnis literaturae humanioris. Audeo proin, ast quanto pudore! sacro certe afflatus tremore audeo, TIBI, Beatissime Pater, hoc meum specimen ⁽¹⁴⁾,

⁽¹³⁾ Vedi la seconda parte del cap. III del vol. XVI, parte I della cit. *Storia dei Papi* di L. VON PASTOR.

⁽¹⁴⁾ Non so indicare la pubblicazione (Benedetto XIV fa menzione di *alcune opere stampate e di libri*, specificando trattarsi di argomenti fisici, astronomici e matematici) mandata al Papa, ma si tratta certamente delle ultime rose di pubblica ragione ed allora vengono in campo la *observatio eclipses lunaris partialis habita Wittembergae, 1748 die 8 et 9 augusti*, Wittembergae 1748, e *De Osymandya circulo aureo disserit, simul ad capessendos honores in philopophia summos et lauream poeticam humanissime invitât* GEORGE MATHIAS BOSE, Lipsiae, 1749 (*Catalogue* cit. della *Nationale de Paris*, vol. cit. 627, 628). Per il *circulus aureus* del faraone Osimandia descritto da Diodoro Siculo (*Bibliotheca historica*, libro I, 49, ed. di L. DINDORF-C. MÜLLER, Parisiis 1878, 41 e di F. VOGEL, Lipsiae 1888, 85 s.) vedi M. PIEPER, articolo *Osymandyas* in PAULYS *Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft, neue Bearbeitung* di G. WISSOWA-W. KROLL-K. MITTELHAUS, XVIII 1, Stuttgart 1942, 1854-56.

quo forsan plurimum excitavi rumoris in imperio literario, devotissima offerre pietate. Nec id quidem auderem, nisi Immortalis ista Academia Bononiensis Benedictina⁽¹⁵⁾, o dulcissimi nominis! me inter academicos recipere fuisset dignata. Hac Aegide tutus, mearum existimavi, communi, et Academiae, et omnis Eruditionis Tutamini

Nam spes, et ratio studii Pontifice tantum.
Solutus enim tristes hac tempestate Camenas
Respicit⁽¹⁶⁾.

hoc δουλείας et λατρείας meae testimonium profundissimo dedicare cultu. Hec unico contentus, hoc unicum in votis habens, ut aliquando erudiar, Summum Pontificem imum meum zelum, sed pium, sed ingenuum, sed sincerum non plane aspernari.

Cam tot sustineas, et tanta negotia solus,
Res Italas sanctas tuteris, moribus ornes,
Legibus emendes: in publica commoda peccem,
Si longo sermone morer TVA tempora, Magne!

Contrahenda proin vela. Faxit proin Summum Numen, quo floreas diutissime populi Salus, Musarum Apollo, scientiarum Director. Permitte emori, inter devotissimos clientes,

Beatissime Pater, Celsissime Domine Beatissimi TVI Numinis,

Wittembergae Sax: | Calend. Dec. |

CID ID CCXXXXVIII. |

humillimum servum
perpetuum adoratorem
G. M. Bose

(15) Per l'accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna vedi M. MAYLINDER, *Storia delle accademie d'Italia*, V, Bologna 1930, 126-128; L. SIMEONI, *Storia dell'università di Bologna*, II. *L'età moderna*, Bologna 1940, 124-127.

(16) Questi e gli altri versi che seguono non saranno citazioni da altri, ma saggi del Bose che dilettavasi di poesia (v. anche il titolo di un suo lavoro in nota 14) e nel 1744 aveva composto un poema in due libri sull'elettricità, che nel 1754 fu tradotto in francese da lui stesso secondo quanto dice l'*Allgem. deutsche Biographie*, loc. cit., e che nel *Catalogue cit.* della Nazionale di Parigi ha il titolo: *L'électricité, son origine et ses progrès, poème en deux livres par Mr. GEORGE MATHIAS BOSE, Traduit de l'Allemand par Mr. l'abbé JOSEPH-ANTOINE DE C****, Leipsic 1754.

Evvi unito un foglio nel quale Benedetto XIV per mano d'altri ha in data del 17 gennaio 1749 impartito questa istruzione, che lascia a desiderare quanto alla sintassi ⁽⁴⁷⁾:

« Mandiamo a Mons^r Emaldi l'annessa Lettera che ci viene scritta da un certo Giorgio Mattia Bose, autore Eretico, che ci ha mandato ancora alcune sue Opere stampate. Esse sono in materia fisica, ed astronomica. È d'uopo ringraziarlo, e lodarlo del suo valore, e che quando esso non abbia mandato a Bologna ai Professori dell'Accademia Benedettina, fra quali esso è con nostra consolazione aggregato, sarà cura nostra trasmettergli gli esemplari che esso ci ha mandati. La lettera deve scriversi in Lingua Latina, ed in nome del Cardinale Segretario di Stato. Con che etc. ».

E l'Emaldi stese una risposta del seguente tenore:

« Georgeo Matthiae Bosae Professori Wittembergensi in Saxonia Wittembergam Sax.

(47) Tommaso Antonio Emaldi di Lugo di Romagna, segretario delle lettere latine sotto Benedetto XIV e poi sotto Clemente XIII segretario delle lettere *ad Principes*, canonico del Laterano, morto a 56 anni il 1° luglio 1762 e sepolto nella chiesa di S. Sabina all'Aventino, ove lo ricordano una semplice iscrizione dettata da lui ed un'altra più esplicita dedicatagli dal fratello, che si possono leggere presso V. FORCELLA, *Iscrizioni delle chiese ... di Roma*, VII, Roma 1876, 121. ed I. I. BERTHIER, *L'église de Sainte-Sabine*, Rome 1910, 474. La seconda dà l'indicato *curriculum vitae* e fa conoscere l'errore in cui è caduto F. M. RENAZZI, *Storia dell'università degli studj di Roma*, IV, Roma 1806, 86, affermando che « giunse ad estrema vecchiezza » e che fu seppellito al Laterano. Dal RENAZZI sappiamo che nel 1728 « ebbe la cattedra legale » della Sapienza di Roma. Nel *Diario ordinario (Chracas)*, n° 7020 del 3 luglio 1762, p. 14, è data la notizia della morte dell'Emaldi in età di 56 anni e nel n° 7023 del 10 luglio seguente, quella dei funerali celebrati ai SS. Vincenzo ed Anastasio a Trevi e della sepoltura a S. Sabina. Benedetto XIV lo stimava molto, come risulta dalle sue lettere al cardinale de Tencin. Scrivendogli il 10 marzo 1745 l'informava che l'orazione funebre per l'imperatore Carlo VI sarebbe tenuta dall'Emaldi « camerier secret [così nella versione francese datane dall'editore], qui non seulement est un homme de grand talent, mais qui connaissait très bien le défunt, ayant été collègue du cardinal Doria dans sa mission extraordinaire envoyée à la dernière Diète, et en outre ayant été internonce à Munich avant l'arrivée à ce poste de M. Stoppani » (E. DE HEECKEREN, *Correspondance de Benoît XIV*, I, Paris 1912. 183). Ed il 19 maggio 1756 lo definisce « un homme très instruit, écrivant bien » (ibid. II, 500: a pp. 375 e 400 v. circa l'interessamento del Papa per la concessione da parte del re di Francia del canonico del Laterano all'Emaldi).

Perillustris et Excel. Domine

Plurimum semper litteras omnes dilexit, coluitque Benedictus XIV supremæ Romanæ Cathedrae Pontifex: quamvis enim gravissimis Ecclesiae muneribus totius vitae cursu implicitus Ecclesiastica studia praetulerit, ut plura testantur ejusdem iterum, ac tertio in lucem prolata volumina, nihilominus tamen quantum reliquas etiam liberales artes prosequatur, et quasi gerat in sinu pluribus saepenumero ostendit, praecipue vero in Benedictina Bononiensi Academia amplissimis muneribus, insignibus aedificiis, et pretiosa cujuscumque eruditionis supellectile ab eodem sic locupletata, et aucta, ut tamquam novus instaurator merito habeatur et audiat. Quibus de causis non est cur dubites, quin librorum tuorum, etsi de Phisicis, et Mathematicis rebus tractantium tam comiter oblatum sibi munus lubenti, et grato exciperit [corretto da « excipiat »] animo. Nec minori eundem affecit gaudio tuis ex litteris intelligere clarum virum editis jam operibus in litteraria republica notum in albo suae Benedictinae Bononiensis Accademiae adscriptum, in eum, videlicet, litteratorum hominum conventum adscitum, quem ipse in dies honestat, atque amantissime respicit. Quamobrem secum statuit illuc litterarium tuum munus transmittere, si librorum tuorum copia Accademiae illi facta adhuc non fuerit, ut in ejus, quam ipse extruxit, Bibliothecae pluteis recondantur, asserventurque, et studiosis omnibus incitamento, et usui sint ad illas scientias alacrius excolendas. Haec Sanctissimus Pater mihi in mandatis dedit ut tibi suo nomine significarem: interea uberem tibi Caelo felicitatem apprecor.

Romae III Kal. Februar. 1749.

Ad officia».

Così la bella copia in un fascicolo del t. 108 delle *Epistulae ad Principes*, ove in un altro fascicolo c'è anche la minuta, che ha, nell'indirizzo, « Bose » e poi le lezioni « exceperit », « illi per Te adhuc facta non fuerit » e « de [e pare che prima fosse 'a'] Caelo felicitatem apprecor ». L'Emaldi aveva preparata la risposta nella seguente forma:

« Per Illustris et Excellens Domine

Cum supremæ Romanæ Cathedrae Pontifex Benedictus XIV. maxima qua pollet Ingenii vi diuturnaue totius vitae exercitatione literas

omnes dilexerit atque coluerit semper, cujuscumque etiam generis literatos viros in pretio habuit, atque benevolentia est prosequutus, quamvis enim Ecclesiasticis studijs, atque laboribus semper implicitus ut plura testantur in lucem iterum ac tertio prolata ejusdem volumina, nihilosecius tamen quantum alias quoque liberales artes foveat et quasi in sinu gerat plurimus [sic] jam ostendit praesertim vero in Benedictina Bononiensi Accademia insignibus aedificiis, pretiosis muneribus et multiplici codicum supellectile locupletata, et aucta, adeo ut novus illius instaurator jure habeatur et audiat, quibus ex causis dubitare minime debes vir clarissime, quin libros tuos de Phisicis, et Astronomicis rebus egregie tractantes, ipsi tam comiter oblato lubentissime exciperit ». Segue « Nec minori » sino alla fine. La forma « Plurimum » della bella copia è scritta a lato della « Cum supremac » e la seconda parola « semper » che v'era stata cancellata vi è restituita interlinearmente e parrebbe di mano del Papa.

* * *

La precedente comunicazione sul Bose è un complemento alle *Lettere di scienziati dall'Archivio segreto Vaticano*, che ho pubblicate nelle *Commentationes* dell'Accademia, V (1941), 61-208, con appendice in VII (1943), 867-881. Altre ne ho incontrate di poi, ma, perchè ora non mi è più molto agevole approntarne come si dovrebbe l'edizione, le segnalo qui all'attenzione degli studiosi, che potrebbero avervi interesse.

Sono altri tre scienziati, che hanno avuto relazioni epistolari colla S. Sede:

1°) Donati Vitaliano, nato a Padova 5 (non 8) dicembre 1717, † nel passaggio marittimo da Mascate a Calicut il 27 febbraio 1762. Accompagnò a Roma il marchese Poleni quando vi fu chiamato da Benedetto XIV per occuparsi della Cupola di S. Pietro (v. *Commentationes* cit., V, 101, 121). Professore di botanica all'università di Torino, fu mandato da Carlo Emanuele III, re di Sardegna, in Oriente a capo di una spedizione che aveva « l'incarico di eseguire importanti collezioni di storia naturale, di studiare le condizioni agricole, commerciali e industriali dei vari paesi, dovendosi poi, in base a queste

condizioni, studiare il mezzo di migliorare quelle del regno di Sardegna ». L'11 aprile 1759 il Donati scrisse al segretario di Stato di Clemente XIII, cardinale L. M. Torrigiani (v. *Commentationes* cit., V, 178), che « avendo avuto ordine da S. M. il Re di Sardegna ... di dover passare per via dell'Egitto, e della Persia all'Indie orientali, ed al ritorno fare il giro dell'Africa e ciò per raccogliere quanto appartenere possa alla Botanica, ed alla Storia Naturale, dovrò io passare in paesi barbari bensì, ma ne quali non mancano cattolici religiosi, e sommamente interessati nell'adempimento de' voleri di N[ostro] S[ignore] », si permetteva di supplicarlo ad impretrargli dal Papa « un qualche Passaporto, o raccomandazione » e d'ottenere « se fia possibile alcuna commissione, per cui con tutto il vigore impiegherei le mie poche forze in servizio ed obbedienza religiosissima della medesima S[ua] [Santità]. » (*Lettere di Particolari*, tomo 236, f. 179). E il cardinale il 28 aprile seguente rispose che il Papa applaudiva al buon gusto di Sua Maestà e che si mandavano le raccomandazioni (*Let. di Part.*, tomo 314). Sul Donati v. nel *Cosmos* di G. CORA, XII (1894-96), 270-313 e 320-355, P. REVELLI, *Il viaggio in Oriente di V. Donati*; poi v. P. BAROCELLI, *Il viaggio del Dottor V. Donati in Oriente (1759-62) in relazione colle prime origini del Museo egiziano di Torino*, in *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, XLVI (1911-12), 411-425.

2°) il celebre astronomo Giuseppe-Girolamo Le François de Lalande, nato a Bourg-en-Bresse l'11 luglio 1732 † a Parigi il 4 aprile 1807, ritornato da Roma scrive da Lione il 7 gennaio 1765 al cardinale Torrigiani che egli non poteva « songer sans la plus tendre émotion a la maniere dont elle [sua Santità] a daigné me recevoir » (*Lettere di Partic.*, tomo 241, f. 5), aggiungendo: « je voudrois être chaque jour a portée et de me prosterner a ses pieds pour y renouveler les protestations de mon attachement inviolable pour le Saint Siege, et pour la personne sacrée de notre Saint pere considerée et spirituellement et temporellement » e che recandosi entro quindici giorni a Parigi vi eseguirà gli ordini avuti dal Papa a favore dell'arcivescovo: il cardinale ai 22 di gennaio seguente gli risponde (*Lettere di Particolari*, tomo 316) che il Papa aveva gradito i sentimenti espressi. Sul de Lalande v. *Nouvelle biographie générale*, XXIX, Paris 1859, 948-953.

3°) Claudio-Leopoldo Genneté, nato presso Nancy il 3 gennaio 1706, † a Nancy il 21 aprile 1782, « physicien et mécanicien » (*Nouvelle biographie générale*, XIX, Paris, 1857, 925s.), inventore anche di apparecchi per stabilire buona ventilazione negli ospedali, è presente con quattro lettere:

a) il 4 luglio 1863 « Genneté premier physicien de l'Empereur » (Francesco I di Lorena), da Parigi « a l'Hôtel du cheval noir, rue de l'hirondelle » scrive al cardinale Torrigiani di un ponte di legname da lui inventato e di cui ha mandato un modello all'imperatore proponendone un altro modello per il Papa, che cederebbe per 150 luigi. « Je m'adresse pour cela au chef visible de l'Eglise, qui est en même tems le Protecteur des Arts, par ce qu'il n'y a que les souverains, qui les aiment » (*Lettere di Partic.*, tomo 238, f. 149 s.), ricevendo risposta del 20 luglio (*Lettere di Partic.*, tomo 315), in cui è detto che « l'ouvrage fait certainement honneur a vos talens, mais comme nous sommes dans l'usage de construire icy des Ponts stables et de pierres. . . toute autre methode devient par consequent inutile », però ringrazia (nel *Catalogue cit. des imprimés de la Bibl. Nationale de Paris, auteurs*, LVIII, Paris, 1914, 1159 è notata la pubblicazione del GENNETÉ, *Pont de bois de charpente horizontal, sans piles ni chevalets ou autres appuis que ses deux culées*, Nancy 1770;

b) del 30 agosto 1867 (*Lettere di Partic.*, tomo 242, f. 188) è un biglietto del G. al cardinale Torrigiani, col quale gli manda un suo libro, che è « sur la purification de l'air croupissant » (« dans les hopitaux, les prisons, et les vaisaux de mer » stampato a Nancy 1767: v. *Catalogue cit.*, 1159) e di cui il cardinale lo ringrazia il 23 settembre (*Lettere di Partic.*, tomo 316);

c) da Nancy 19 novembre 1767 il G. raccomanda al cardinale Torrigiani un suo amico prete per un canonicato a Toul o a Metz (*Lettere di Partic.*, tomo 242, f. 236), ricevendone la risposta (*Lettere di Partic.*, tomo 316) del 16 dicembre 1767 che « si cela dependoit de moi, vous pourriez compter la chose faite, mais ces matieres n'étant point de mes departemens, il ne me reste que le déplaisir de ne pouvoir pas contribuer a l'accomplissement de votre satisfaction »;

d) da Nancy 12 aprile 1775 il G. invia al Papa un suo libro sulle *Veines de houilles ou charbons de terre et leur exploitation* (stam-

pato a Nancy nel 1774: v. *Catalogue* cit., 1158) prospettando l'escavazione di quelle dello Stato pontificio (*Lettere di Partic.*, tomo 254, p. 96), ricevendo risposta del 17 maggio secondo la quale il Papa ha gradito le notizie relative alle *mines de houille* e l'opera inviata e manda l'apostolica benedizione (*Lettere di Partic.*, tomo 322).

* * *

Elenco inoltre alcune lettere della Segreteria di Stato a diversi scienziati siccome quelle che illuminano alcuni punti della loro vita.

In *Lettere di Partic.*, tomo 317, è una lettera del 13 dicembre 1768, che completa quanto ho scritto a p. 177, n. 1 sull'episodio del duello sostenuto dal Dolomieu (*Commentationes* cit., V). Al medesimo a Parigi è diretta un'altra lettera del 17 febbraio 1787 (*Lettere di Partic.*, tomo 334); è appellato «commandeur de l'ordre del Malthe. — Nel tomo 318 è la minuta di una lettera del 26 luglio 1769 alla celebre Laura M. C. Bassi Verati (nata a Bologna 29 ottobre 1711, † 20 febbraio 1778; vedi G. FANTUZZI, *Notizie degli scrittori bolognesi*, I, Bologna 1781, 386-391). — Nei tomi 323 e 324 sono due lettere (14 febbraio 1776 e 12 febbraio 1777) allo Scolopio Fr. M. Gaudio (vedi *Commentationes* cit. V, 190 s., nota 17 in tomo 258, f. 63 la lettera del Gaudio del 30 gennaio 1777, alla quale si risponde). — Nel 1941 fu donato all'Archivio Vaticano un manoscritto intitolato *Sommario della relazione sopra l'Emissario del Lago Trasimeno*, che al n° IX presenta una *relazione e piano del P. Gaudio sopra l'Emissario del Trasimeno* e al n° X *Pianta e Profilo dell'Emissario del Trasimeno formato dal Padre Gaudio con la dimostrazione tanto nel primo aspetto, quanto nella variata esecuzione di esso*. — Una lettera ad Eustachio Zanotti (v. *Commentationes*, ibid., 135) del 27 maggio 1780 è nel tomo 327 e risponde ad una del Zanotti, che è in tomo 263, f. 121 e due al Calindri (v. *Commentationes* cit., ibid., 186 ss.), del 2 novembre 1785, responsiva a una del Calindri del 26 ottobre 1785 in tomo 269, p. 259, che ho pubblicata in *Commentationes* cit., V, 199 s. e del 17 febbraio 1787 (non ho trovato la lettera del Calindri, a cui risponde, ma loc. cit., 200 s., ho dato una sua lettera del 26 maggio 1787) sono nei tomi 332 e 334, seguite da una terza dell'11 febbraio 1789 nel tomo 336

e da una quarta dell'11 gennaio 1797 nel tomo 342. Finalmente il tomo 338 offre la minuta d'una lettera del cardinale de Zelada segretario di stato di Pio VI al « sig. Dott^o. Sebastiano Canterzani [vedi *Commentationes* cit., V, 184 s.] segretario dell'Accademia dell'Istituto » di Bologna, colla quale in data del 19 gennaio 1791 gli comunica che il Papa compiaciutosi « di leggere l'una, e l'altra [cioè, la nota dedica alla Santità Sua del settimo tomo degli Atti di cotesta celebre Accademia dell'Istituto, e l'Introduzione alla storia dell'Istituto che sarà compresa nel Tomo medesimo »] non ha incontrata difficoltà ad acconsentire, che V. S. possa liberamente farla stampare » (risponde a questa lettera il Canterzani colla sua del 26 gennaio 1791, che ho pubblicata in *Commentationes* loc. cit.).

EIN VORSCHLAG ZUR EMPIRISCHEN REDUKTION VON SPEKTRALVERTEILUNGEN (*)

VON JOSEPH JUNKES S. J.

SUMMARIVM. — Proponitur methodus ad reducendas distributiones frequentiarum spectralium ideata. Methodi ordinariae theoriae correlationis iam diu cum bono exitu adhibentur ad reducendas classes spectrales unius systematis ad classes alterius. Quum theoria correlationis ad talem reductionem media non suppetat, proponitur nova methodus per modum experimenti. Quamvis solutio problematis quae proponitur rigorosa non sit, haec approximatio tamen ad solvenda problemata in praxi occurrentia sufficiens esse videtur.

Die gewöhnlichen Methoden der Korrelationstheorie werden schon lange und mit Erfolg benützt, um Spektralangaben eines Spektralsystems auf ein anderes Spektralsystem zu reduzieren. Solange es sich nur um Beziehungen zwischen den Spektralklassen selbst handelt, findet man auch mit diesen Methoden das Auslangen.

Doch sieht sich der Stellarstatistiker häufig vor die Aufgabe gestellt, die *relative Verteilung der Häufigkeiten* der Spektralklassen in verschiedenen Himmelsgegenden und Helligkeitsbereichen ebenfalls von einem Spektralsystem auf ein anderes zu übertragen, und muß leider feststellen daß für eine solche Reduktion ihm die Korrelationstheorie keine Mittel an die Hand gibt. Deshalb wird hier ein Verfahren versuchsweise vorgelegt, das solche Übergänge ermöglichen soll.

(*) Nota preventiva presentata dall'Accademico Pontificio Soprannumerario Rev. P. Johan Stein S. J. il 22 novembre 1951.

Eine allseitig befriedigende Lösung des Problems wurde allerdings *nicht* gefunden. Immerhin scheint das vorgeschlagene Näherungsverfahren zur Lösung praktischer Aufgaben brauchbar zu sein.

Die Beziehungen zwischen zwei verschiedenen Spektralsystemen werden gewöhnlich dargestellt durch « Streutafeln », die die Häufigkeiten a_{ik} des Zusammentreffens einer Spektralschätzung $S_i^{(x)}$ in System $S^{(x)}$ mit einer Schätzung $S_k^{(y)}$ im Spektralsystem $S^{(y)}$ angeben.

Die Summen der Spalten bzw. der Reihen ergeben dann die entsprechenden Häufigkeiten der Spektralklassen im einen System ($S^{(x)}$) bzw. im zweiten $S^{(y)}$.

Eine eingehende Analyse der einer solchen Streutafel zugrunde liegenden Funktionen fördert zunächst ein *konstantes* Element zutage: die Grundhaltung der Beobachter, wie sie sich äußert in der eigentümlichen Auffassung der Spektraltypen und den jedem eigenen Beobachtungsfehlern; sodann aber auch ein *veränderliches*: die objektive Häufigkeitsverteilung der zur Untersuchung stehenden Objekte, die wechselt je nach Himmelsgegend oder Helligkeitsbereich. Streutafeln, die dieselben Spektralsysteme miteinander verknüpfen, sich aber in der Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen unterscheiden, nennen wir « isogene » Streutafeln, und die gestellte Aufgabe besteht nun darin, zu einer gegebenen Spektralstreutafel eine ihr isogene zu suchen, deren Klassenhäufigkeiten in einem bestimmten System einer vorgegebenen Verteilung entspricht.

Die Aufgabe läßt sich streng nur lösen, wenn ebensoviele von einander unabhängige isogene Streutafeln vorhanden sind als Spektralklassen. Mit den Angaben der Aufgabestellung allein läßt sich nur eine Näherung erreichen, wenn die Reduktionsfaktoren, mit denen die Elemente der gegebenen Streutafel zu multiplizieren sind, so bestimmt werden, daß die beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Reduktionsfaktoren für die Nebenfrequenzen a_{ik} ($k \neq i$) sind das geometrische Mittel der Reduktionsfaktoren für die zugehörigen Hauptfrequenzen a_{ii} und a_{kk} .

2. Die entsprechende Multiplikation der Frequenzen der Streutafel mit diesen Reduktionsfaktoren muß die gewünschte Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen bewirken.

An Hand künstlich konstruierter Streutafeln — die übrigens verhältnismäßig sehr schlechten Beobachtungsbedingungen in der

Praxis entsprechen dürften — kann gezeigt werden, daß dieses Verfahren die wirklichen Verhältnisse mit einer Genauigkeit von $\pm 2-3\%$ wiederzugeben vermag, eine Leistung, die für praktische Aufgaben vollständig genügen wird.

Auch die Bestimmung von Regressionskurven zum Übergang von einem Spektralsystem zum andern gewinnt, wenn für ihre Ableitung durch das Verfahren « normalisierte » Tafeln von « Grundfrequenzen » oder deren Mittel benützt werden: das sind Streutafeln, für die die Klassenhäufigkeiten in dem einen oder anderen System zur Einheit reduziert wurden.

Zur Vereinfachung der sonst umständlichen Berechnung der Reduktionsfaktoren, die bei n Spektralklassen zu Gleichungen n^{ten} Grades führt, kann man sich schrittweiser Näherungsverfahren bedienen, von denen zwei vorgelegt werden, die sich praktisch bewährt haben.

Die Spektraluntersuchungen von den schwedischen Astronomen SCHALÉN, WERNBERG und VANÄS, die ihre Spektralangaben mit denen des Henry Draper Catalogue und der Henry Draper Extension getrennt verglichen haben, bieten eine erwünschte Gelegenheit zu einer praktischen Anwendung des Verfahrens: einmal zur Berechnung der « normalisierten » Streutafeln der Grundfrequenzen, dann aber auch, um die wenig bekannten Beziehungen zwischen den beiden Harvardsystemen über eine Streutafel genauer darzustellen. Dabei gelingt es allerdings nicht, vollständige Streutafeln aufzustellen, sondern man muß sich mit Tafeln « minimaler » Streuungen begnügen, die wir « Rumpffrequenz » - Tafeln nennen, und mit denen sich doch immer noch Genauigkeiten bis zu $\pm 4-5\%$ erreichen lassen dürften bei Reduktionen der vorgeschlagenen Art.

Zum Schluß möge noch einmal darauf hingewiesen werden, daß es sich um ein Näherungsverfahren handelt, das hier vorgeschlagen wurde, und daß sich die Methode wahrscheinlich noch verbessern lassen dürfte durch bessere Vorschriften für die Bildung der Reduktionsfaktoren. Weitere Versuche in dieser Richtung wären angesichts der Bedeutung des Problems — wahrscheinlich auch für andere Zweige der Statistik — wohl erwünscht.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XV - N. 7
pag. 77-92

EQUAZIONI INTEGRALI A NUCLEI SOMMABILI (*)

GIULIO PLATONE

SYMMARIUM. — Resolvit Auctor integrales aequationes primae, secundae, et tertiae speciei [ad complexum lebesghianum E , limitatum vel non limitatum, spatii euclidei $S_r \equiv (y_1, y_2, \dots, y_r)$ extensas], quatenus nucleus sit productus functionis $k, \alpha(y)$ pseudolimitatae in sensu stricto per functionem summabilem $A(y)$; praeterea determinat lebesghianum exclusionis solutionum. Quod ad eas aequationes evolvit Auctor theoriā a FREDHOLM propositam.

GENERALITÀ E POSIZIONE DEL PROBLEMA

1. — Nella fisica matematica si incontrano sovente equazioni integrali a nuclei singolari ed è noto che queste sono state risolte in casi particolari (trattati con metodi differenti e laboriosi, quantunque geniali) e solo nelle ipotesi che i nuclei iterati, oltre ad essere sommabili, risultino definitivamente limitati ⁽¹⁾.

Dall'esame della letteratura su tale argomento risulta che, pure essendosi conseguiti in altre direzioni notevoli progressi ⁽²⁾, finora — a quanto mi consta — nessun risultato positivo di carattere generale è stato raggiunto nel caso di nuclei illimitati sommabili ossia di classe $C_1[1]$ ⁽³⁾.

(*) Nota presentata dell'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi il 17 febbraio 1953.

(1) Vedi per esempio i lavori di ABEL, BERTAND, CARLEMANN, EVANS, EGOROFF, FONTAPIO, FREDHOLM, GIRARD, LIOUVILLE, MIRANDA, PÉRES, PICARD, PICONE, POINCARÉ, SONNINO, TRICOMI, VILLAR, VOLTERRA, WEYL, ecc.

(2) Vedi i lavori di CARLEMANN, CIMINO, HILBERT, GIRARD, HILLE e TAMARKIN, VOLTERRA, ecc.

(3) Seguendo PICONE con $C_p[0]$ rappresento la classe delle funzioni la cui potenza p^{ma} è sommabile col peso 0 su E ; pertanto $C_1[1]$ rappresenta le funzioni sommabili in E .

Data però l'impossibilità (rilevata da HILLE e TAMARKIN) ⁽⁴⁾ di estendere la teoria di FREDHOLM ai nuclei sommabili e sfuggendo il loro studio alle considerazioni della analisi funzionale lineare ⁽⁵⁾, è gioco forza limitarsi a casi particolari.

In vista della grande importanza teorica e pratica che tale questione riveste ne affronto lo studio limitandomi, in un primo tempo, a considerare l'equazione integrale di 2^a specie:

$$[1] \quad \varphi(x) = \lambda \int_E A(y) k(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

e la sua trasposta

$$[1'] \quad \psi(x) = \mu \int_E A(x) \psi(y) k(y, x) dy + g(x)$$

nelle ipotesi che:

1) E sia un lebesghiano, limitato o no, dello spazio euclideo ad r dimensioni $S_r^y = S_r(y_1, y_2, \dots, y_r)$.

2) $A(y) \subset C_1 [1]$.

3) $k(x, y), f(x), g(x) \subset [l]$, rappresentando $[l]$ l'aggregato delle funzioni di x, y (della sola x o della sola y) pseudolimitate (in senso ristretto) ⁽⁶⁾ nel lebesghiano $E^{(2)} = (E^x, E^y)$ dello spazio

$$S_{2r}^{xy} = S_{2r}(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$$

(ovvero in E).

È chiaro che gli integrali vanno presi nel senso di Lebesgue.

Osservo subito che la risoluzione dell'equazione di terza specie

$$\theta(x) \varphi(x) = \lambda \int_E k(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

si riconduce alla risoluzione della [1'] nel caso abbastanza generale che $\theta^{-1}(x)$ sia sommabile in E.

⁽⁴⁾ Vedi [2] pag. 218.

⁽⁵⁾ Vedi [3] pag. 322.

⁽⁶⁾ Chiamo pseudo limitata (in senso ristretto) in un insieme E una funzione $f(P)$ quasi ovunque continua in E e tale che ivi risulti $|f(P)| \leq L < +\infty$ esclusi al più i punti di un insieme Q di misura nulla (anche non chiuso).

Con qualche ulteriore precisazione la teoria che segue sussiste anche se $k(x, x)$ è pseudolimitata, ossia è quasi continua nel senso di TONELLI (anzichè quasi ovunque continua) ferma restando la limitazione $|f(P)| \leq L < +\infty$ in $E - Q$.

Come al solito (vedi [6] pag. 1 e 2) denoto con

L	lo pseudo estremo superiore di $k(x, y)$ in $E^{(2)}$,
N	il lebesghiano di singolarità » » » »
Q	» limitatezza » » » »
$I = N + Q$	» irregolarità » » » »
a	» singolarità di $A(y)$ in E .
d	» » » » $f(x)$ o di $g(x)$ in E ,
M	un confine superiore dell'integrale esteso ad E di $ A(y) $.

Sarà quindi:

- (I) $k(x, y)$ continua in $E^{(2)} - N$ mis N (su S) = 0 (N anche non chiuso)
- (II) $|k(x, y)| \leq L$ continua in $E^{(2)} - Q$; mis Q (su S) = 0
- (III) $\int_E |A(y)| dy \leq M$
- (IV) mis a (su S_r) = mis d (su S_r) = 0.

* * *

Pongo il problema della risoluzione della [1] in forma corrente nel seguente modo:

Assegnato il nucleo $A(y)k(x, y)$ e il termine noto $f(x)$ } con $k(x, y)$ e $f(x) \subset [l]$ { determinare le eventuali funzioni di $[l]$ che verificano la [1] quasi ovunque in E , e contemporaneamente determinare il lebesghiano di esclusione delle medesime; ossia l'insieme dei punti x di E , nei quali il secondo membro della [1] non ha, generalmente, senso.

Analoghe considerazioni valgono per la [1'], ma poichè

$$\mu A(x) \int_E \psi(y) k(y, x) dy$$

appartiene ad $[_A l]$ ⁽⁷⁾ è chiaro che la risoluzione della [1'] è posta coerentemente se le soluzioni $\psi(x)$ si cercano in C , [1] anzichè in $[l]$, il che non può farsi con la [1].

OSSERVAZIONE I. — È manifesto che tutta la teoria seguente può svilupparsi con le dovute modificazioni, anche se i termini noti f e g sono funzioni della x e della y , anzichè della sola x . Ciò anzi renderebbe più simmetrici i risultati.

⁽⁷⁾ $[_A l]$ rappresenta l'insieme delle funzioni del tipo $A(x)k(x, y)$ con $A(x) \subset C_1[1]$ e $k(x, y) \subset [l]$.

RISOLUZIONE DELLE [1] PER $|\lambda| < \frac{1}{LN}$

2. - Tutto ciò premesso, e posto ⁽⁸⁾

$$\bar{I} = (I_x^*, E^y) + (I_y^*, E^x), \quad \mathcal{J} = I + \bar{I}$$

dove I_x^* e I_y^* rappresentano rispettivamente le proiezioni efficaci (rispetto all'integrazione) di I su S_x^* e su S_y^* , si dimostra facilmente che:

TEOREMA I. - Nelle ipotesi poste al n. 1 e per $|\lambda| < \frac{1}{LM}$ l'equazione integrale [1] possiede in $[I]$ la sola soluzione

$$[3] \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda(k * f)_A = f + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^{r+1} \left(k^{r+1} f \right)_A$$

col nucleo risolvete

$$[4] \quad h(x, y; \lambda) = k(x, y) + \lambda \overset{A}{k}^2 + \lambda^2 \overset{A}{k}^3 + \dots,$$

quasi uniformemente convergente in $E^{(2)}$, anche esso appartenente al $[I]$ avente per insieme di irregolarità $\mathcal{J} = I + \bar{I} = N + \bar{N} + Q + \bar{Q} = \mathcal{O} \cup \mathcal{N}$.

L'insieme di esclusione della soluzione $\varphi(x)$ e del 2° membro della [1] è invece

$$J = I_x^* + d, \text{ mis } J \text{ (su } S) = 0.$$

Nel caso che E sia un dominio, risulta $Q \subset N$, ⁽⁹⁾ e quindi $I = N + Q = N$ e $\mathcal{J} = \mathcal{O}$.

Per $x \in E - J$ e per $(x, y) \in E^{(r)} - I$, $\varphi(x)$ e $h(x, y)$ sono sviluppabili in serie di potenze di λ date rispettivamente dall'ultimo membro della [3] e della [4].

⁽⁸⁾ Vedi [6] pag. 2 e seg.

⁽⁹⁾ Sia infatti, per assurda ipotesi, P_0 un punto di Q non appartenente ad N . Risulterebbe $|f(P_0)| > L$ e quindi - per la continuità di $f(P)$ in P , su $E - N$ - dovrebbe risultare $|f(P)| > L$ su tutto un intorno di P_0 , $(E - N)$ di misura positiva, il che è assurdo.

Se invece E è chiuso e di misura positiva i punti di Q appartengono ad N o a quella parte della frontiera di E i cui punti non sono d'accumulazione di punti interni di E .

Questo risultato si ottiene determinando (col noto procedimento delle approssimazioni successive, già usato - in ipotesi di gran lunga più restrittive - dal VOLTERRA) la successione $\{\varphi_n(x)\}$

$$[4] \quad \varphi_n(x) = \lambda(k * \varphi_{n-1}) * f = f + \lambda \sum_{r=1}^{n-1} \lambda^{r-1} (\overset{\Lambda}{k} * f)_\Lambda$$

di soluzioni *approssimative*⁽¹⁰⁾ le quali, come si verifica facilmente, soddisfano la [1] con un errore puntuale dato (in valore e segno, e per $x \in E - J$) da

$$[6] \quad e_n(x) = \varphi_{n+1} - \varphi_n = \lambda^n (\overset{\Lambda}{k} * f)_\Lambda$$

ossia dalla $(n+1)^{\text{mo}}$ termine della serie [3], di cui $\varphi_n(x)$ rappresenta la somma parziale n^{ma} .

Se ora denotiamo con l lo pseudoestremo superiore di $|f(x)|$ in E risulta, ⁽¹¹⁾

$$|e_n(x)| \leq |\lambda LM|^n l \quad \text{per } x \in E - J$$

e quindi, essendo $|\lambda LM| < 1$, $e_n(x)$ è infinitesimo con $\frac{1}{n}$.

Passando al limite sotto il segno integrale nella [5] e nella [6], il che è lecito, si ha la [3].

3. - Similmente a quanto si è fatto per la [1] si ottiene che la n^{ma} soluzione approssimativa della [1'] è data da

$$[5'] \quad \psi_n(x) = g(x) + \mu A(x) \int_E \psi_{n-1}(y) k(y, x) dy = g(x) + \mu A(x) \left(g(y) * \sum_{r=0}^{n-1} \mu^{r-1} \overset{\Lambda}{k}(y, x) \right).$$

Essa verifica la [1'] con un errore puntuale

$$[6'] \quad \psi_{n+1} - \psi_n = \mu^n A(x) (g * \overset{\Lambda}{k}^n)$$

e con un errore globale del primo ordine, non superiore in modulo a $|\mu LM|^n \int_E |g(y)| dy$, anch'esso infinitesimo con $\frac{1}{n}$.

⁽¹⁰⁾ Vedi [7] pag. 567.

⁽¹¹⁾ Vedi [6] pag. 4.

Dalla [5'] alla [6'], passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si deduce che:

TEOREMA I'. - Nelle ipotesi poste al n. 1 e per $|\mu| < \frac{1}{LM}$ l'equazione integrale [1'], trasposta della [1], ammette in $C_1[1]$ la sola soluzione

$$[3'] \quad \psi(x) = g(x) + \mu A(x) \int g(y) h(y, x) dy = g + A(x) \sum_{r=1}^{\infty} \mu^r g * k^r,$$

il cui insieme di esclusione è $J_A = J + a$ (mis J_A su $S_r = 0$), laddove quello di irregolarità del nucleo risolvante ⁽¹²⁾ $A(x)h(x, y)$ è

$$J_A = J + (a, E^v) \text{ (mis } S_A \text{ su } S_{2r} = 0).$$

Per $x \in E - J_A$ la $\psi(x)$ è sviluppabile in serie di potenza di μ data dall'ultimo membro della [3].

OSSERVAZIONE II. - Per risolvere le [1] si può procedere anche nel modo seguente:

Scritta la [1] nella forma $[\varphi * (1 - \lambda k)]_A = f$ la sua soluzione, a norma del teorema generale di VOLTERRA esteso ⁽¹³⁾, è data ovviamente da:

$$\varphi = \left[\frac{A}{((1 - \lambda k(x, y))^{-1} * f)_A} \right]_A + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r (k^r * f)_A$$

Per la [1'] si avrebbe invece

$$\psi * (1 - \mu A(x) k(y, x)) = g(x)$$

e quindi direttamente

$$\psi(x) = g * \frac{A}{(1 - \mu A(x) k(y, x))^{-1}} = g + A(x) \sum_{r=1}^{\infty} \mu^r g * k^r$$

PROPRIETÀ DELLE AUTOSOLUZIONI, SISTEMI FONDAMENTALI COMPETENTI

$$\text{AI NUCLEI ITERATI } K_n = A(y) k^{n+1}(x, y)$$

4. - Scriverò

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n \stackrel{p}{=} 0.$$

Per indicare che n funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ di $C_n[1]$ sono in media globalmente linearmente dipendenti del p^{mo} ordine in E , ossia

⁽¹²⁾ Vedi [6] pag. 9.

⁽¹³⁾ Vedi [8] pag. 151 e [3] pag. 6.

che esistono n costanti arbitrarie c_1, c_2, \dots, c_n , non tutte nulle, tali da aversi:

$$\int_E |c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n|^n dx = 0.$$

Nelle pagine seguenti chiameremo ancora con ovvia estensione di linguaggio, *rango* di un autovalore della [1] il numero massimo di autosoluzioni globalmente linearmente indipendenti dal 1° ordine ad esso competenti.

Se n è il rango di un certo autovalore, ogni sistema di n competenti autosoluzioni globalmente linearmente indipendenti del 1° ordine, in E , costituisce un *sistema fondamentale* di autosoluzioni, ed ogni altra soluzione è una loro combinazione lineare. *Spettro* della [1] è l'insieme dei punti del piano complesso λ che rappresentano gli autovalori.

Un sistema $[\varphi]$ di funzioni è *spettrale* per la [1] se è costituito da autosoluzioni della [1] e se inoltre ogni sistema fondamentale di questa può essere formato con funzioni del sistema $[\varphi]$. Come avviene nella teoria classica, gli autovalori della [1] non sono interni ad un cerchio di raggio conveniente (per noi $(LM)^{-1}$) e centro nell'origine. Solo quando λ è autovalore la [1] può avere più soluzioni e precisamente, o non ne ha, o ne ha infinite.

Si dimostra facilmente che:

I) *Un sistema di autosoluzioni della [1] o della [1'] rispettivamente competenti ad autovalori a due a due fra loro distinti è sempre di funzioni linearmente indipendenti.*

II) *Due autosoluzioni, una della [1] e una della [1'], rispettivamente competenti ad autovalori differenti sono fra loro ortogonali.*

III) *Se λ è un autovalore della trasporta della [1], condizione necessaria e sufficiente perchè la [1] possieda soluzione è che il termine noto f sia coortogonale ad ogni autosoluzione della trasporta.*

IV) *Se φ è un autosoluzione del nucleo $K =: A(y) k(x, y)$ competente all'autovalore λ lo è anche dell' n^{mo} nucleo iterato $K_n = A(y) \overset{A}{k}^n(x, y)$ rispetto all'autovalore λ^{n+1} ; ed ancora se φ è un autosoluzione del nucleo iterato K_n competente dell'autovalore α tra le radici $(n+1)^{\text{me}}$ di x ve ne è almeno una che è autovalore per il nucleo K .*

Possiamo anche concludere che:

V) Se λ descrive lo spettro a destra (a sinistra) del nucleo $K = A(y)k(x, y)$, λ^{n+1} descrive lo spettro a destra (a sinistra) del nucleo iterato $K_n = A(y) \overset{A}{k}^{n+1}$.

Un sistema fondamentale di autosoluzioni competenti ad un autovalore α a destra (a sinistra) del nucleo K_n , si ottiene aggregando sistemi fondamentali di autosoluzioni competenti agli autovalori a destra (a sinistra) di K che sono radici $(n+1)^{\text{me}}$ di α .

I sistemi fondamentali della [1] sono formati con funzioni $\subset [l]$, mentre quelli della [1'] con funzioni $\subset C_1[1]$: ecc.

Abbiamo dunque conseguito il risultato notevole di risolvere la [1] $\{la (1')\}$ nell'intorno dell'origine $\lambda = 0$ $\{u = 0\}$ e nell'ipotesi abbastanza generale che il nucleo risolvete (e quindi ogni suo iterato) pur non essendo pseudo limitato appartenga ad $[l_A]$ $\{ad [l]\}$; inoltre abbiamo precisato l'insieme di esclusione J $\{J_A = J + \alpha\}$ della soluzione.

RISOLUZIONI DELLE EQUAZIONI INTEGRALI [1] IN TUTTO IL PIANO COMPLESSO.

TEOREMA DI FREDHOLM.

5. - Ferme restando le ipotesi fatte al n. 1, affronto ora la risoluzione della [1] in tutto il piano complesso λ , ossia per $|\lambda| \leq R$, dove R è un numero prefissato, comunque grande.

Suppongo inoltre $\text{mis } E$ finita; a ciò, dal punto di vista pratico, posso sempre ricondirmi in quanto, in caso contrario, basta risolvere la [1] per $(x, y) \subset EQ$, dove Q è un intervallo di centro nell'origine e dimensioni sufficientemente grandi.

Intanto, da $k(x, y) \subset [l]$ e $\text{mis } E$ finita, risulta $k(x, y) \subset C_2[1]$.

Inoltre, poichè il sistema ortogonale $[X_i(x), Y_j(y)]$ dei polinomi di LEGENDRE nelle variabili x, y è completo ⁽¹⁴⁾ per l'approssimazione lineare globale in $E^{(2)}$ delle funzioni che sono ivi di classe $C_2[1]$, la funzione $k(x, y)$ si può approssimare in misura, mediante una successione di tali polinomi, ed essendo $\text{mis } E^{(2)} < +\infty$ tale successione approssimerà la $k(x, y)$ anche globalmente al 1° ordine; pertanto,

(14) Vedi [4] pag. 550.

prefissato ad arbitrio un numero positivo $\varepsilon < 1$, esiste, corrispondentemente, un numero naturale $\nu_0 = \nu_0(R, \varepsilon)$ tale che, per ogni numero naturale $\nu > \nu_0$ si possono determinare ν^2 costanti c_{ij} :

$$c_{ij} = \iint_{E^{(2)}} k(x, y) X_i(x) Y_j(y) dx dy$$

non tutte nulle, di guisa che, posto:

$$t(x, y) = k(x, y) - \sum_{i,j}^{1, \nu} c_{ij} X_i(x) Y_j(y),$$

risulti

$$[7] \quad \int_{E^{(2)}} |t(x, y)| dx dy < \frac{\varepsilon}{RM}$$

e quindi minore di ε la misura del lebesghiano $U = U\left(|t| > \frac{1}{RM}\right)$ in

$$|t(x, y)| > \frac{1}{RM} \quad (15).$$

Ma per ogni (x, y) non appartiene a Q è:

$$|t(x, y)| \leq \text{p.e.s.} |k(x, y)| \text{ in } E^{(2)} + \text{e.s.} \sum c_{ij} X_i(x) Y_j(y) \text{ in } E^{(2)};$$

ne consegue che $t(x, y)$ è pseudo limitato in E e che il suo insieme di limitatezza è contenuto in Q .

Il lebesghiano U risulta chiuso se tale è E .

Posto ora

$$[8] \quad V = U + I \quad \text{e} \quad \mathcal{E} = E - V$$

dove I è il solito lebesghiano di irregolarità di $k(x, y)$ [e quindi di $t(x, y)$] si ha:

$$[9] \quad |t(x, y)| < \frac{1}{RM} \quad \text{per } (x, y) \in \mathcal{E} \quad \text{mis } \mathcal{E} > E^{(2)} - \varepsilon.$$

(15) Infatti risulta $\frac{\varepsilon}{RM} > \int_{E^{(2)}} |t| dx dy > \int_U |t| dy dy \geq \frac{\text{mis } U}{RM}$ da cui $\text{mis } U > \varepsilon$.

CASO IN CUI RISULTA $\text{mis } U \left(t(x, y) > \frac{1}{RM} \right) = 0$.

6. - A questo punto si può porre la seguente domanda: è possibile approssimare globalmente al 1° ordine una funzione pseudo-limitata in un insieme E, con un sistema di funzioni continue completo ivi per tale approssimazione, in modo che il modulo dell'errore puntuale abbia, in E, un prefissato pseudo confine superiore?

La questione è aperta. Comunque, per il momento suppongo che ciò sia possibile. Si può quindi scegliere ε talmente piccolo che $\frac{1}{RM}$ risulti un pseudo confine superiore di $|t(x, y)|$ in $E^{(2)}$. Sarà allora p. e. s. $t(x, y) \leq \frac{1}{RM}$ e pertanto $U \subset Q$ e quindi $V \subset \mathcal{J}$ ($\text{mis } V = 0$). Ciò detto, se n ($0 < n \leq v$) è la caratteristica della matrice quadrata formata dalle v^2 quantità c_{ij} esisteranno $n(v-n)$ convenienti costanti

$$p_{k_1}, p_{k_2}, p_{k_3}, \dots, p_{k_n} \quad (k = n+1, n+2, \dots, v)$$

tali che, ponendo:

$$\beta_i(y) = \sum_{j=1}^v c_{ij} Y_j(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

risulterà

$$\sum_{j=1}^v c_{kj} Y_j(y) = \sum_{j=1}^n p_{kj} \beta_j(y) \quad (k = n+1, n+2, \dots, v)$$

e quindi ponendo ancora

$$\alpha_i(x) = X_i(x) + \sum_{k=n+1}^v p_{ki} X_k(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si avrà

$$\sum_{i,j}^{1,v} c_{ij} X_i(x) Y_j(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(y) \quad (= S_n(x, y))$$

con le $\alpha_i(x)$, $\beta_i(y)$ continue e puntualmente linearmente indipendenti in E.

Si perviene così una volta fissato R ed ε , alla scissione del nucleo $A(y)k(x, y)$ in due parti

$$A(y)k(x, y) = A(y) \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(x) + A(y)t(x, y)$$

di cui la prima è il prodotto di un nucleo *elementare*⁽¹⁰⁾ per il peso $A(y)$ e la seconda è contenuta in $[L_A]$. Il fattore $t(x, y)$ ha lo stesso insieme N di singolarità di $K(x, y)$, ha l'insieme di limitatezza $\subset Q$ ed ha per pseudo estremo superiore un numero $\leq \frac{1}{RM}$; pertanto $t(x, y)$ appartiene a $[L]$.

Posto

$$[10] \quad \xi_i = (\beta_i * \varphi)_A$$

$$[11] \quad \gamma(x, y; \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r t^{r+1} \quad (x, y) \in E^{(2)} - \mathcal{C}, \quad |\lambda| < R$$

$$[12] \quad p_i(x, \lambda) = \alpha_i(x) + \lambda(\gamma * \alpha_i)_A \quad x \in E - I_x^*$$

la [1] può scriversi nella forma

$$[13] \quad \varphi(x) = \left[f + \lambda \sum_{i=0}^n \xi_i \alpha_i(\lambda) \right] + \lambda(t * \varphi)_A,$$

le cui eventuali soluzioni, supposte note le quantità ξ_i (a norma del teorema I, per $|\lambda| < \frac{1}{(RM)^{-1} \cdot M} = R$ e per $x \in E - J$) sarebbero date da

$$[14] \quad \varphi(x) = f + \lambda \sum_{i=1}^n p_i \xi_i + \lambda(\gamma * f)_A$$

con le $p_i \in [L]$ e puntualmente e linearmente indipendenti in $E - I_x^*$.

Per determinare le ξ_i , posto

$$[15] \quad d_{ij}(\lambda) = (\beta_i * p_j)_A$$

$$[16] \quad q_i(y, \lambda) = \beta_i(y) + \lambda(\beta_i * \gamma)_A \quad x \in E - I_x^*$$

basta risolvere il sistema di n equazioni lineari algebriche

$$[17] \quad \xi_i - \lambda \sum_{j=1}^n d_{ij} \xi_j = (q_i * f)_A \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ottenuto eliminando $\varphi(x)$ tra la [14] e la [10].

Pertanto le [1] per $\frac{1}{LM} \leq \lambda < R$, non ammettono soluzioni, ne ammettono una sola o ne ammettono infinite a secondo che tale sistema è incompatibile, compatibile e determinato o indeterminato.

⁽¹⁰⁾ Vedi [4] pag. 559 ovvero [1] pag. 436.

Se il determinante

$$[18] \quad D_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda d_{11} & -\lambda d_{12} & \dots & -\lambda d_{1n} \\ -\lambda d_{21} & 1 - \lambda d_{22} & \dots & -\lambda d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda d_{n1} & -\lambda d_{n2} & \dots & 1 - \lambda d_{nn} \end{vmatrix}$$

del sistema [17] è $\neq 0$ e se Δ_{ji} rappresenta il complemento algebrico del termine che occupa la riga j^{ma} e la colonna i^{ma} , si ottiene:

$$[19] \quad \xi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}}{D_R(\lambda)} (q_i * f)_A \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Sostituendo infine le ξ_i ora trovate nella [14] e ponendo

$$[20] \quad h_R(x, y; \lambda) = \gamma(x, y; \lambda) + \lambda \sum_{i,j} \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{D_R(\lambda)} p_i(x, \lambda) q_j(y, \lambda) \quad (x, y) \in E^{(2)} - J$$

risulta che la soluzione cercata dovrebbe avere la forma

$$[21] \quad \varphi(x) = f + \lambda (h_R * f)_A \quad x \in E - J.$$

Viceversa nelle ipotesi poste l'espressione $\varphi(x)$ data dalla [21] ha senso, è $\in [L]$ e verifica la [1].

Per $|\lambda| < R$ le funzioni $\gamma(x, y; \lambda)$, $p_i(x, \lambda)$ e $q_j(y, \lambda)$ appartengono a $[L]$.

Si dimostra inoltre che la funzione olomorfa h_R , ora introdotta, per $|\lambda| < R$, coincide in tutto il piano complesso λ con quella definita,

per $|\lambda| < \frac{1}{RM}$, dalla serie $\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r k^{r+1} = h(x, y; \lambda)$ (vedi n. 2) e che, per

$(x, y) \in E^{(2)} - J$, soddisfa anchessa alla relazione di reciprocità

$$h_A - k = \lambda (k * h_R)_A = \lambda (h_A * k)_A;$$

oppure, ponendo

$$H_R(x, y, \lambda) = A(y) h_R(x, y, \lambda)$$

alla relazione

$$H_R - K = \lambda K * H_R = \lambda H_R * K.$$

RISOLUZIONE DELLA [1'] PER $|\lambda| < R$

6'. - Posto

$$\left. \begin{aligned} [10'] \quad & \eta_i = \psi * \alpha_i \\ [12'] \quad & q_i(x; \mu) = \beta_i + \mu (\beta_i * \gamma)_A \\ [15'] \quad & \bar{d}_{i,j}(\mu) = (q_j * \alpha_i)_A = (\beta_j * p_i)_A = d_{ji}(\mu) \end{aligned} \right\} (i, j = 1, \dots, n)$$

la [1'], dopo aver eseguito sul nucleo $A(x)k(x, y)$ una decomposizione analoga a quella effettuata sul nucleo $A(y)k(x, y)$ al n. 6, può scriversi nella forma

$$\psi(x) = \left[g(x) + \mu A(x) \sum_{i=0}^n \beta_i * \eta_i \right] + \mu A(x) (\psi * t)$$

e la sua soluzione, supposte note le η_i , sarà data da (teorema I')

$$\psi(x) = g(x) + \mu A(x) \sum_{i=1}^n \eta_i q_i + \mu A(x) (g * \gamma) ,$$

rappresentando $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ una soluzione del sistema algebrico

$$[17'] \quad \eta_i - \mu \sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} \eta_j = g * p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

trasposto al sistema [17].

Chiamato \bar{D}_n il determinante che si ottiene dal [18] sostituendo le d_{rs} con le $\bar{d}_{rs} = d_{sr}$ risulta facilmente:

$$\bar{D}_n = D_n \quad \bar{\Delta}_{ij} = \Delta_{ji} .$$

Ripetendo le considerazioni ed i calcoli già fatti per risolvere la [1] nel caso $\frac{1}{LM} \leq |\lambda| < R$ si conclude che:

TEOREMA II'. - Se è $(LM)^{-1} \leq \mu < R$, $D_n(\mu) \neq 0$ e $\text{mis } U = 0$, la [1'] ammette, nella classe $C_1[1]$, una sola soluzione data per $x \in J_A = J + a$, da

$$[21'] \quad \psi(x) = g(x) + \mu A(x) (g * \bar{h}_n) ,$$

dove si è posto, per $(x, y) \in E^{(2)} - J_A$

$$[20'] \quad \bar{h}_R(x, y; \mu) = \gamma(x, y; \mu) + \mu \sum_{i,j}^{1,n} \frac{\bar{\Delta}_{ij}}{\bar{D}_R(\mu)} p_j(x) q_i(y) = h_R(x, y; \mu).$$

RISOLUZIONE DELLA [1] E DELLA [1']
NEL CASO CHE λ SIA UN AUTOVALORE [$D_R(\lambda) = 0$]

7. - Se invece, per un particolare valore di λ (in modulo $< R$) si annulla il determinante $D_R(\lambda)$ la caratteristica di quest'ultimo sarà uguale ad $n - \rho$, con $\rho \geq 1$.

In tal caso se

$$\xi_1^{(x)}, \xi_2^{(x)}, \dots, \xi_n^{(x)} \qquad \eta_1^{(x)}, \eta_2^{(x)}, \dots, \eta_n^{(x)}$$

$$(k=1, 2, \dots, \rho)$$

sono due ρ^{te} di sistemi fondamentali di autosoluzioni, rispettivamente dei sistemi [17] e [17'], le espressioni

$$\varphi_k(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i^{(x)} p_i(x, \lambda) \qquad \psi_k(x) = \lambda A(x) \sum_{i=1}^n \eta_i^{(x)} q_i(x, \mu)$$

$$(k=1, 2, \dots, \rho)$$

saranno due ρ^{te} di sistemi fondamentali di autosoluzioni ⁽¹⁷⁾, rispettivamente della [1] e della [1'] per $\mu = \lambda$, sicchè, in tali ipotesi, ogni altra autosoluzione della [1] e rispettivamente della [1'] è del tipo

$$[22] \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\rho} a_k \varphi_k(x) \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\rho} b_k \psi_k(x)$$

con le a_k e b_k costanti non nulle, e viceversa. Dunque λ è un autovalore delle [1].

È manifesto che: $\varphi(x) \in [U]$ e $\psi(x) \in C_1[1]$.

Per contro, se λ è un autovalore, per esempio della [1], e $\varphi(x)$ la competente autosoluzione, dovrà essere

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\rho} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\rho} a_k \sum_{i=1}^n \lambda \xi_i^{(k)} p_i = \lambda \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^{\rho} a_k \xi_i^{(k)} = \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i p_i$$

⁽¹⁷⁾ L'indipendenza puntuale delle φ_k (e delle ψ_k) è conseguenza di quella delle p_i e delle $\xi_i^{(k)}$ (e rispettivamente delle q_i e $\eta_i^{(k)}$).

e quindi $(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)})$ è una p^{ia} di autosoluzioni indipendenti del sistema [17], che pertanto dovrà avere il suo determinante $D_n(\lambda) = 0$. Dunque:

Ogni zero di $D_n(\lambda)$ è un autovalore delle [1] e viceversa.

Inoltre, siccome, la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema lineare [17], avente caratteristica $n - p$, sia compatibile è che il vettore termine noto sia ortogonale alla varietà lineare delle soluzioni del sistema omogeneo ad esso trasposto, ne consegue che se

$$(\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)}, \dots, \eta_n^{(k)}) \quad k = 1, 2, \dots, p$$

è un sistema fondamentale di autosoluzioni del sistema trasposto, dovrà essere

$$\sum_{i=1}^n \eta_i^{(k)} (q_i * f)_A = \left[\left(\sum_{i=1}^n \eta_i^{(k)} q_i \right) * f \right]_A = \psi_k * f = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

e viceversa.

Analogamente partendo dalla [1'] e dal sistema [17'] si avrà:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} (g * p) = g * \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} p_i \right) = g * \varphi_k = 0$$

e viceversa.

Raccogliamo le principali conclusioni nel seguente

TEOREMA DELL'ALTERNATIVA. — Se prefissato ad arbitrio $R > \frac{1}{LM}$

risulta $\text{mis } U \left(|t| > \frac{1}{LM} \right) = 0$ allora:

o le [1] hanno entrambe soluzioni comunque si assuma il termine noto $f(x)$ in $[l]$ e $g(x)$ in $C_1[1]$ ed in tal caso ciascuna equazione possiede una sola soluzione ed il parametro non è zero di $D_n(\lambda)$;

ovvero ciò non avviene, ed allora λ annulla $D_n(\lambda)$, ossia è autovalore per le [1], le quali pertanto hanno in comune, e con uguale rango, gli autovalori e per ognuno di essi ammettono soluzioni quando e solo quando i loro termini noti sono coortogonali ad un sistema fondamentale di autosoluzioni (e quindi a tutte le autosoluzioni) della propria trasposta.

Le soluzioni della [1] vanno cercate in $[U]$, sono della forma [14], ed il loro insieme di esclusione è $\subset J$; quelle della [1'] vanno cercate in $C_1[1]$, sono della forma [14'] ed hanno il loro insieme di esclusione $\subset J_A$.

Il caso $\text{mis } U > 0$ sarà esaminato in una successiva nota.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*. Gauthier-Villars, Paris, 1927.
- [2] HILLE e TAMARKIN, *On the theory of linear integral equations*. In « *Annals of Mathematica* », 1930.
- [3] PICONE M., *Fondamenti di analisi funzionale lineare*. R. Istituto Nazionale di Alta matematica, 1943.
- [4] — *Appunti di analisi superiore*. Rondinella, Napoli, 1940.
- [5] PICONE e GHIZZETTI, *Teoria dell'integrazione lebesquiana*, D. U. S. A., 1942.
- [6] PLATONE G., *Teoria della composizione col peso $A(y)$ sommabile, nell'insieme delle funzioni pseudo-limitate*. Atti della XLII riunione della Soc. Italiana Progresso delle scienze, 1951.
- [6'] — *Teorema di unicità per equazioni integrali non lineari ottenute da funzioni di composizione a nucleo sommabile* in « *Acta* » della Pontificia Academia Scientiarum, Anno XIV, Vol. XIV, 1950.
- [7] — *Nuovi metodi per la risoluzione numerica dei sistemi di $p \geq 2$ equazioni in p incognite*. In « *Ricerca scientifica* », vol. II, nov. 1938.
- [8] VOLTERRE e PÉRÈS, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Gauthier-Villars, 1913.
- [9] VOLTERRA e FANTAPPIE, *Teoria de las funcionales*. Madrid, 1927.
- [10] VOLTERRA e PÉRÈS, *Leçon sur la composition ecc.* Gauthier-Villars, 1924.
- [11] — — *Theorie generale des fonctionnels*. Gauthier-Villars, 1936.

UN METODO DI INTERPRETAZIONE ANALITICA DI UNA BATTERIA DI REATTIVI *

(con 2 tabelle e 3 grafici)

MARCELLO CESA-BIANCHI e ANGELO PERUGIA

SVMMARIVM. — Seriem novem reactivorum psychologorum experti in centum quinque adulescentibus quattuordecim annos natis, Auctores haec comperierunt:

a) singillatim perpensis seriei factoribus patuit unum inesse factorem communem, tres autem factores coniunctos, nullum vero factorem verbalem neque graphicum;

b) examen vinculorum, quae intercedunt in ter singula reactiva, nonnulla tantum confirmavit ex vinculis quae ex factorum examine patuerant.

Proponunt autem Auctores rationem aliquam qua seriei possit vis augeri ad perpendenda:

a) intelligentiae universim gradum;

b) intellectus actiones, quae ab uno « test » exprimuntur;

c) actiones quae ab unoquoque factore pendent.

Praeterea Auctores uniuscuiusque « test » validitatis coëfficiens supputarunt.

L'applicazione di una batteria di reattivi psicologici può essere effettuata con una certa garanzia di obiettività nell'interpretazione dei risultati solo se siano preventivamente attuati i seguenti procedimenti:

- 1) l'analisi fattoriale della batteria;
- 2) l'interpretazione dei legami esistenti fra i vari reattivi;
- 3) il potenziamento del valore diagnostico della batteria.

I. - ANALISI FATTORIALE.

L'applicazione dell'analisi fattoriale ad una batteria di « tests » mette in evidenza gli eventuali fattori comuni ad essi e l'influenza di tali fattori

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Padre Agostino Gemelli O.F.M. il 15 luglio 1952.

nei diversi reattivi. Il metodo grafico di analisi fattoriale da noi adottato si attua esprimendo in un sistema di coordinate cartesiane gli indici di correlazione esistenti fra ciascun test e tutti gli altri.

2. - INTERPRETAZIONE DEI LEGAMI ESISTENTI FRA I VARI REATTIVI.

Si può attuare mediante l'osservazione delle correlazioni esistenti fra ciascun test e tutti gli altri al fine di evidenziare quali processi mentali, e in qual misura, prendano parte all'applicazione di ciascun reattivo. Tale interpretazione può integrarsi con quella precedentemente effettuata mediante l'analisi fattoriale.

3. - POTENZIAMENTO DEL VALORE DIAGNOSTICO.

Si può attuare dando a ciascun reattivo un « peso » differente a seconda dell'utilizzazione diagnostica della batteria ed in particolare:

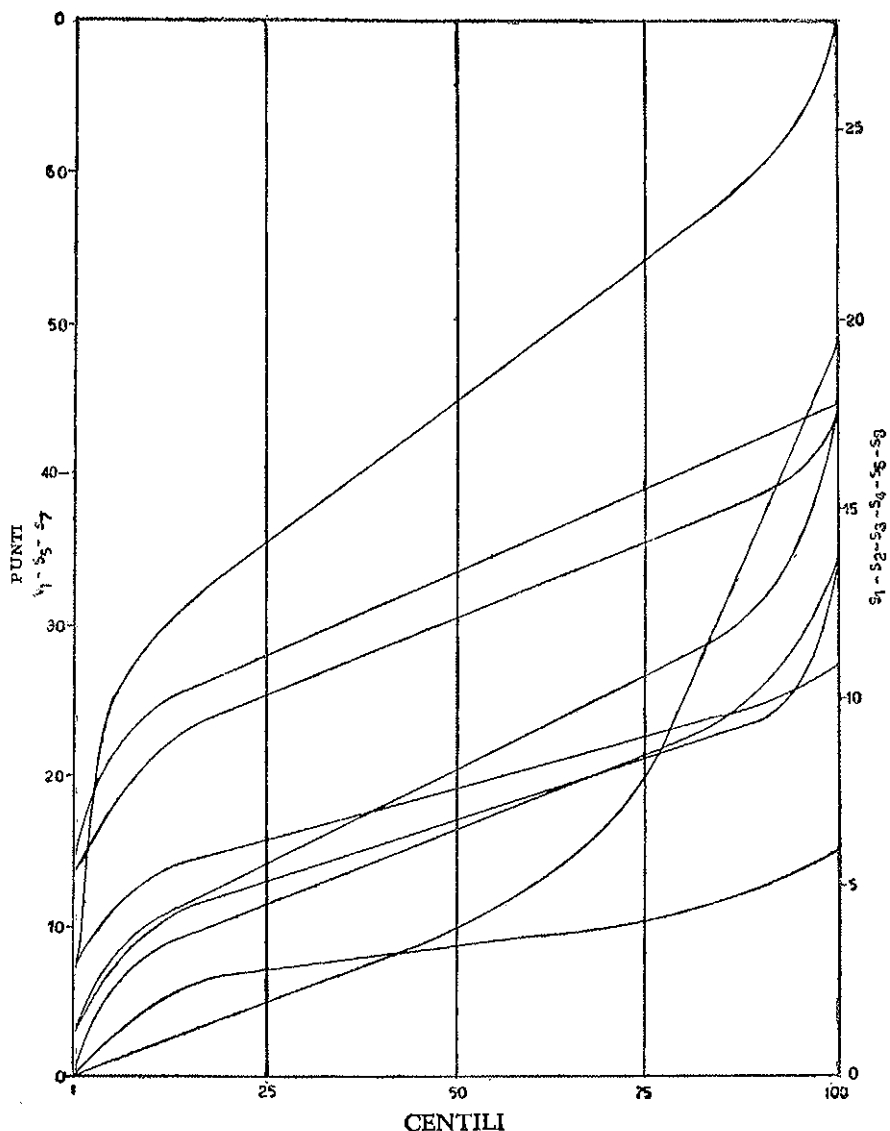
- a) un peso per una diagnosi del livello di intelligenza globale;
- b) un peso per una diagnosi del livello relativo all'attività mentale principalmente valutata da ogni singolo « test »;
- c) un peso infine per una diagnosi del livello relativo ai singoli fattori evidenziati dall'analisi fattoriale.

La batteria da noi utilizzata si compone di 9 reattivi attitudinali, di cui 8 costituiti da simboli grafici, uno da simboli verbali e numerici. Tali reattivi, di cui riportiamo sul *grafico n. 1* le curve di centilaggio, sono:

- 1) reattivo di intelligenza verbale (V_1);
- 2) reattivo di analogie grafiche (S_1);
- 3) reattivo di analisi dei movimenti (S_2);
- 4) reattivo di rappresentazione tridimensionale (S_3);
- 5) reattivo di rappresentazione bidimensionale (S_4);
- 6) reattivo di riconoscimento forme (S_5);
- 7) reattivo di immaginazione forme riflesse (S_6);
- 8) reattivo di memoria visiva (S_7);
- 9) reattivo di soluzione di problemi meccanici (S_8).

La batteria è stata applicata a 105 soggetti di sesso maschile, psichicamente normali, tutti di 14 anni di età.

GRAFICO n. 1: Curve di centilaggio.



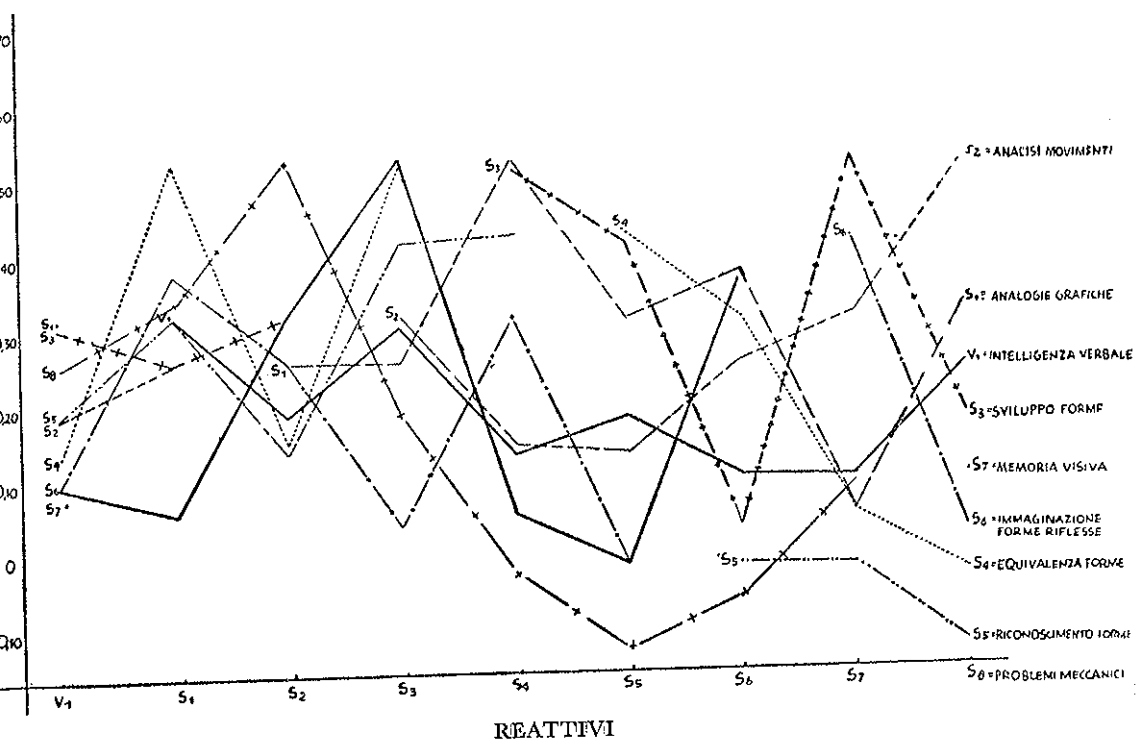
1) Ai dati ricavati è stato applicato il metodo della correlazione tetracorica secondo Thurstone. Il *grafico n. 2* riporta le correlazioni esistenti fra i vari « tests » (vedi tabella I).

L'analisi fattoriale ci ha permesso di porre le seguenti conclusioni:

a) Esiste un fattore comune ai 10 « tests », fattore che noi presumiamo essere il fattore g di Thurstone, responsabile della correlazione positiva esistente fra tutti i reattivi.

b) Non è dimostrabile un fattore che accomuni i reattivi grafici e li differenzi dall'unico reattivo verbale.

GRAFICO n. 2: Correlazioni fra i vari reattivi.



c) Si possono rilevare i seguenti fattori di gruppo:

1) fattore inerente alla capacità di analisi e confronto forme (esprimendosi nei « tests » S_4-S_8);

2) fattore inerente alla capacità di ragionamento (esprimendosi nei « tests » $V_1-S_2-S_3$);

3) fattore inerente alla capacità di rappresentazione (esprimendosi nei « tests » S_3-S_6).

d) I tests di analogie (S_1) e di memoria visiva (S_7) sono relativa-

mente indipendenti e non riconoscono un evidente fattore che li accomuni ad altri « tests ».

e) Calcolato l'indice di saturazione con g di ciascuno dei « tests » mediante la formula: $Mr_x = \frac{\Sigma r_x}{n - 1}$

in cui:

Σr_x = sommatoria delle correlazioni esistenti fra un dato reattivo e tutti gli altri;

n = numero dei reattivi della batteria,

l'ordine di saturazione appare il seguente:

S_3 (0,33) - S_1 (0,32) - S_2 (0,28) - S_4 (0,26) - V_1 (0,21) - S_7 (0,21) - S_6 (0,20) - S_5 (0,18) S_8 (0,17).

TABELLA I. — Indici di correlazione fra i « tests » della batteria.

Analogie	0,33							
An. Mov.	0,20	0,27						
Svil. For.	0,32	0,27	0,33					
Equiv. For.	0,15	0,54	0,16	0,53				
Ric. For.	0,20	0,33	0,15	0,43	0,44			
Imm. For. Riff.	0,12	0,39	0,27	0,05	0,33	0,00		
Mem. Vis.	0,12	0,07	0,33	0,54	0,07	0,00	0,43	
Probl. Mecc.	0,27	0,35	0,54	0,20	0,01	0,11	0,04	0,12
I. Gen.	Analogie	Anal. Mov.	Svil. For.	Equiv. For.	Ric. For.	Imm. For. Riff.	Mem. Vis.	

f) L'ordine di saturazione dei tre gruppi di « tests », accumulati ciascuno da un fattore, ordine calcolato dalla formula:

$$Mr_{1, 2, \dots n} = \frac{Mr_1 + Mr_2 + Mr_3 + \dots Mr_n}{n}$$

in cui:

Mr_1, Mr_2 , ecc. = indici di saturazione di ciascun reattivo;

n = numero dei reattivi di ciascun gruppo;

è il seguente:

$S_4 - S_5$ (analisi e confronto forme = 0,27); $S_3 - S_6$ (capacità rappresentativa = 0,26); $V_1 - S_2 - S_8$ (capacità di ragionamento = 0,22).

2) L'osservazione per ciascun « test » delle correlazioni esistenti con tutti gli altri (vedi *grafico n. 2*) ci consente di fare le seguenti considerazioni:

a) per V_1 (intelligenza verbale) non si nota un deciso prevalere di alcun processo mentale; la parte di maggior importanza è riferibile alla capacità di ragionamento;

b) per S_1 (analogie grafiche) si nota un netto prevalere della capacità di valutare rapporti spaziali e una scarsissima influenza della capacità di memorizzazione;

c) per S_2 (analisi movimenti) si nota un netto prevalere della capacità di risoluzione di problemi meccanici, mentre ha scarso rilievo la capacità di valutazione dei rapporti spaziali;

d) per S_3 (sviluppo forme) si osserva un netto prevalere della capacità di valutazione di rapporti spaziali e della capacità in memorizzazione;

un ruolo pressochè nullo è riferibile ai processi in prevalenza logici;

e) per S_4 (equivalenza forme) una parte preminente ha la capacità di rappresentazione e di valutazione di rapporti spaziali e un ruolo pressochè nullo la capacità mnemonica e quella di ragionamento;

g) per S_6 (immaginazione forme riflesse) prevalgono la capacità di ragionamento analogico, la capacità di memorizzazione, la capacità di analisi e di sintesi. Un ruolo pressochè nullo è riferibile alla capacità di risolvere problemi meccanici e di valutare rapporti spaziali;

h) per S_7 (memoria visiva) si nota una stretta relazione coi processi rappresentativi. Un ruolo scarsissimo è imputabile alla capacità di valutazione di rapporti spaziali;

l) per S_8 (problemi meccanici) prevalgono la capacità di ragionamento analitico e di ragionamento analogico; un ruolo scarsissimo è imputabile alla capacità immaginativa e di valutazione di rapporti spaziali.

Confrontando le conclusioni ricavate mediante l'analisi fattoriale con quelle desunte dai legami esistenti fra i vari reattivi, si può concludere che

è confermata l'esistenza di un fattore, o di un legame, che accomuna la capacità di riconoscere rapporti spaziali e quella di valutare equivalenze formali, come pure l'esistenza di un fattore, o legame, fra intelligenza verbale, capacità di ragionamento analitico e capacità di risolvere problemi meccanici.

Non appare confermata dallo studio dei legami presenti fra i vari reattivi l'esistenza di un fattore inerente alla capacità di confrontare rappresentazioni bidimensionali con altre tridimensionali e la capacità di riconoscere alcune figure bidimensionali in combinazioni pure bidimensionali.

Analogamente non appaiono confermati dall'analisi fattoriale altri legami evidenziati dal metodo delle correlazioni.

3) Il potenziamento del valore della nostra batteria ai fini di una diagnosi del livello di intelligenza globale è stato effettuato applicando la formula:

$$I_g = T_1 \cdot Mr_1 + T_2 \cdot Mr_2 + \dots T_n \cdot Mr_n$$

in cui $T_1, T_2, \dots T_n$ = punteggio grezzo di ciascun « test »;

$Mr_1, Mr_2, \dots Mr_n$ = indice di saturazione con g di ciascun « test ».

b) Il potenziamento relativo all'attività mentale principalmente valutata da un singolo « test » è stato invece realizzato applicando la formula:

$$I_s = T_s + T_1 \cdot r_{s-1} + T_2 \cdot r_{s-2} + \dots T_n \cdot r_{s-n}$$

in cui:

I_s = valore relativo dell'attitudine specifica di un dato « test »;

T_s = punteggio grezzo del « test » considerato;

$T_1, T_2, \dots T_n$ = punteggio grezzo dei rimanenti « tests »;

$r_{s-1}, r_{s-2}, \dots r_{s-n}$ = correlazioni esistenti fra il « test » considerato e tutti gli altri.

Qualora esistano correlazioni negative, i prodotti di tali correlazioni negative per i punteggi grezzi dei corrispondenti « tests » devono essere sottratti anzichè sommati.

In tal modo nella valutazione di una determinata attività mentale principalmente valutata dal singolo « test », il punteggio relativo ad esso assume un valore predominante rispetto a quelli relativi agli altri « tests » la cui importanza viene ad essere proporzionale alla correlazione esistente fra ciascuno di essi ed il reattivo considerato.

c) Il potenziamento relativo ai singoli fattori, evidenziati dall'analisi fattoriale, si attua utilizzando la seguente formula:

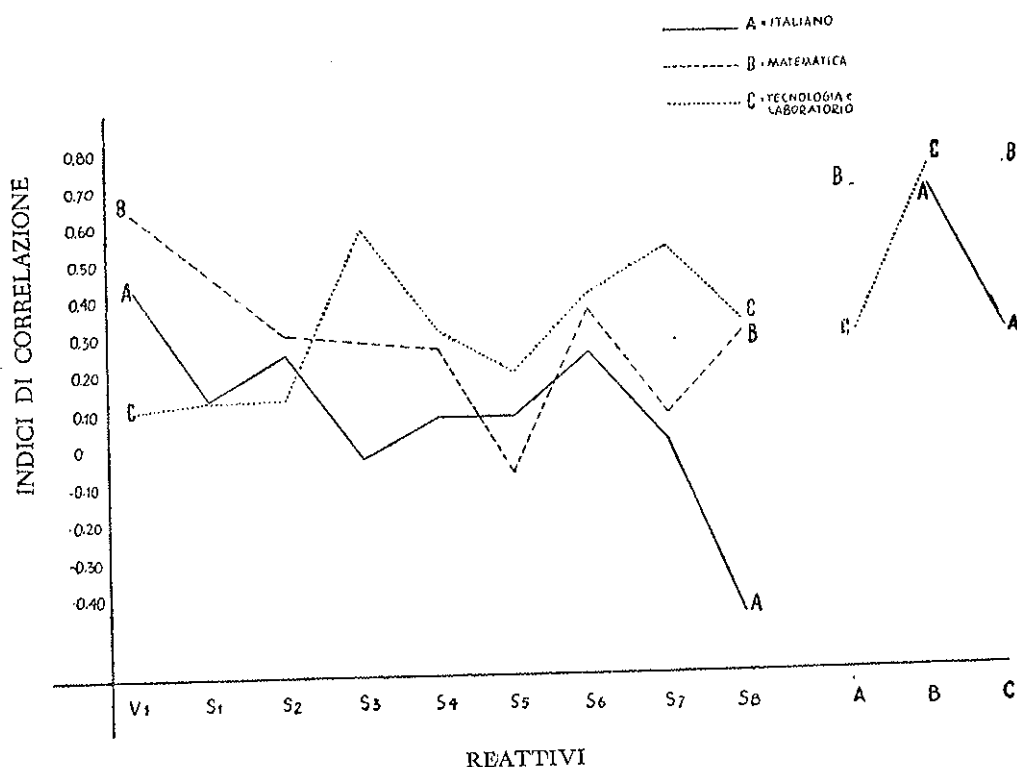
$$I_f = T_1 + T_2 + \dots T_n$$

in cui:

I_f = valore relativo al fattore di gruppo considerato;

T_1, T_2, T_n = punteggi grezzi dei « tests » appartenenti a tale gruppo.

GRAFICO n. 3: Correlazioni fra i reattivi e le discipline scolastiche.



Un criterio per valutare la validità di una batteria è quello di confrontare i punteggi relativi ai singoli « tests » col rendimento ottenuto dai soggetti in determinate attività.

Per la nostra batteria, studiata ai fini dell'orientamento scolastico, è stato assunto come criterio di validità il rendimento in diverse discipline

TABELLA II. — *Indici di correlazione fra i « tests » ed alcune discipline scolastiche.*

	Ital.	Mat.	Tec. e Lab.	I. Gen.	Analog.	Anal. Mov.	Svil. For.	Equiv. For.	Ric. Form.	Imm. For. Rifi.	Mem. Viv.	Prob. Mec.
Ital.	—			0,45	0,15	0,27	—0,01	0,10	0,10	0,27	0,01	—0,43
Mat.	0,71	—		0,65	0,50	0,32	0,30	0,28	0,05	0,39	0,10	0,32
Tec. e Lab.	0,32	0,76	—	0,12	0,15	0,15	0,60	0,32	0,22	0,43	0,55	0,35

di studio. In pratica, si sono calcolati gli indici di correlazione fra queste e le valutazioni relative ai vari « tests » (vedi tabella II).

Da tali correlazioni, espresse nel *grafico n. 3*, abbiamo potuto trarre le seguenti considerazioni:

- a) I reattivi di intelligenza verbale, di analogie grafiche e di analisi di movimenti sono particolarmente atti a diagnosticare un'attitudine agli studi matematici.
- b) I rimanenti reattivi sono al contrario maggiormente atti a diagnosticare un'attitudine alle discipline di carattere tecnico.
- c) Un'attitudine agli studi letterali richiede una capacità, discretamente elevata, di analisi, di ragionamento analogico e deduttivo e di immaginazione.
- d) L'attitudine alle discipline tecniche richiede soprattutto una elevata capacità di osservazione e di immaginazione spaziale e discrete capacità mnemoniche.
- e) L'attitudine agli studi matematici richiede in alto grado capacità di ragionamento deduttivo ed analogico, di analisi e di rappresentazione: non di importanza essenziale appaiono la capacità mnemonica e quella di valutare rapporti spaziali.

NOTA BIBLIOGRAFICA

- CATTELL R. B., *A guide to mental testing*, London, 1936.
- FISHER R. A., *Statistical method for research workers*, London, 1938.
- GUILFORD J. P., *Psychometric methods*, New York, 1936.
- LINDQUIST E. F., *Statistical analysis in educational research*, New York, 1940.
- MEILI R., *L'analyse de l'intelligence*, in: « Arch. Psychol. », Genève, 1946.
- MYERS C. S., *A new analysis of intelligence. A critical notice*, in: « Occup. Psychol. », 21, 1947.
- PEATMAN J. G., *Descriptive and sampling statistics*, New York e London, 1947.
- SPEARMAN C., *The abilities of man*, New York, 1927.
- *Psychology through the ages*, New York, 1938.
- THOMSON G. H., *The factorial analysis of human abilities*, Boston, 1939.
- THURSTONE L. L., *Psychological implications of factor analysis*, in: « Am. Psychol. », 3, 1948.
- VERNON PH., *The structure of human abilities*, New York, 1950.
- YULE G. V. e KENDALL M. G., *An introduction to the theory of statistics*, London, 1940.

RICERCHE SUL COMPORTAMENTO DEGLI INTERESSI NELL'ETÀ EVOLUTIVA *

(con 2 tabelle e 3 grafici)

ANGELO PERUGIA

SUMMARIVM. — Reactivum ex « Test de catalogue » a F. Baumgarten confecto deductum Auctor adhibuit ut perpenderet quo modo animi studia inter undecimum at tricesimum alterum aetatis annum mutetur.

Perspectis autem centum quadraginta sex hominibus, haec compertum habuit:

- a) studia quae ad litteras et ad religionem pertinent continuo augeri;
- b) moralia ac socialia studia, et ea quae ad operam pertinent, celeriter ac perseveranter augeri post quintumdecimum aetatis annum;
- c) studia quae ad « artes » attinent paulisper minui circa tertiumdecimum aetatis annum, mox autem augeri usque ad sextumdecimum, postea vero non mutari;
- d) studia quae ad fabulas et ad rerum naturam spectant nihil mutari;
- e) studia quae ad narrationes de mirificis hominum casibus deque civitatis historia attinent improvise deminui post quintumdecimum aetatis annum.

Aequa autem ratio comperta est in hominibus quorum aetas est inter undecimum ac quintumdecimum annum, alia autem, item aequa, in ceteris.

Inter binas reactivi portiones comperta est septem decimarum partium concordantia; quod ostendit reactivum rite adhiberi in huiusmodi inquisitionibus.

L'analisi degli interessi di un determinato gruppo di soggetti può essere effettuato mediante diverse procedure:

1. Dirette soggettive: consistono in un assieme di domande, direttamente ed esplicitamente formulate, alle quali il soggetto è chiamato a rispondere in seguito ad un'analisi introspettiva dei propri interessi. Appartengono a questa categoria: il Vocational Interest Blank di STRONG, il Preference Record di KUDER ed il Vocational Interest Schedule di THURSTONE, per citarne i principali.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Padre Agostino Gemelli O.F.M. il 15 luglio 1952.

2. Indirette, distinte in:

a) oggettive: tecniche fondate sul riflesso psicogalvanico, sull'osservazione dell'azione selettiva dell'attenzione e della memoria sul materiale presentato, e sulla valutazione delle conoscenze acquisite dal soggetto nelle diverse discipline (v. Reattivo degli interessi A 15 di CATTELL);

b) soggettive: al soggetto, posto di fronte ad un materiale che abbia un'immediata risonanza in lui, viene chiesto di manifestare la propria preferenza: attraverso l'analisi di tali preferenze è possibile risalire alla natura degli interessi che le determinano;

c) proiettive: il materiale è costituito da rappresentazioni grafiche ambigualmente strutturate (v. V.A.T.); tale situazione-stimolo determina da parte del soggetto la proiezione, nel tema da essa delimitato, dei propri interessi.

In questa ricerca ho applicato una procedura indiretta soggettiva allo studio degli interessi dell'età evolutiva. Ho esaminati 146 soggetti di sesso maschile, psichicamente normali, di età variabile dagli 11 ai 32 anni, suddivisi nei seguenti gruppi di età:

1° gruppo: soggetti di età compresa fra gli 11 ed i 12 anni;

2° gruppo: soggetti di 13 anni;

3° gruppo: soggetti di età compresa fra i 14 ed i 15 anni;

4° gruppo: soggetti di età compresa fra i 16 ed i 20 anni;

5° gruppo: soggetti di età compresa fra i 21 ed i 32 anni.

Ho utilizzato un reattivo da me appositamente studiato assumendo come principio informatore quello proprio al « Test de catalogue » della F. Baumgarten.

Tale reattivo è costituito da:

a) Un fascicolo in cui sono indicati titoli di libri raggruppati in due sezioni: A e B. Ciascun titolo è contrassegnato da una lettera e da un numero; ad esempio: A 1, A 2, A 3, ecc.

b) Un foglio di risposta a due colonne, A e B.

Il soggetto deve leggere attentamente tutti i titoli contenuti nella sezione A; scegliere i 15 libri che maggiormente lo interessano e segnare nella colonna A del foglio di risposta la lettera ed il numero a ciascuno corrispondente. Il soggetto deve poi leggere attentamente tutti i titoli contenuti nella sezione B e, seguendo le modalità indicate per la sezione A, segnare nella colonna B i 15 libri preferiti appartenenti a tale sezione.

Ciascuna delle due sezioni comprende 125 titoli scelti in modo da esprimere chiaramente il contenuto dei libri relativi. I 250 titoli complessivi sono egualmente distribuiti in 25 categorie di interessi (ad esempio: interessi sociali, religiosi, morali, sportivi, ecc.).

La suddivisione in due sezioni è stata fatta per poter valutare l'attendibilità del reattivo mediante il grado di concordanza esistente fra i risultati delle due sezioni.

I risultati sono graficamente evidenziati nella così detta « rosa degli interessi », costituita da 10 anelli concentrici, ciascuno dei quali è suddiviso in 25 settori (uno per ciascuna categoria di interessi). Le scelte vengono indicate riempiendo a matita, di colore differente per la sezione A e la sezione B, ogni casella così risultante.

Nella *tabella I* ho riportato i titoli dei libri relativi a ciascun gruppo di interessi, l'ordine di presentazione di quelli nelle due sezioni del reattivo e le percentuali dei soggetti, distinti per gruppi di età, che hanno scelto i vari libri:

Dall'analisi di tale tabella si possono individuare i libri più significativi per quanto riguarda lo studio del mutamento degli interessi con l'età e per quanto riguarda una più accurata distinzione nell'ambito di ciascuna categoria. Ad esempio nella categoria: Lavoro, il libro intitolato « Sei adatto per il tuo lavoro? » è scelto dal 55,5% dei soggetti di età compresa fra i 16 ed i 20 anni, mentre è scelto solo dal 14,28% dei soggetti di età compresa fra i 14 ed i 15 anni. Ancora, nella categoria: Interessi sociali, il libro intitolato « L'uomo e la società » è scelto con le seguenti percentuali:

13 anni	=	3,03%
16-20 »	=	33,30%
21-32 »	=	80,92%

Nella *tabella II* sono riportate, per ogni categoria di interessi, le medie delle scelte individuali per ogni gruppo di età. Queste medie sono riportate sulle ordinate dei grafici n. 1, n. 2 e n. 3; sull'ascissa dei grafici n. 1 e n. 2 sono indicati i livelli di età considerati, sull'ascissa del grafico n. 3 sono indicate le varie categorie di interessi.

Dall'esame di tali dati ho potuto constatare, con il progredire dell'età (v. *tabella II* e *grafico n. 1* e *n. 2*):

a) Un aumento costante e regolare degli interessi letterari e religiosi.

b) Un lieve aumento regolare fino ai 15 anni con una rapida e costante ascesa dopo questa età degli interessi morali e sociali, di quelli inerenti alle attività lavorative e all'igiene.

TABELLA I. — *Percentuali dei soggetti, distinti per gruppi di età, che hanno scelto i vari libri.*

N. di pre- sentazione e categoria di interessi	Titoli dei libri	Età dei soggetti (in anni)				
		11-12	13	14-15	16-20	21-32
1) Avventure						
A 15	Cristoforo Colombo	31,56	24,24	42,84	11,10	4,76
A 34	I meravigliosi viaggi di Marco Polo	52,60	57,57	49,98	5,55	14,28
A 60	Le esplorazioni polari	57,86	42,42	14,28	11,10	4,76
A 91	L'arditoso viaggio del navigatore Antonio Pigafetta	31,56	30,30	49,98	11,10	4,76
A 122	I viaggi di Magellano	47,34	54,54	64,26	16,65	4,76
B 22	Le esplorazioni del Matto Grosso ..	42,08	57,57	42,84	16,65	23,80
B 44	Nella foresta del Rio Negro	26,30	33,33	21,42	—	9,52
B 53	Esplorazioni nell'Africa Equatoriale ..	52,60	57,57	7,14	11,10	23,80
B 85	Il primo giro del mondo	15,78	21,21	7,14	11,10	—
B 122	Nel paese dei Caribù	31,56	33,33	28,56	—	9,52
2) Storia patria						
A 5	Storia d'Italia	26,30	27,27	49,98	22,20	23,80
A 32	L'ultima guerra della indipendenza italiana	47,34	36,36	28,56	27,75	—
A 57	Il 1948	10,52	12,12	7,14	5,55	4,76
A 79	La battaglia di Marengo	47,34	33,33	35,70	—	—
A 105	1870-1920. Dalla presa di Roma alla Conciliazione	10,52	3,03	—	22,20	14,28
B 17	Gli Statuti e la prima guerra d'indi- pendenza	26,30	33,33	21,42	5,55	—
B 43	Il Conte di Cavour e la seconda guerra d'indipendenza	52,60	42,42	35,70	11,10	4,76
B 71	I Mille e la terza guerra d'indipen- denza	63,12	48,48	35,70	5,55	4,76
B 78	La vita italiana dal 1900 al 1910	15,78	12,12	—	5,55	9,52
B 106	La prima guerra mondiale e l'inter- vento italiano	36,82	27,27	9,09	16,65	4,76
3) Biografie						
A 4	Sant'Ambrogio	10,52	—	7,14	5,55	14,28
A 49	L'eroe dei due mondi	47,34	28,48	57,12	5,55	4,76
A 52	Giulio Cesare	47,34	21,21	28,56	5,55	4,76
A 98	La vita di Napoleone	47,34	36,36	42,84	5,55	4,76
A 104	Don Bosco, l'amico dei ragazzi	26,30	15,15	28,56	5,55	14,28
B 4	La storia meravigliosa di Bernadette ..	10,52	27,27	21,42	16,65	19,04
B 32	Leonardo da Vinci	26,30	24,24	42,84	27,75	19,04
B 66	Giuseppe Verdi	26,30	15,15	21,42	33,30	19,04
B 87	Alessandro Volta	10,52	3,03	35,70	5,55	—
B 115	Guglielmo Marconi	26,30	21,21	49,98	11,10	—

N. di pr- sentazione e categoria di interessi	Titoli dei libri	Età dei soggetti (in anni)				
		11-12	13	14-15	16-20	21-32
4) Guerra						
A 14	Armi antiche e moderne	21,04	36,36	28,56	11,10	4,76
A 36	Piccola storia del nostro esercito ...	26,30	24,24	7,14	11,10	—
A 55	Combattimenti navali ed eroi del mare	42,08	48,48	49,98	22,20	14,28
A 88	La vita militare	15,78	15,15	7,14	22,20	—
A 103	Gli eroi dell'aria	31,56	30,30	14,28	16,65	—
B 11	Fantoci e fanti	5,26	—	—	—	—
B 49	L'impiego del carro armato nella guerra di movimento	15,78	45,45	21,42	27,75	4,76
B 75	In trincea	42,08	30,30	7,14	11,10	—
B 118	Il 3° Bersaglieri	36,82	42,42	42,84	5,55	—
B 96	I nostri Alpini	26,30	30,30	49,98	16,65	9,52
5) Sport						
A 13	Ciclismo	31,56	27,27	28,56	5,55	9,52
A 38	Il nuoto	10,52	33,33	14,28	44,40	33,32
A 51	Sci e sports della neve	47,34	36,36	21,42	38,85	19,04
A 94	L'alpinismo	36,82	27,27	14,28	38,85	28,56
A 119	Gioco del calcio	36,82	36,36	49,98	16,65	4,76
B 21	La caccia	31,56	48,48	35,70	11,10	—
B 27	La pesca sportiva	10,52	21,21	14,28	5,55	4,76
B 59	Il pugilato	31,56	18,18	28,56	—	—
B 100	Atletica leggera	15,78	15,15	9,09	27,75	9,52
B 111	Il canottaggio	10,52	12,12	7,14	16,65	4,76
6) Meccanica						
A 21	L'elicottero	36,82	24,24	28,56	33,30	9,52
A 48	L'aeroplano	31,56	24,24	14,28	11,10	4,76
A 59	L'automobile	31,56	24,24	42,84	22,20	23,80
A 80	Dinamo e motori	21,04	24,24	14,28	11,10	—
A 110	Elementi di meccanica	21,04	18,18	7,14	11,10	—
B 18	Macchine a vapore	26,30	42,42	21,42	16,65	4,76
B 48	Il meccanico dilettante e il prepara- tore di esperienze	5,26	9,09	7,14	16,65	14,28
B 52	Nozioni di meccanica applicata	15,78	6,06	7,14	5,55	—
B 83	La motocicletta	15,78	39,39	42,84	5,55	14,28
B 124	Motori a scoppio	15,78	42,42	35,70	33,30	9,52
7) Storia generale						
A 6	La conquista di Alessandro	15,78	24,24	14,28	—	9,52
A 43	Le crociate	36,82	33,33	28,56	16,65	14,28
A 69	La colonizzazione del nuovo mondo ..	10,52	6,06	14,28	—	4,76
A 89	Piccola storia del popolo argentino ..	5,26	12,12	21,42	—	—
A 118	Piccola storia del popolo francese ..	10,52	21,21	7,14	5,55	4,76
B 23	Piccola storia del popolo belga	10,52	3,03	14,28	—	—
B 31	Egiziani e Assiro-Babilonesi	21,04	24,24	42,84	—	19,04
B 68	Roma antica	42,08	15,15	28,56	5,55	19,04
B 95	Vicende politiche e sociali del Medio Evo	5,26	9,09	—	11,10	28,56
B 102	La vita europea dal '200 al '700....	10,52	—	—	5,55	14,28

N. di presentazione e categoria di interessi	Titoli dei libri	Età dei soggetti (in anni)				
		11-12	13	14-14	15-20	21-32
8) <i>Elettricità</i>						
A 24	Gli accumulatori elettrici	5,26	6,06	14,28	5,55	—
A 39	Elettricità e magnetismo	15,78	12,12	28,56	22,20	14,28
A 65	Radiotelegrafia e radiotelefonìa	15,78	18,18	21,42	16,65	4,76
A 85	La telegrafia elettrica	10,52	12,12	21,42	—	—
A 115	Le centrali elettriche	5,26	12,12	14,28	16,65	10,04
B 20	Misure elettriche	5,26	6,06	7,14	11,10	4,76
B 54	Televisione e fototelegrafia	31,56	24,24	40,98	22,20	9,52
B 60	Impianti elettrici	10,52	18,18	7,14	11,10	4,76
B 97	Gli apparecchi di misura del radio-tecnico	15,78	12,12	3,03	5,55	—
B 120	Guasti e riparazioni delle macchine elettriche	10,52	12,12	14,28	—	4,76
9) <i>Storie misteriose</i>						
A 2	La torre del mistero	10,52	30,30	21,42	5,55	9,52
A 31	La maschera cinese	10,52	9,09	14,28	11,10	14,28
A 68	La parola misteriosa	—	—	—	5,55	4,76
A 84	Un'ala nella notte	—	21,21	7,14	11,10	4,73
A 114	La notte del 13	5,26	9,09	—	—	4,76
B 7	Il vecchio castello	21,04	30,30	7,14	5,55	4,76
B 26	Il gufo grigio	—	9,09	—	11,10	4,76
B 54	La tragica notte	15,78	3,03	—	11,10	9,52
B 90	La caverna sul mare	5,26	12,12	—	5,55	4,76
B 101	Il direttissimo delle 0,23	26,30	18,18	3,03	16,65	9,52
10) <i>Animali</i>						
A 18	I pesci	15,78	6,06	28,56	11,10	14,28
A 37	Gli anfibi e i rettili	21,04	6,06	7,14	11,10	9,56
A 72	Il libro dei mammiferi	15,78	9,09	7,14	—	4,76
A 97	Il libro degli uccelli	5,26	9,09	14,28	5,55	—
A 107	Le meraviglie del regno animale	15,78	24,24	21,42	22,20	14,28
B 3	Le più comuni farfalle d'Europa	10,52	6,06	7,14	5,55	—
B 35	Il cavallo	5,26	18,18	7,14	—	9,52
B 56	L'allevamento dei conigli	—	—	7,14	5,55	—
B 81	Pesci ornamentali e l'allevamento del pesce rosso	21,04	9,09	7,14	5,55	—
B 112	Il canarino e i più comuni uccelli da gabbia	—	6,06	—	—	—
11) <i>Romanzi</i>						
A 3	La spina nel cuore	—	9,09	7,14	11,10	—
A 41	Solo al mondo	15,78	15,15	7,14	16,65	14,28
A 61	Il romanzo di due fanciulli	15,78	15,15	14,28	—	—
A 87	Ritorno alla vita	—	6,06	—	16,65	—
A 101	Addio, Maggy!	5,26	6,06	—	11,10	4,76
B 9	I figli della ferrovia	15,78	27,27	21,42	—	—
B 40	Il mistero di un'anima	—	—	—	16,65	4,76
B 67	Dalle tenebre alla luce	—	6,06	—	5,55	9,52
B 79	Fedele fino alla morte	10,52	15,15	7,14	5,55	—
B 113	Sagra d'ottobre	—	—	7,14	16,65	—

N. di presentazione e categoria di interessi	Titoli dei libri	Età dei soggetti (in anni)				
		11-12	13	14-15	16-20	21-32
12) Storie fantastiche						
A 1	L'albero incantato	—	6,06	7,14	—	14,28
A 27	Lo specchio magico	10,52	9,09	—	5,55	9,52
A 53	Un giardino incantato	—	6,06	—	5,55	4,76
A 100	La gocciolina magica	—	9,09	7,14	—	—
A 121	Storie meravigliose	—	15,15	—	5,55	—
B 13	Cento fiabe illustrate	5,26	12,12	—	5,55	4,76
B 38	Le più belle fiabe	5,26	12,12	7,14	—	14,28
B 51	Il regalo delle fate	5,26	3,03	—	5,55	—
B 80	Al di là del verosimile	21,04	6,06	12,28	11,10	4,76
B 125	Le più famose leggende	21,04	30,30	35,70	27,75	23,80
13) Metallurgia						
A 20	Ferro, acciaio e loro lavorazioni	5,26	15,15	14,28	11,10	4,76
A 26	La fonderia	5,26	6,06	—	5,55	4,76
A 64	I metalli rari	10,52	6,06	—	11,10	4,76
A 83	Le macchine utensili per la lavorazione dei metalli	5,26	3,03	—	16,65	4,76
A 120	Lavorazione dei metalli a caldo e a freddo	—	12,12	14,28	11,10	4,76
B 6	Il tornio	5,26	9,09	7,14	—	—
B 36	La fresatrice	—	3,03	14,28	5,55	4,76
B 73	Le macchine utensili a taglio rettilineo	—	6,06	7,14	—	—
B 92	Le prove dei materiali metallici	—	—	—	11,10	—
B 116	La rettifica dei metalli	—	—	—	—	—
14) Agraria						
A 17	Concimi e concimazioni	5,26	—	7,24	—	—
A 46	Nozioni di frutticoltura	5,26	3,03	—	5,55	—
A 56	Il giardinaggio	5,26	—	—	5,55	14,28
A 93	Piante da legno	5,26	6,06	—	—	—
A 124	Dall'oliveto all'oleificio	—	9,09	—	—	4,76
B 25	Gelsicoltura	—	3,03	—	5,55	—
B 29	Il mio orto	5,26	—	—	5,55	9,52
B 57	Come vivono le piante	5,26	—	—	11,10	9,52
B 99	Nozioni di viticoltura moderna	5,26	—	—	5,55	—
B 123	Fioricoltura. Piante da giardino, da cortile e da finestra	5,26	3,03	—	11,10	4,76
15) Chimica						
A 23	Introduzione al laboratorio chimico	15,78	3,03	—	11,10	14,28
A 50	L'aria liquida e le sue applicazioni	5,26	6,06	7,14	22,20	9,52
A 54	Petroli e derivati	5,26	3,03	7,14	16,65	—
A 99	Il gas illuminante	—	9,09	—	11,10	—
A 106	Proprietà chimiche degli elementi e preparazione industriale dei più comuni	10,52	—	7,14	22,20	9,52
B 19	Nozioni elementari di chimica	26,30	3,03	7,14	27,75	9,52
B 34	I gasogeni e le loro applicazioni	—	6,06	7,14	—	—
B 65	Grassi e saponi	—	3,03	—	—	—
B 91	Vernici	5,26	3,03	—	—	—
B 121	Analisi chimica	5,26	6,06	—	16,65	14,28

N. di presentazione e categoria di interessi	Titoli dei libri	Età dei soggetti (in anni)				
		11-12	13	14-15	16-20	21-32
16) <i>Tecnologia</i>						
A 22	La seta. Filatura e tessitura meccanica	5,26	12,12	—	5,55	9,52
A 44	La lana e la sua industria	5,26	9,09	—	—	4,76
A 67	L'ottica	5,26	—	7,14	5,55	4,76
A 81	Nozioni elementari di terminologia	—	—	—	5,55	9,52
A 116	La conservazione della frutta	5,26	—	—	5,55	4,76
B 15	Nozioni elementari di acustica	5,26	3,03	—	5,55	4,76
B 50	Elementi di tecnologia tessile	—	9,09	14,28	5,55	4,76
B 64	Pompe e compressori	—	9,09	—	—	—
B 89	La manifattura della pellicola cinematografica	—	9,09	—	5,55	4,76
B 105	La tecnica della fotografia	10,52	15,15	3,03	22,20	28,56
17) <i>Religione</i>						
A 10	Gesù viene	—	3,03	14,28	5,55	19,04
A 28	Racconti eucaristici	—	3,03	—	—	4,76
A 71	Il pianto di Gesù	—	—	—	11,10	9,52
A 92	Vita di Santi	10,52	6,06	7,14	11,10	4,76
A 102	Il poema divino	5,26	—	—	16,65	9,52
B 14	La nostra fede	—	3,03	—	11,10	33,32
B 28	Il Re dei Re	10,52	15,15	7,14	5,55	9,52
B 61	La casa della Divina Provvidenza	—	3,03	—	11,10	4,76
B 93	Gesù fanciullo	10,52	6,06	7,14	11,10	14,28
B 114	La fuga in Egitto	—	12,12	28,56	11,10	4,76
18) <i>Contabilità</i>						
A 25	Manuale di pratica commerciale	—	—	—	5,55	19,04
A 29	Moneta, cambi e prezzi	—	3,03	—	11,10	28,56
A 74	Le banche	—	—	—	5,55	19,04
A 95	La registrazione in conto corrente e a partita doppia	—	3,03	—	—	4,76
A 112	La cambiale	—	3,03	—	—	—
B 8	Gestione delle aziende commerciali	—	—	—	11,10	38,08
B 47	Nozioni di contabilità	—	—	—	5,55	9,52
B 58	Le assicurazioni	—	—	—	11,10	4,76
B 77	Quanto si deve sapere del codice di commercio	5,26	—	—	5,55	19,04
B 108	Nozioni di legislazione tributaria	5,26	—	—	—	14,28
19) <i>Geografia</i>						
A 16	Il mondo polare	36,82	30,30	21,42	16,65	23,80
A 42	Etiopia ed Etiopi	10,52	12,12	7,14	—	14,28
A 75	I cieli	—	—	—	16,65	19,04
A 78	Il mare nella natura	—	3,03	—	16,65	14,28
A 108	Albania. Il paese e le genti	—	9,09	14,28	5,55	14,28
B 2	Geografia astronomica	10,52	15,15	28,56	11,10	19,04
B 30	Le meraviglie del mondo stellare	26,30	12,12	21,42	22,20	42,84
B 63	Attraverso l'Europa	21,04	6,06	7,14	11,10	14,28
B 94	Attraverso i continenti	26,30	12,12	7,14	11,10	14,28
B 119	L'Asia	26,30	15,15	14,28	33,30	23,80

N. di presentazione e categoria di interessi	Titoli dei libri	Età dei soggetti (in anni)				
		11-12	13	14-15	16-20	21-32
20) <i>Morale</i>						
A 8	L'azione più generosa	—	3,03	7,14	11,10	9,52
A 45	Il tesoro dei poveri	10,52	—	—	5,55	23,80
A 70	Il cammino che porta alla verità	—	—	—	16,65	19,04
A 90	La colpa e il perdono	—	6,06	—	16,65	4,76
A 125	Il diritto trionfa sull'ingiustizia	5,26	18,18	7,14	38,85	19,04
B 5	Virtù nascosta	—	—	—	11,10	14,28
B 42	Carità	—	3,03	7,14	5,55	—
B 72	L'onestà è una guida sicura	—	9,09	7,14	5,55	23,80
B 82	La vera felicità	5,26	3,03	7,14	16,65	23,80
B 104	Ciò che la vita mi ha insegnato	—	—	6,06	27,75	47,60
21) <i>Letteratura</i>						
A 12	F. Petrarca: « Il Canzoniere »	—	—	7,14	11,10	19,04
A 30	D. Alighieri: « Rime Scelte »	5,26	3,03	—	11,10	14,28
A 73	Berchet: « Liriche »	—	—	—	16,65	—
A 86	U. Foscolo: « Poesie »	—	3,03	14,28	16,35	28,56
A 109	G. Carducci: « Prose »	10,52	—	7,14	11,10	28,56
B 24	« Antologia Leopardiana »	5,26	6,06	—	22,20	33,32
B 41	A. Manzoni: « I Promessi Sposi »	15,78	33,33	49,08	16,65	23,80
B 62	G. Parini: « Le Odi »	5,26	—	7,14	—	19,04
B 88	G. Prati: « Liriche »	5,26	—	—	—	19,04
B 107	G. D'Annunzio: « Liriche »	—	6,06	3,03	5,55	9,52
22) <i>Lavoro</i>						
A 19	Mani operose	—	3,03	—	—	9,52
A 33	Ore di lavoro	5,26	—	—	5,55	23,80
A 58	Tutti lavorano	—	—	14,28	5,55	14,28
A 82	Massaie	—	3,03	7,14	—	4,76
A 113	I mestieri più umani	—	—	—	22,20	23,80
B 12	Mestieri ambulanti	—	3,03	7,14	5,55	9,52
B 39	Il lavoro e la sua funzione sociale ..	—	—	—	27,75	38,08
B 69	Il lavoro attraverso i secoli	5,26	—	—	11,10	38,08
B 84	Sei adatto per il tuo lavoro?	5,26	9,09	14,28	55,50	61,88
B 103	L'officina	5,26	6,06	3,03	5,55	9,52
23) <i>Salute</i>						
A 9	Microbi, malattie infettive e disinfe- zioni	10,52	6,06	14,28	22,20	23,80
A 35	La salute dell'operaio	—	3,03	—	5,55	19,04
A 63	Il cuore: come si ammalava e come si cura	—	3,03	7,14	16,65	28,56
A 76	L'apparato respiratorio	—	—	7,14	—	19,04
A 111	L'assistenza del malato in famiglia ..	—	3,03	—	16,65	4,76
B 10	Medicina e chirurgia d'urgenza	15,78	3,03	21,42	30,30	23,80
B 46	Ginnastica medica applicata	5,26	—	7,14	38,85	23,80
B 55	Il corpo umano	5,26	3,03	14,28	16,65	28,56
B 76	Nozioni di igiene	5,26	3,03	—	33,30	19,04
B 109	Parassiti animali dell'uomo	10,52	—	—	—	14,28

N. di presentazione e categoria di interessi	Titoli dei libri	Età dei soggetti (in anni)				
		11-12	13	14-15	16-20	21-32
24) <i>Arte</i>						
A 11	Storia della pittura italiana	5,26	3,03	28,56	22,20	33,32
A 40	Poeti italiani del Rinascimento e dell'età moderna	5,26	6,06	14,28	16,65	28,56
A 62	Storia della musica	—	—	—	44,40	52,36
A 96	Nozioni di pittura	5,26	3,03	—	22,20	23,80
A 117	Il ricamo nella storia e nell'arte	—	—	—	5,55	9,52
B 16	Poeti italiani contemporanei	15,78	3,03	14,28	27,75	42,84
B 37	Studio del disegno animato	—	6,06	—	27,75	19,04
B 70	Storia dell'arte	—	6,06	7,14	33,30	28,56
B 86	Artisti e scrittori del '500	5,26	—	—	22,20	9,52
B 110	L'arte del disegno	5,26	6,06	21,42	33,30	19,04
25) <i>Interessi sociali</i>						
A 7	L'uomo e la società	—	3,03	—	33,30	80,92
A 47	La missione della donna	—	3,03	7,14	5,55	28,56
A 66	La famiglia e lo Stato	—	—	7,14	33,30	52,36
A 77	L'educazione dei figli	—	—	7,14	11,10	57,12
A 123	Problemi di vita sociale	—	15,15	—	27,75	57,12
B 1	Tutti per uno, uno per tutti	26,30	30,30	35,70	16,65	9,52
B 33	Diritti e doveri	—	—	—	22,20	38,08
B 74	L'assistenza ai minorati	5,26	—	—	22,20	4,76
B 98	La redenzione dei carcerati	—	—	6,06	22,20	28,56
B 117	Igiene sociale	—	3,03	—	11,10	23,80

c) Una temporanea diminuzione a livello dei 13 anni, con una successiva intensa ripresa, degli interessi artistici. Mentre gli interessi sociali presentano un incremento notevole anche dopo il 20° anno di età, per quelli artistici il livello raggiunto a tale età si mantiene pressochè costante negli anni successivi.

d) Un livello quasi costante per quanto riguarda gli interessi alla novellistica, all'agrararia e alla geografia.

e) Una brusca caduta dopo i 15 anni degli interessi per le avventure e per la storia patria, interessi che dominano fino a tale età.

f) Una accentuata involuzione dopo il 21° anno degli interessi inerenti alle attività sportive e alla vita militare.

g) Un lieve aumento fino al 15° anno, con successiva rapida diminuzione, degli interessi per le applicazioni elettro-meccaniche.

h) Un netto parallelismo nell'evolversi degli interessi per le storie fantastiche e di quelli per le storie misteriose, con un accentuarsi di essi al 13° anno ed al 16° anno.

i) Un costante decremento degli interessi alle biografie, con un brusco incremento dal 14° al 15° anno.

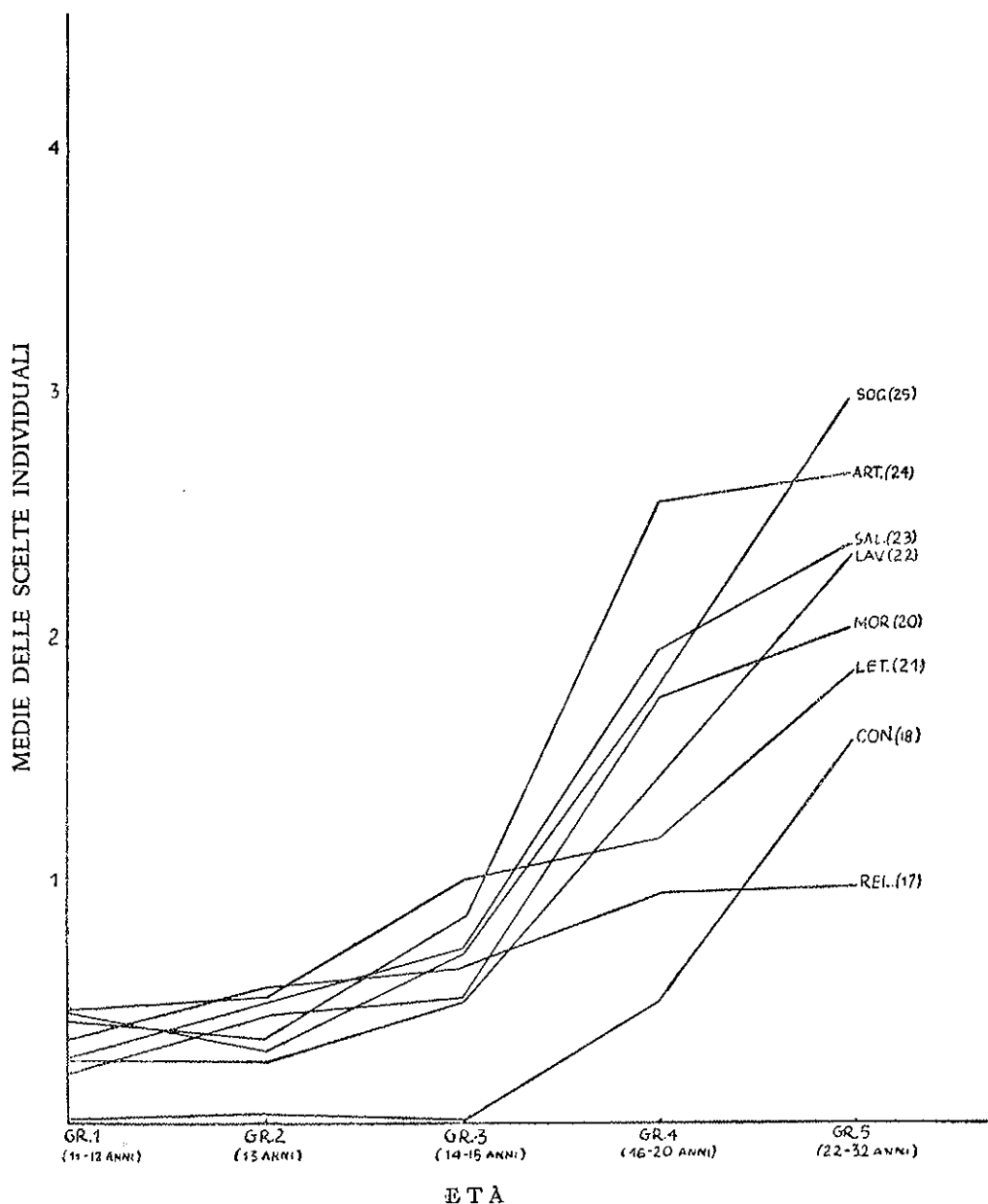


GRAFICO n. 1: Evoluzione degli interessi in funzione dell'età.

Passando a considerare gli interessi particolari di ogni singolo gruppo, (v. grafico n. 3) si può osservare quanto segue: il primo gruppo (11-12

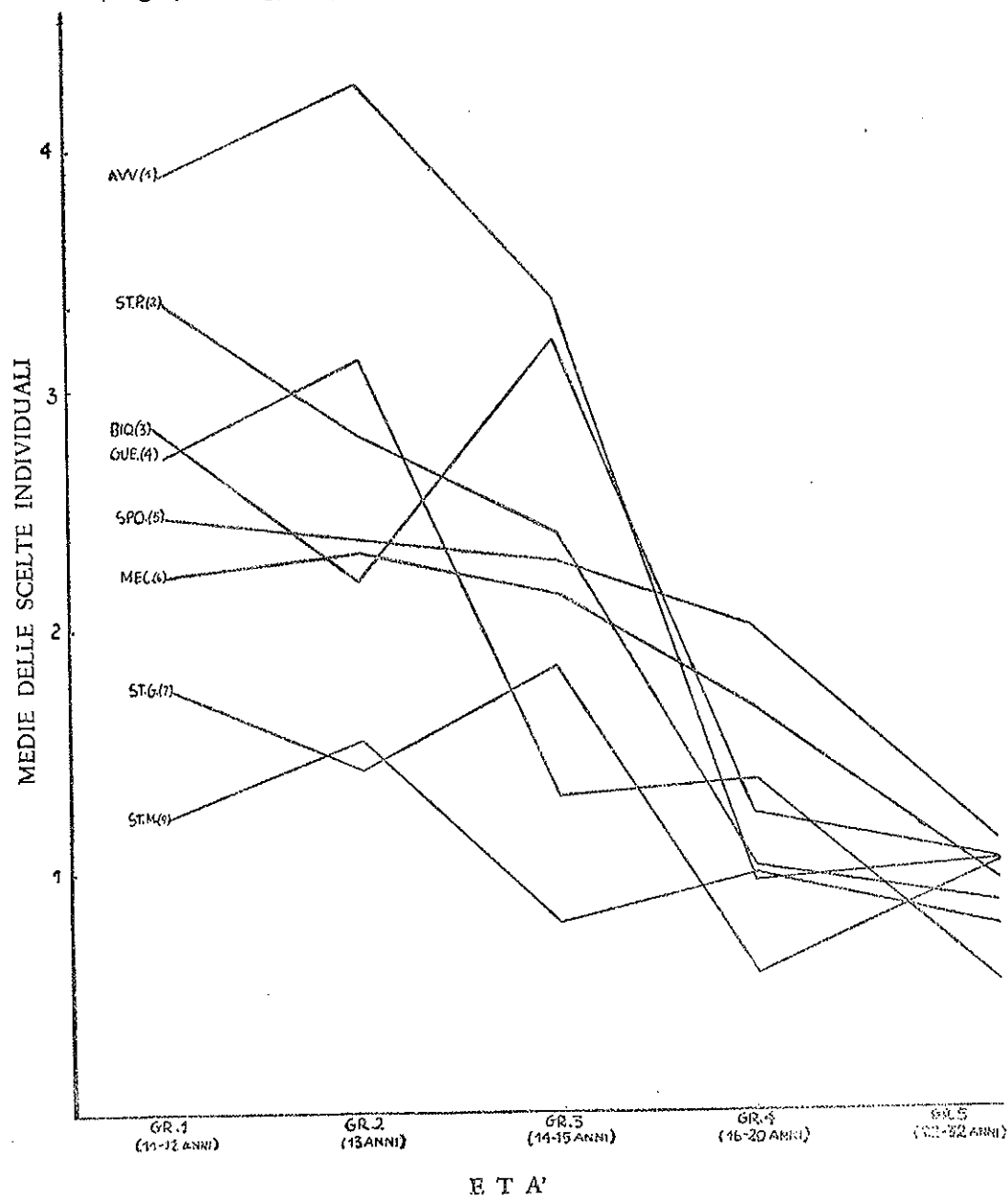


GRAFICO n. 2: Involuzione degli interessi con l'età.

anni) si interessa soprattutto alle biografie, alla storia patria, alle avventure, allo sport, alla vita militare ed alle applicazioni meccaniche. Lo stesso dicasi per i due gruppi compresi tra il 13° e il 15° anno eccezion fatta per gli interessi militari che rivelano una netta diminuzione verso il 15° anno.

Il 4° gruppo (16-20 anni) presenta interessi prevalenti per le scienze morali e sociali, per il lavoro e la tecnica in genere e per le attività artistiche e letterarie.

Il 5° gruppo infine (21-32 anni) presenta interessi spiccati per la letteratura, l'arte, le scienze morali, sociali e del lavoro, per la geografia, per l'igiene e per le scienze economiche.

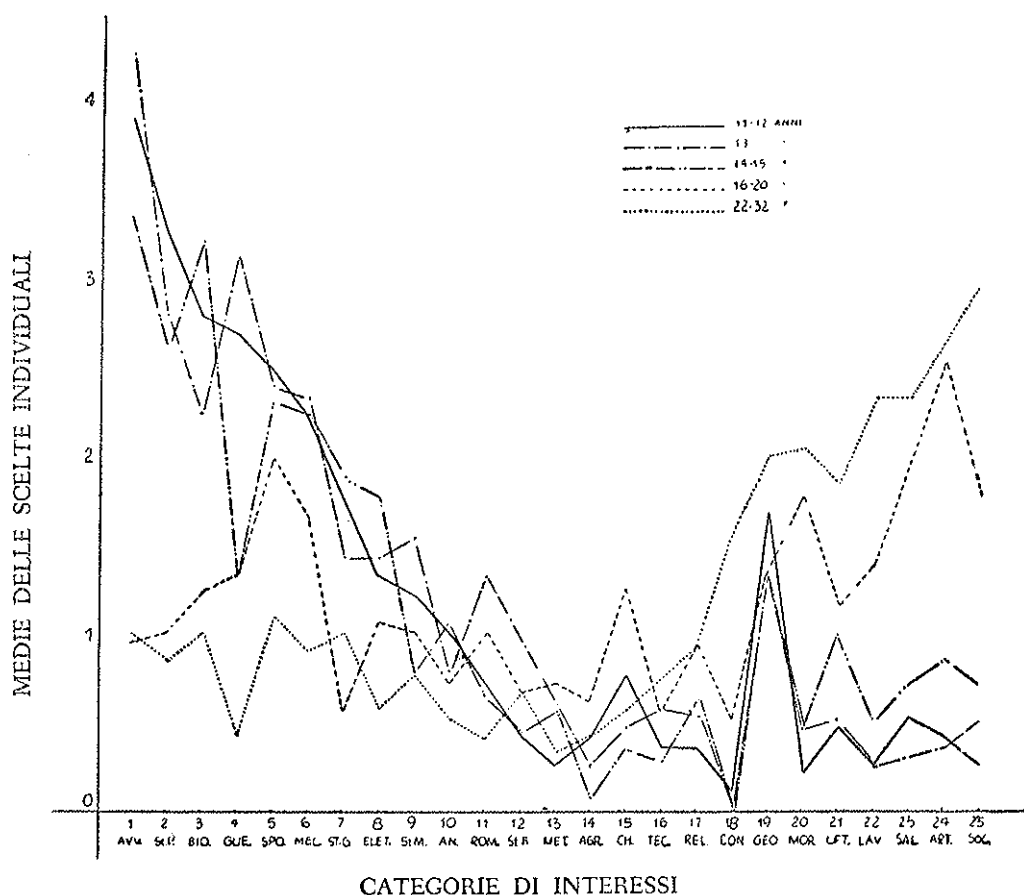


GRAFICO n. 3: *Interessi relativi ai gruppi di età considerati.*

Complessivamente si può notare un netto parallelismo fra i primi tre gruppi (11-15 anni) e fra i restanti gruppi (16-32 anni). Si può perciò concludere che verso i 15-16 anni si ha un radicale cambiamento nel comportamento degli interessi.

La concordanza fra le due sezioni del reattivo è calcolata mediante la formula:

$$C \% = \frac{100 C}{30 N}$$

in cui:

C = numero delle scelte concordanti nelle due sezioni;

N = numero dei soggetti esaminati.

Il valore (C %), così calcolato, rappresenta la percentuale delle prove concordanti per le due sezioni ed esprime l'indice di attendibilità del reattivo. Nel mio caso ho ottenuto il 70% di concordanza.

TABELLA II. — *Medie delle scelte individuali per i vari livelli di età.*

Categorie di interessi		ETÀ (in anni)				
		11-12	13	14-15	16-20	21-32
1. Biografie	Bio.	2,789	2,193	3,214	1,222	1
2. Letteratura	Let.	0,473	0,516	1	1,166	1,857
3. Storia generale	St.G.	1,736	1,419	1,857	0,555	1
4. Storia patria	St.P.	3,367	2,806	2,428	1	0,857
5. Romanzi	Rom.	0,736	1,032	0,642	1	0,428
6. Storie fantastiche	St.F.	0,421	0,967	0,428	0,666	0,666
7. Storie misteriose	St.M.	1,210	1,548	0,785	1	0,751
8. Arte	Art.	0,421	0,354	0,857	2,555	2,666
9. Religione	Rel.	0,368	0,548	0,642	0,944	0,952
10. Morale	Mor.	0,210	0,451	0,500	1,777	2,047
11. Interessi sociali	Soc.	0,268	0,516	0,714	1,777	3
12. Lavoro	Lav.	0,268	0,258	0,500	1,388	2,333
13. Geografia	Geo.	1,689	1,258	1,285	1,333	2
14. Avventure	Avv.	3,804	4,258	3,357	0,944	1
15. Sport	Spo.	2,473	2,387	2,285	2	1,095
16. Guerra	Gue.	2,689	3,129	1,285	1,333	0,428
17. Salute	Sal.	0,526	0,290	0,714	1,944	2,333
18. Animali	An.	1,052	0,774	1,071	0,722	0,523
19. Agraria	Agr.	0,421	0,258	0,071	0,611	0,428
20. Chimica	Ch.	0,789	0,483	0,357	1,277	0,571
21. Eletticità	El.	1,315	1,419	1,785	1,055	0,571
22. Meccanica	Mec.	2,210	2,322	2,214	1,666	0,904
23. Metallurgia	Met.	0,268	0,612	0,571	0,722	0,333
24. Tecnologia	Tec.	0,368	0,580	0,285	0,555	0,751
25. Contabilità	Con.	0,105	0,032	0	0,500	1,571

Ciò sta a significare che la scelta non è stata determinata tanto dallo specifico contenuto cui ciascun titolo si riferisce, quanto dalla materia inerente a tale contenuto.

NOTA BIBLIOGRAFICA

- BAUMGARTEN F., *Orientation et sélection professionnelles par l'examen psychologique du caractère* (trad. di B. Lahy), Paris, 1949.
- BRAINARD P. P. e STEWART, *Manual of Instructions for Specific Interest Inventories*, New York, 1932.
- HEPNER A. W., *Psychology applied to life and work*, New York, 1950.
- STRONG E. K., *Vocational Interests of Men and Women*, Stanford University, 1943.
- WIGHTWICK M. I., *Vocational Interest Patterns*, in: « Teachers College Contributions to education », 900, 1945.

PROPRIETÀ DELLE STRUTTURE ELASTOPLASTICHE NELLO SPAZIO DELLE IPERSTATICHE (*)

(Con cinque figure)

LEO FINZI

SYMMARIUM. — Auctor enucleat proprietates cuiusdam geometricae repraesentationis, a se propositae, quae idonea est ad determinandum statum contentionis et statum deformationis in structura quae sit perfecte elastoplastica; huius autem repraesentationis praecipuam ostendit utilitatem in structuris continuis monodimensionalibus computandis.

Per determinare lo stato di sforzo e di deformazione in strutture reticolari elastoplastiche caricate ai nodi mi sono valso in recenti ricerche ⁽¹⁾ di uno spazio rappresentativo particolarmente conveniente: è uno spazio che ha tante dimensioni quante sono le iperstatiche, ad ogni punto del quale, entro un determinato campo, corrisponde uno stato di sforzo e di deformazione.

Mostro in questa Nota come tale spazio offra una suggestiva rappresentazione geometrica del principio di HAAR-von KARMAN nonché di quello di GREENBERG.

Inoltre, poichè questo spazio ha un numero di dimensioni che dipende solo dal numero delle iperstatiche, qualunque sia quello delle aste, esse si presta particolarmente allo studio di strutture con gran numero di aste e con due o tre iperstatiche, perchè in questo caso lo spazio rappresentativo diventa semplicemente il piano o lo spazio tridimensionale, mentre invece lo spazio rappresentativo di PRAGER ⁽²⁾,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Carlo Somigliana il 16 febbraio 1953.

(1) L. FINZI, *Sforzi e deformazioni nelle strutture reticolari elastoplastiche*. «Rend. Ist. Lomb. Scien. e Lett.», vol. LXXXV, 1952.

(2) W. PRAGER, «Jour. Aeron. Scien.», vol. 15, n. 6, 1948.

che ha tante dimensioni quante sono le aste, è un iperspazio a un gran numero di dimensioni.

Al limite, per una struttura continua monodimensionale lo spazio di PRAGER ha infinite dimensioni e diviene uno spazio funzionale, mentre lo spazio rappresentativo proposto ha ancora due o tre dimensioni se due o tre sono le iperstatiche.

A questo caso limite dedico l'ultima parte di questa Nota.

§ 1. — LO SPAZIO DELLE IPERSTATICHE. — Nelle ricerche precedenti ho considerato una generica struttura reticolare caricata ai nodi da carichi P_j , composta di n aste perfettamente elastoplastiche.

Ho riguardato m delle n aste come iperstatiche e, detti X_1, X_2, \dots, X_m gli sforzi corrispondenti, ho espresso gli sforzi N_s nelle aste non sovrabbondanti in funzione dei carichi P_j e delle iperstatiche X_i mediante le seguenti $n-m$ equazioni di equilibrio:

$$[1] \quad N_s = \sum_1^m a_{is} X_i + \sum_j a'_{sj} P_j \quad (s = 1, 2, \dots, n-m)$$

Interpretando le iperstatiche X_i come coordinate cartesiane ortogonali di un punto di uno spazio a m dimensioni è possibile, attraverso alle [1], far corrispondere ad ogni punto R di tale spazio uno stato di sforzo equilibrato nella struttura.

Tale spazio rappresentativo dirò brevemente *spazio delle iperstatiche*.

Quando poi si impongano allo sforzo in ogni asta le condizioni di plasticità, ecco che diviene possibile nello spazio delle iperstatiche delimitare una regione cui corrispondano stati di sforzo non soltanto equilibrati ma anche plasticamente possibili.

Ho mostrato come tale regione sia un poliedro convesso che ho denominato *campo degli sforzi*.

La condizione di plasticità per ogni asta sarà tradotta da relazioni del tipo:

$$[2] \quad |N_s| \leq \bar{N} \quad (s = 1, 2, \dots, n-m); \quad |X_i| \leq \bar{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

essendo \bar{N}_s e \bar{X}_i gli sforzi limiti, noti a priori in base alle caratteristiche fisiche delle aste, cui corrisponde il sopravvenire di una perfetta plasticità.

Si osservi come lo spazio delle iperstatiche sia un particolare sottospazio coordinato dello spazio di PRAGER, ogni punto del quale ha come coordinate cartesiane ortogonali gli sforzi $X_1, X_2, \dots, X_m, N_1, N_2, \dots, N_{m-n}$ in tutte le n aste iperstatiche o no, e si osservi pure che il campo degli sforzi può pensarsi come la proiezione sul sottospazio X_1, X_2, \dots, X_m dell'intersezione del parallelepipedo snervamento definito dalle [2] con il sottospazio di equilibrio definito dalle [1].

§ 2. - DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO E DI DEFORMAZIONE. - Lo stato di deformazione nasce dal sovrapporsi di una parte elastica direttamente proporzionale agli sforzi, e pertanto nota quando questi siano noti, e di una parte dovuta al sopravvenire della plasticità.

Le equazioni di congruenza forniscono ulteriori condizioni per determinare lo stato di sforzo e di deformazione corrispondente ad assegnati carichi. Esse sono del tipo:

$$[3] \quad \sum_1^n a_{sr} \Delta_r = \sum_1^m b_{si} X_i + \sum_j b'_{sj} P_j \quad (s = 1, 2, \dots, m)$$

dove Δ_r è il cedimento plastico dell'asta r e a_{sr}, b_{si}, b'_{sj} sono coefficienti costanti e $b_{si} = b_{is}$.

Quando i carichi non hanno provocato al loro sopraggiungere la plasticizzazione di alcuna asta, i cedimenti Δ_r sono nulli ed è sufficiente imporre le condizioni di congruenza [3] (con $\Delta_r = 0$) per individuare nel campo degli sforzi il punto R che con le sue coordinate fornisce lo stato di sforzo effettivo.

Di qui, essendo note le caratteristiche elastiche di ogni asta, si risale facilmente allo stato di deformazione.

Nel caso invece in cui siano in atto o peggio siano e siano stati in atto incogniti cedimenti plastici Δ_r in alcune aste, le [3] da sole non permettono la determinazione del punto R che definisce lo stato di sforzo.

Per giungervi è necessario imporre ulteriori condizioni.

Particolarmente adatte allo spazio rappresentativo adottato si mostrano quelle tradotte dai principi di HAAR-VON KARMAN ⁽¹⁾ e di GREENBERG ⁽²⁾.

Il principio di HAAR-VON KARMAN afferma che: « nell'ipotesi che per nessuna asta abbia a verificarsi una fase di scarico, l'energia di deformazione calcolata per gli effettivi valori delle tensioni è più piccola di quella calcolabile in base ad ogni altro complesso di tensioni che sia in equilibrio con le forze esterne e compatibile con le leggi di plasticità ».

In altre parole: « il punto R rappresentativo dello stato di sforzo effettivo è quello, tra quanti appartengono al campo degli sforzi cui corrisponde la minima energia di deformazione ».

Il principio di GREENBERG non va soggetto alla restrizione che in alcuna asta abbiano a verificarsi ritorni ed afferma che: « per una data variazione dei carichi, la variazione di energia elastica calcolata in base all'effettiva variazione degli sforzi è più piccola di quella calcolabile per ogni altra variazione di sforzo che sia compatibile con le condizioni di plasticità e in equilibrio con la data variazione dei carichi ».

In altre parole: « al variare dei carichi il campo C degli sforzi si trasforma nel campo C'. Corrispondentemente il punto R rappresentativo dello stato di sforzo si muove fino a raggiungere il nuovo campo nel punto R'. R' è il punto del campo C' per raggiungere il quale da R è stata necessaria la minima variazione dell'energia interna ».

Con uno dei due principi citati, operando nello spazio delle iperstatiche e dopo aver tracciato il campo degli sforzi, è possibile con semplici procedimenti geometrici che illustrerò tra poco individuare il punto R rappresentativo dello stato di sforzo e risalire poi allo stato di deformazione.

Fin qui, per generalità, abbiamo parlato di un sistema con un numero qualsivoglia di iperstatiche. D'ora in poi per rendere più agevole l'intuizione e più semplice la trattazione analitica, faremo riferimento a un sistema avente ancora un numero qualsivoglia di aste ma con due iperstatiche sicchè lo spazio delle iperstatiche diventi un piano e il campo degli sforzi un poligono convesso.

(1) Cfr. W. PRAGER, loco citato.

(2) H. J. GREENBERG, « Quart. Appl. Math. », 1949, pag. 85.

§ 3. - LINEE ISOENERGETICHE NEL PIANO DEGLI SFORZI. - Consideriamo ora nel piano delle iperstatiche X_1 e X_2 il luogo dei punti per cui è stazionaria (minima) l'energia di deformazione.

Esso sarà individuato dal sistema:

$$[4] \quad \frac{\partial E}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial X_2} = 0.$$

Osserviamo ora che l'energia di deformazione E dipende dai carichi e dalle iperstatiche mediante la relazione

$$[5] \quad E = \frac{1}{2} \sum_{rs} b_{rs} X_r X_s + \sum_{rj} b'_{rj} X_r P_j + \frac{1}{2} \sum_{jk} b''_{jk} P_j P_k$$

dove i coefficienti b''_{jk} sono costanti strutturali come quelle b_{rs} , b'_{rj} , già introdotte.

Nel caso nostro per una struttura due volte iperstatica:

$$[5'] \quad E = \frac{1}{2} (b_{11} X_1^2 + 2b_{12} X_1 X_2 + b_{22} X_2^2) + \\ + X_1 \sum_j b'_{1j} P_j + X_2 \sum_j b'_{2j} P_j + \frac{1}{2} \sum_{jk} b''_{jk} P_j P_k$$

In tali condizioni le [4] si scrivono:

$$[4'] \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial X_1} = b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \sum_j b'_{1j} P_j = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial X_2} = b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + \sum_j b'_{2j} P_j = 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che i carichi P_j varino proporzionalmente e gradualmente cosicchè sia:

$$[6] \quad P_j = \alpha_j P$$

Per P variabile gradualmente e α_j costante.

In queste ipotesi le [4'] assumono la forma:

$$[4''] \quad \begin{cases} b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + P \sum_j b'_{1j} \alpha_j = 0 \\ b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + P \sum_j b'_{2j} \alpha_j = 0 \end{cases}$$

Le [4''] sono le equazioni parametriche di una retta che ho chiamato *retta elastica* e ho indicato con r , e che ora chiamerò r_0 .

Questa retta passa per l'origine e i suoi punti danno gli stati di sforzo che si avrebbero per determinati carichi in assenza di cedimenti plastici.

Eliminando dalle [4''] il parametro P l'equazione della retta elastica può anche essere scritta nella forma:

$$[7] \quad X_2 = \frac{b_{11} \sum_j b'_{2j} \alpha_j - b_{12} \sum_j b'_{1j} \alpha_j}{b_{22} \sum_j b'_{1j} \alpha_j - b_{12} \sum_j b'_{2j} \alpha_j} X_1$$

Ad un dato valore di P corrisponde, mediante la [4''], un determinato punto Q di coordinate X_1^0 e X_2^0 sulla retta elastica r_0 .

Tra tutti i punti del piano X_1, X_2 , Q è quello per cui è minima l'energia di deformazione.

Diciamo E_0 il valore dell'energia di deformazione corrispondente al punto Q e osserviamo che la [5] può porsi nella forma:

$$[5''] \quad E = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{rs} b_{rs} (X_r - X_r^0) (X_s - X_s^0)$$

tenuto conto che dalle [5'] e [4'] risulta:

$$[8] \quad E_0 = \frac{1}{2} \sum_{jk} b''_{jk} P_j P_k - \frac{1}{2} \sum_{rs} b_{rs} X_r^0 X_s^0$$

Consideriamo le linee di livello dell'energia di deformazione.

Queste linee isoenergetiche saranno caratterizzate dall'equazione:

$$[9] \quad E = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{rs} b_{rs} (X_r - X_r^0) (X_s - X_s^0) = \bar{E}$$

Queste linee sono ellissi aventi centro Q e sono reali solo per $\bar{E} > E_0$.

Tutte le ellissi ottenibili dalla [9] sono simili. La loro forma (rapporto tra i semiassi) e il loro orientamento non varia al variare di E_0 e quindi del punto Q e dei carichi P_j .

L'area di ogni ellisse è proporzionale a $\bar{E} - E_0$ cioè alla differenza tra il livello energetico corrispondente all'ellisse e quello minimo possibile.

§ 4. - RAPPRESENTAZIONE DEI CEDIMENTI PLASTICI NEL PIANO DELLE IPERSTATICHE. - Nelle precedenti ricerche ho constatato che, se facciamo variare il cedimento plastico Δ_s dell'asta s esima lasciando inalterati tutti gli altri cedimenti plastici, le equazioni di congruenza [3],

per un assegnato valore dei carichi P_j , individuano nel piano delle iperstatiche tanti punti rappresentativi dei vari stati, e tutti questi punti si trovano su una retta, che diremo r_s ⁽¹⁾, la cui direzione non dipende dai carichi P_j .

L'equazione di questa retta si ottiene eliminando Δ_s fra le due equazioni lineari di congruenza.

In particolare se tutti i cedimenti plastici sono nulli tranne il cedimento Δ_s , la retta r_s deve passare per il punto Q della retta elastica. Questo diviene pertanto il centro di un fascio costituito da tante rette quante sono le aste componenti la struttura.

L'ellisse di equazione [9] è particolarmente interessante perchè permette di individuare la direzione delle rette r_s quando sia noto il campo degli sforzi.

Ho mostrato infatti che le rette limiti del campo $|N_s| = \bar{N}_s$ e le rette r_s relative ad una medesima asta hanno direzioni coniugate rispetto all'ellisse di equazione [9].

Appunto per tale ragione ho chiamato quest'ellisse *prima ellisse dei cedimenti plastici*.

Se ora consideriamo due punti A e B appartenenti ad una stessa retta r_s , è possibile anche misurare l'entità del cedimento plastico necessario per passare, nel rispetto dell'equilibrio e della congruenza, dall'uno all'altro.

Ho infatti mostrato che il cedimento Δ_s corrispondente è misurato dal rapporto fra il segmento AB e $D_s m_s$, essendo D_s il semidiametro parallelo alla retta r_s di una seconda ellisse che ho appunto chiamato *seconda ellisse dei cedimenti plastici*, mentre m_s è una costante (modulo dell'asta) che vale:

$$[10] \quad m_s = \sqrt{a_{1s}^2 + a_{2s}^2} \quad (2)$$

formata coi coefficienti costanti a_{is} definiti precedentemente.

La seconda ellisse dei cedimenti plastici ha per equazione:

$$[11] \quad \sum_{r,s}^2 c_{rs} X_r X_s = 1 \quad \text{per } c_{rs} = c_{sr} = \sum_m^2 b_{rm} b_{sm}$$

(1) Nelle Note precedenti era stata indicata con Δ_s .

(2) Dovendo in questa Nota considerare dei momenti che indico con M i moduli sono contrassegnati con m , invece che con M come nella Nota citata.

Dunque:

$$B - A = m_s \Delta_s \vec{D}_s$$

Passiamo ora da un punto A a un punto B non appartenenti ad una medesima retta r_s , mediante due o più cedimenti plastici.

Data la linearità delle equazioni [3], potremo sempre pensare che i cedimenti avvengano successivamente, cosicchè il vettore $B - A$ potrà riguardarsi come somma di più vettori ognuno diretto come una retta r_s . Il modulo di tali vettori sarà proporzionale al cedimento plastico corrispondente e il coefficiente di proporzionalità sarà $D_s m_s$. Dunque:

$$B - A = \sum_s m_s \Delta_s \vec{D}_s$$

§ 5. - DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO E DI DEFORMAZIONE CON IL PRINCIPIO DI HAAR-VON KARMAN. - Consideriamo una struttura reticolare composta di n aste, due volte iperstatica e soggetta ad assegnati carichi P_i . Supponiamo i carichi applicati gradualmente e proporzionalmente e supponiamo altresì che durante l'applicazione dei carichi nessuna asta abbia subito un ritorno in fase elastica.

In tal caso il principio di HAAR-VON KARMAN ci può consentire la determinazione dello stato di sforzo e di deformazione della struttura corrispondenti ai carichi P_i .

Potremo operare così:

a) scegliamo due aste qualsiasi come iperstatiche e diciamo X_1 e X_2 gli sforzi relativi;

b) valendoci delle equazioni di equilibrio [1] e delle condizioni di plasticità [2] tracciamo nel piano X_1, X_2 le coppie di rette che costituiscono il contorno del campo degli sforzi (vedi fig. 1);

c) individuato il campo, mediante le equazioni di congruenza [3] determiniamo (per tutti i $\Delta_r = 0$) il punto Q della retta elastica r_0 corrispondente alla minima energia di deformazione E_0 .

Se Q è interno al campo o sul contorno di questo le sue coordinate X_1 e X_2 danno i valori effettivi delle iperstatiche.

Quello di deformazione è caratterizzato da cedimenti plastici nulli.

d) Se il punto Q cade fuori del campo degli sforzi, da Q spicchiamo le ellissi isoenergetiche [9]. Esse raggiungeranno il campo in un punto R.

R individua l'effettivo stato di sforzo e di deformazione. Infatti le sue coordinate X_1 e X_2 danno gli effettivi valori delle iperstatiche e consentono quindi, per il tramite delle [1], di trovare gli sforzi in ogni asta. Quanto allo stato di deformazione esso è definito, avendo ormai calcolato gli sforzi nelle varie aste, quando siano noti i cedimenti plastici avvenuti.

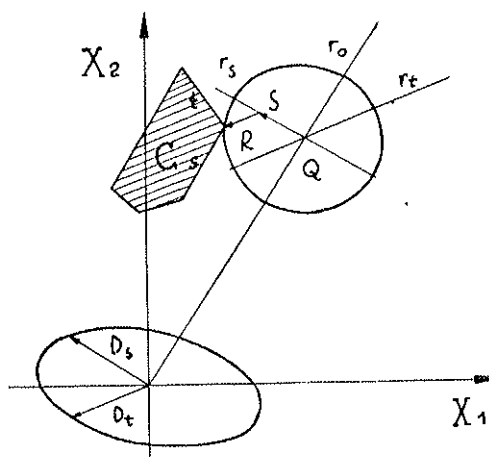


FIG. 1.

Ora, se l'ellisse isoenergetica è in R tangente a un lato campo d'equazione $|N_s| = \bar{N}_s$, il cedimento plastico avvenuto è uno solo, riguarda l'asta s e la sua entità è data dal segmento QR letto nella scala fornita dalla seconda ellisse di plasticità.

Se si vuole: $\Delta_s = |R - Q|/D_s m_s$.

Supponiamo invece, come in figura, che l'ellisse isoenergetica tocchi il campo in un punto R che è vertice del poligono limite del campo. Sia tale vertice il punto di incontro di due delle rette di equazione $|N_s| = \bar{N}_s$, $|N_t| = \bar{N}_t$ relative alle aste s e t . In questo caso i cedimenti plastici avvenuti sono due, quelli relativi alle aste s e t .

Per determinarli è allora sufficiente raggiungere R da Q con due vettori di direzione r_s e r_t . I cedimenti plastici effettivi saranno dati da due segmenti in questione misurati ciascuno nella rispettiva scala fornita dalla seconda ellisse dei cedimenti plastici. E cioè, se

$R - Q = (S - Q) + (R - S)$ essendo $S - Q$ diretto come la r_s e $R - S$ diretto come la r_t , sarà:

$$\Delta_s = |S - Q| / D_s m_s, \quad \Delta_t = |R - S| / D_t m_t$$

§ 6. - DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO E DI DEFORMAZIONE CON IL PRINCIPIO DI GREENBERG. - Il principio di GREENBERG ripete in sostanza il principio di HAAR-VON KARMAN riferendosi però a variazioni δP dei carichi e alle corrispondenti variazioni δE dell'energia di deformazione.

In tali condizioni esso non è soggetto alla limitazione che il processo di carico nel suo insieme non comporti fasi di scarico (ritorno) per qualche asta.

Non è applicabile però per variazioni finite di carico ΔP se non quando si sappia che nell'intervallo ΔP non vi sono ritorni perchè in corrispondenza di un ritorno cambia l'espressione dell'energia di deformazione.

Se allora per una struttura si verificano fasi di scarico per qualche asta, bisogna dividere il processo in tante fasi in ognuna delle quali non vi sono ritorni.

Per la prima fase si opera con il principio di HAAR-VON KARMAN come indicato al paragrafo precedente.

Si passa dalla prima alla seconda fase quando un'asta, ad esempio l'asta h torna elastica. In questa seconda fase potremo applicare il principio di GREENBERG come si è applicato il principio di HAAR-VON KARMAN nella prima fase, soltanto dovremo partire dallo stato raggiunto alla fine della prima fase: nella valutazione dei livelli energetici dovremo perciò considerare avvenuto e invariabile il cedimento Δ_h dell'asta tornata elastica.

Ciò equivale a ripetere il procedimento indicato al § 5 adottando però come retta elastica una retta r'_0 traslata di $m_h \Delta_h \vec{D}_h$ rispetto alla retta r_0 . Corrispondentemente il centro delle nuove ellissi isoenergetiche sarà in un punto Q' traslato di $m_h \Delta_h \vec{D}_h$ rispetto al corrispondente punto Q .

Individuato il punto R che dà lo stato di sforzo effettivo in questa seconda fase come punto di tangenza delle ellissi isoenergetiche di centro Q' col campo, anche lo stato di deformazione è completamente

individuato dal vettore $Q' - Q$ che è proporzionale al cedimento Δ_h , e dall'altro o al più dagli altri due $m_s \Delta_s \vec{D}_s$ e $m_t \Delta_t \vec{D}_t$ che da Q' conducono in R e ottenibili come al paragrafo precedente.

Si passa dalla seconda fase a una eventuale terza e così via con criterio perfettamente analogo.

§ 7. - DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO E DI DEFORMAZIONE IN STRUTTURE CONTINUE MONODIMENSIONALI. - Mostriamo ora come la rappresentazione geometrica proposta si presti particolarmente alla determinazione dello stato di sforzo e di deformazione in strutture continue monodimensionali.

Faremo riferimento a strutture per le quali, agli effetti del sopravvenire della plasticità, abbia influenza il solo momento flettente.

Questa ipotesi si adatta abbastanza bene ai problemi pratici più comuni ⁽¹⁾.

Riguarderemo la struttura come perfettamente elastoplastica e cioè: la variazione di curvatura $\frac{d\varphi}{dy}$ in ogni sezione di coordinata y è proporzionale al corrispondente momento flettente $M(y)$ fino a quando $|M(y)| \leq \bar{M}(y)$.

$\bar{M}(y)$ segna il limite di plasticità per la sezione di coordinata y e in questa fase la sezione si comporta come perfettamente elastica.

Lo sforzo non può crescere al di là del limite $\bar{M}(y)$ e al sopravvenire della plasticità si verificano tra le due facce di una sezione delle rotazioni relative plastiche $\Delta(y)$, mentre il momento flettente mantiene il valore $\bar{M}(y)$ indipendente da $\Delta(y)$ ⁽²⁾.

Al diminuire del momento flettente si accompagna un ritorno in fase elastica.

⁽¹⁾ Quando anche lo sforzo assiale avesse una notevole influenza sul fenomeno plastico la trattazione che svolgeremo potrebbe essere ripresa tal quale apportandovi solo alcuni semplici adattamenti analoghi a quelli adottati da V. FRANCIOSI (*Sul calcolo a rottura delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico*, « Giorn. Gen. Civ. », fasc. 7-8, 1952).

⁽²⁾ La schematizzazione adottata non è affatto rigorosa, perchè, anche nell'ipotesi di perfetta plasticità di ogni fibra, la caratteristica sforzo-deformazione della sezione nel suo complesso è quella illustrata in fig. 2. Non si è però troppo lontani dal vero sostituendo il diagramma curvilineo con la spezzata tratteggiata in figura.

Per maggior chiarezza ci riferiremo a un caso concreto.

Considereremo pertanto una trave rettilinea incastrata agli estremi.

La trave sia omogenea e di sezione costante. Sia l la luce, J il momento di inerzia, E il modulo elastico, \bar{M} il momento limite uguale per tutte le sezioni.

Le trave sia soggetta ad un carico distribuito con la legge triangolare (vedi fig. 3) di valore complessivo P .

Poichè il carico è normale alla trave considerata, la struttura risulta due volte iperstatica. Come incognite iperstatiche potremo scegliere i valori del momento flettente in due sezioni qualsiasi.

Ad esempio potremo scegliere le sezioni C e D indicate in figura.

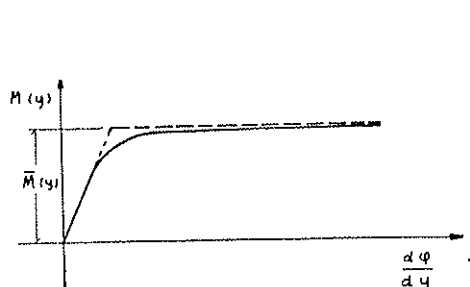


FIG. 2.

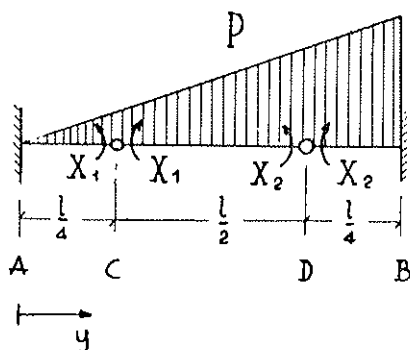


FIG. 3.

Diciamo X_1 e X_2 i momenti flettenti corrispondenti. In funzione di X_1 , di X_2 e di P è possibile esprimere il momento flettente $M(y)$ in una sezione generica di ascissa y .

Precisamente risulta, ponendo $z = \frac{y}{l}$:

$$[12] \quad M(y) = M(z) = \left(\frac{3}{2} - 2z\right) X_1 - \left(\frac{1}{2} - 2z\right) X_2 - \frac{Pl}{3} \left(z^3 - \frac{13}{16}z + \frac{3}{16}\right)$$

Risulta perciò, confrontando la [12] con la [1]:

$$[10'] \quad a_1(z) = \frac{3}{2} - 2z, \quad a_2(z) = -\frac{1}{2} + 2z$$

Se ora per ogni sezione di ascissa y poniamo la condizione di plasticità

$$[13] \quad |M(y)| = |M(z)| = \bar{M}$$

ecco che in corrispondenza di ogni valore di y , e quindi di z , la [13] tenuto conto della [12] che è una espressione lineare in X_1 e X_2 , individuerà una coppia di rette.

Tali coppie di rette sono tante quante sono le sezioni che compongono la trave e cioè infinite. Esse comunque invilupperanno il contorno di una regione del piano X_1, X_2 (il campo C degli sforzi) cui corrispondono stati di sforzo equilibrati e compatibili con le leggi di plasticità.

Determiniamo il contorno di tale regione.

La [13] si scinde nelle due:

$$[13'] \quad M(z) = \bar{M} \quad , \quad M(z) = -\bar{M}$$

Le rette che hanno per equazione la prima delle [13'] inviluppano la linea le cui equazioni parametriche si ottengono risolvendo rispetto a X_1 e X_2 il sistema:

$$[14] \quad M(z) = \bar{M} \quad ; \quad \frac{dM(z)}{dz} = \frac{d\bar{M}}{dz}$$

Di questa linea dovremo considerare soltanto l'arco $H_0 H_1$ delimitato dai punti di parametro $z=0$ e $z=1$, e, grazie alla prima delle [13'], il campo degli sforzi dovrà trovarsi tutto da una banda del contorno formato dall'arco $H_0 H_1$ e dalle rette h_0 e h_1 tangenti in questi due punti (vedi fig. 4).

Analogamente tenendo conto della seconda delle [13'], si trova che il campo deve trovarsi tutto da una banda del contorno formato da un arco $K_0 K_1$ (delimitato dai due punti di parametro $z=0$ e $z=1$) e dalle rette tangenti k_0 e k_1 in questi due punti.

Nel caso nostro le equazioni parametriche tratte dalle [14], essendo $\bar{M} = \text{costante}$, sono le seguenti:

$$[14'] \quad \begin{cases} X_1 = \bar{M} + P l \left(-\frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{192} \right) \\ X_2 = \bar{M} + P l \left(-\frac{2}{3} z^3 + \frac{3}{4} z^2 - \frac{9}{64} \right) \end{cases}$$

Ciò vuol dire che l'arco $H_0 H_1$ appartiene a una cubica. Alla stessa cubica traslata appartiene l'arco $K_0 K_1$.

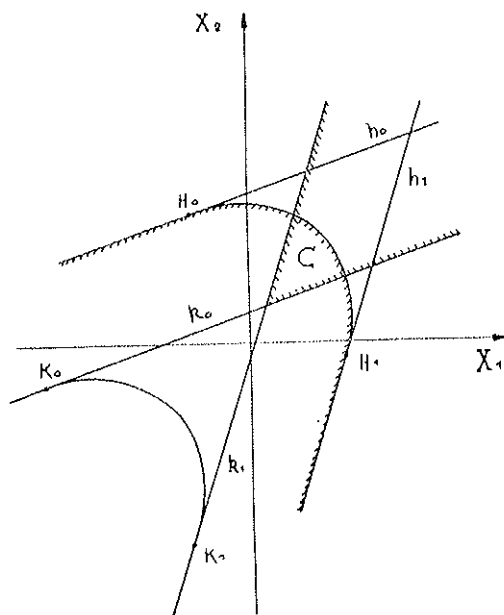


FIG. 4.

Consideriamo ora le equazioni di congruenza in assenza di cedimenti plastici. Esse sono due, tante quante sono le iperstatiche e si scrivono:

$$[15] \quad \begin{cases} \frac{7}{12} \frac{l}{EJ} X_1^0 - \frac{1}{12} \frac{l}{EJ} X_2^0 = \frac{Pl^2}{2880 EJ} \\ -\frac{1}{12} \frac{l}{EJ} X_1^0 + \frac{7}{12} \frac{l}{EJ} X_2^0 = \frac{29}{2880} \frac{Pl^2}{EJ} \end{cases}$$

Risolte rispetto ad X_1^0 e ad X_2^0 esse individuano nel piano delle iperstatiche in corrispondenza del valore stabilito per il carico P il punto Q di minima energia di deformazione E_0 mediante le sue coordinate X_1^0 e X_2^0 e conseguentemente (vedi fig. 5) la retta elastica r_0 . Risulta risolvendo il sistema [15]:

$$[16] \quad X_1^0 = \frac{9}{2880} Pl; \quad X_2^0 = \frac{51}{2880} Pl.$$

Confrontando le equazioni [15] con le [3], constatiamo inoltre che i coefficienti caratterizzanti le due ellissi di plasticità assumono nel

nostro caso i valori seguenti:

$$[17] \quad b_{11} = \frac{7}{12} \frac{l}{EJ}; \quad b_{12} = b_{21} = -\frac{1}{12} \frac{l}{EJ}; \quad b_{22} = \frac{7}{12} \frac{l}{EJ}$$

sicchè conseguentemente dallo [11]:

$$[18] \quad c_{11} = \frac{25}{72} \frac{l^2}{E^2 J^2}; \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{7}{72} \frac{l^2}{E^2 J^2}; \quad c_{22} = \frac{25}{72} \frac{l^2}{E^2 J^2}$$

Pertanto la prima ellisse di plasticità (che caratterizza i livelli dell'energia di deformazione e dà la corrispondenza tra rette limiti del campo e direzioni dei vettori rappresentativi dei corrispondenti cedimenti plastici) è caratterizzata dalla seguente equazione:

$$[19] \quad 7(X_1 - X_1^0)^2 - 2(X_1 - X_1^0)(X_2 - X_2^0) + 7(X_2 - X_2^0)^2 = \text{costante}$$

dove X_1^0 e X_2^0 assumono i valori [16].

La seconda invece, che consente la misura dei cedimenti plastici avvenuti, ha per equazione:

$$[20] \quad 25 X_1^2 - 14 X_1 X_2 + 25 X_2^2 = 72 \frac{E^2 J^2}{l^2}$$

Si noti che le due ellissi trovate hanno per assi le bisettrici degli assi coordinati, che sono orientate con l'asse maggiore lungo la bisettrice del primo quadrante e che il rapporto fra asse maggiore e asse minore vale $\sqrt{\frac{4}{3}}$ per la prima ellisse e $\frac{4}{3}$ per la seconda.

Dal punto Q trovato spieghiamo allora le ellissi isoenergetiche di equazione [19] fino a raggiungere il campo toccandolo nel punto R di coordinate X_1^R e X_2^R .

Introducendo nella [12] il valore delle iperstatiche trovate si ha lo stato di sforzo effettivo corrispondente al carico P, dopodichè si può determinare lo stato di deformazione.

La figura 5 illustra il procedimento nel caso in cui sia:

$$l = 400 \text{ cm}; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2; \quad J = 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^4;$$

$$\bar{M} = 5 \cdot 10^5 \text{ Kg cm}; \quad P = 18.000 \text{ Kg}.$$

Il campo si riduce al triangolo mistilineo C. Le ellissi isoenergetiche di centro Q raggiungono il campo nel punto R di coordinate $X_1^R = 62.400 \text{ kg cm}$, $X_2^R = 285.000 \text{ kg cm}$. In R sono plastiche le sezioni $z=0$ e $z=1$. I moduli di tali sezioni (per le [10] e [10']) valgono $m(0)=m(1)=\sqrt{10}/2$; mentre dalla figura risulta $D(0)=D(1)=160.10^5 \text{ kg cm}$.

Le rotazioni plastiche $\Delta(0)$ e $\Delta(1)$ sono individuate dai due vettori $R-S$ e $S-Q$ le cui direzioni sono date dalla prima ellisse di plasticità.

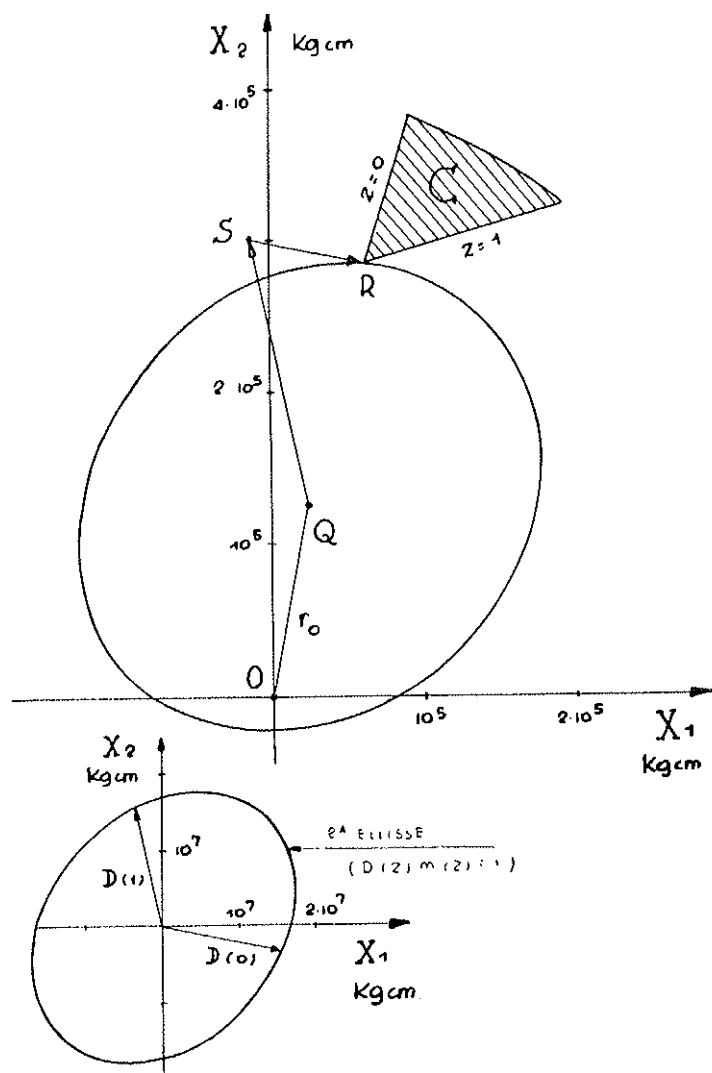


FIG. 5.

Esse valgono:

$$\Delta(0) = \frac{|R-S|}{D(0)m(0)} = 0,32 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta(1) = \frac{|S-Q|}{D(1)m(1)} = 0,70 \cdot 10^{-2}.$$



DIMOSTRAZIONE INTRINSECA DEL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH SOPRA UNA CURVA (*)

EDOARDO VESENTINI

SUMMARIVM. — Auctor per viam intrinsecam extruit, super algebricam curvam irreducibilem, seriem quae eundem habet ordinem eandemque dimensionem quam series canonica. Ex quo potest intrinsecus demonstrari theorema Riemann-Roch super curvam, vel per quasdam topologicas animadvertiones ab O. ZARISKI factas, vel per intrinsecum reductionis theorema quod F. SEVERI in fine huius Notae demonstrat.

In una recente Nota F. SEVERI [12] ⁽¹⁾, allo scopo immediato di ridurre al minimo i richiami di carattere proiettivo nella geometria sopra una curva algebrica, con lo scopo finale di « ulteriori avvicinamenti all'algebra astratta », cioè di consentire l'elaborazione d'una teoria geometrica dei corpi di funzioni algebriche definite sopra corpi numerici arbitrari, ha apportato alcune varianti al *metodo rapido* ([9]; [10], Cap. V, pag. 145-169), sostituendo un lemma proiettivo preliminare con proposizioni di carattere intrinseco.

Una delle questioni fondamentali per lo sviluppo ulteriore di questo nuovo indirizzo è costituita dalla dimostrazione, per via intrinseca, del teorema di Riemann-Roch. Una dimostrazione di questo tipo — oltre a quelle, di cui diremo nel n. 1, conseguite con i metodi della teoria aritmetica delle funzioni algebriche — è stata data da O. ZARISKI [18] mediante considerazioni di carattere topologico, e, come vedremo nel n. 2, tale dimostrazione potrebbe essere senz'altro inserita nella nuova trattazione di F. SEVERI, se, fra i fatti di indole proiet-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 23 aprile 1953.

(¹) I numeri in neretto entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

tiva ammessi validi da O. ZARISKI, non figurasse anche l'ipotesi relativa all'esistenza di almeno una serie lineare avente i caratteri (ordine e dimensione) della serie canonica ⁽¹⁾.

Nel presente lavoro elimineremo questa ipotesi costruendo una tale serie, sulla base delle premesse di F. SEVERI, con argomentazioni poggianti sulla teoria topologica delle corrispondenze algebriche. In tal modo, la questione posta da F. SEVERI appare risolta dalla dimostrazione di O. ZARISKI. Tuttavia le considerazioni che condurranno al risultato sopra detto permetteranno di adattare alla nuova trattazione della geometria sopra la curva, la vecchia dimostrazione del teorema di Riemann-Roch, data dal CASTELNUOVO sulla base di una formula di SCHUBERT.

Per raggiungere lo scopo prefissoci muoveremo (n. 2) dalle premesse di indole proiettiva poste alla base della Nota [12] (nn. 1, 2, pag. 143-145), ed il ricorso ad esse è lecito, in quanto il presente lavoro si propone appunto di inserirsi nella trattazione inaugurata da [12]. Alla scopo di esaminare tali premesse, nel n. 6 ne illustriamo brevemente i legami con la teoria delle funzioni razionali sulle superficie di Riemann, e nel n. 7 mostreremo come, utilizzando soltanto una parte di esse, si possa egualmente definire sopra la curva una serie lineare effettiva avente l'ordine delle serie canonica.

1. - Lo scopo propostosi dal SEVERI ([12], pag. 143) era già in parte raggiunto anche dal suo primitivo metodo rapido, il quale si è rivelato strumento di grande efficacia, permettendo a W. L. CHOW [4] di elaborare la teoria geometrica dei corpi di funzioni algebriche senza propositi completamente intrinseci, ma di dimostrare il teorema di Riemann-Roch per i corpi di funzioni algebriche aventi, come corpo delle costanti, un corpo perfetto. Una trattazione del caso in cui il corpo delle costanti è algebricamente chiuso trovasi anche in W. GRÖBNER [6] il quale però, per giungere ad una dimostrazione intrinseca del teorema di Riemann-Roch, ha dovuto introdurre l'*ipotesi* relativa

⁽¹⁾ Per completare la teoria intrinseca della Nota [12] col teorema di Riemann-Roch, basta un'ipotesi meno esigente di quelle di ZARISKI [18], o di GRÖBNER [6]. Si veda in proposito una Osservazione di F. SEVERI al n. 8 della presente Nota.

all'esistenza di almeno una serie lineare avente i caratteri della serie canonica. D'altra parte la sovrabbondanza di tale ipotesi è presumibile in quanto il teorema di Riemann-Roch, *insieme all'esistenza della classe canonica*, è stato acquisito per ogni corpo, K , di funzioni algebriche avente corpo delle costanti arbitrario, da F. K. SCHMIDT [13], mediante considerazioni aritmetiche ispirate alla classica memoria [5] di DEDEKIND e WEBER, o da A. WEIL [16] ⁽¹⁾, sulla base di una definizione astratta dei differenziali di certi sviluppi in serie di potenze dei multipli interi dei *divisori* di K .

Sulla memoria [5] torneremo nel n. 6 allo scopo di illustrare il significato delle premesse di carattere proiettivo di [12] e [18].

Avvertiamo fin d'ora che, ponendoci nell'ordine d'idee di [12] e [18], nel seguito considereremo soltanto il caso di funzioni algebriche definite sul corpo numerico complesso.

1. - Sia F. SEVERI [12] che O. ZARISKI [18] si basano su alcune proprietà elementari delle serie lineari sopra una curva algebrica irriducibile, C , proprietà che ritengono acquisite per via proiettiva. Quelle ammesse valide da F. SEVERI sono le seguenti.

a) Nozione di serie lineare g_n^r come insieme dei gruppi di livello di una combinazione lineare di funzioni razionali, definite sopra la curva C , aventi in comune un gruppo di livello. I gruppi di livello di C risultano dunque in corrispondenza proiettiva con i punti di uno spazio proiettivo complesso a r dimensioni.

Proprietà involutoria di una g_n^r . Nozione di serie lineare completa, relativo teorema di esistenza ed unicità, e, come conseguenza di questo, il teorema del resto nella forma invariante. Distinzione fra serie lineari semplici e composte.

b) Viene acquisito per via proiettiva il fatto che ogni g_n^r semplice ha un numero finito (≥ 0) di coppie neutre.

(1) Un'altra dimostrazione del teorema di Riemann-Roch — di cui siamo venuti a conoscenza solo allorché la redazione del presente lavoro era già ultimata — è stata data da A. WEIL nel suo libro *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Paris, Hermann 1948, Parte I, pag. 3-27, mediante la considerazione della varietà diagonale sulla varietà delle coppie di punti della curva data. L'esistenza di *divisori canonici* è ivi ottenuta in base ad un teorema di carattere algebrico stabilito in A. WEIL, *Foundations of algebraic geometry*, Am. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. XXIX, 1946, pag. 238-239.

c) Esistenza su C di (almeno) due serie lineari g_m e g_n , complete, aventi dimensioni > 1 , semplici, prive di punti fissi, individuate da due gruppi, privi di elementi comuni, costituiti, rispettivamente, da m e n punti semplici, distinti, di C .

Sulla base di tali premesse e senza altri riferimenti di carattere proiettivo, F. SEVERI ha dimostrato ([12], n. 6, pag. 149-150) che la differenza fra l'ordine e la dimensione di ogni serie lineare completa di C , avente l'ordine sufficientemente elevato, è eguale ad un medesimo intero non negativo, p , il quale risulta un invariante di C rispetto alle trasformazioni birazionali, e prende il nome di *genere* di C . Per p vale il seguente teorema ([12], n. 5, pag. 149):

α) n ($\geq p$) punti semplici distinti di C individuano una serie lineare completa avente ordine n e dimensione non minore di $n - p$.

Chiamando rispettivamente *speciale* o *non speciale* una tale serie secondochè la sua dimensione supera o eguaglia $n - p$, si ha che ([9], nn. 3 e 4, pag. 932; [12], n. 6, pag. 150):

β) È non speciale ogni serie lineare avente l'ordine o la dimensione maggiori, rispettivamente, di $2p - 2$ o di $p - 1$.

γ) Un gruppo di p punti generici, semplici, distinti, di C individua una serie lineare di dimensione zero.

Le proprietà a) sono considerate acquisite proiettivamente anche da O. ZARISKI, il quale, anzichè formulare l'ipotesi c), ammette che su C siano date infinite serie lineari g_n^r di ordini indefinitamente crescenti e tali che $r \geq n - \pi$, essendo π il genere della superficie di Riemann, F , di C . A norma di α) (tenendo conto anche della b)), questa ipotesi può desumersi dalla c).

A queste premesse ZARISKI aggiunge l'ipotesi, d), che su C esista (almeno) una serie $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$.

Nel presente lavoro mostreremo per via topologica che tale ipotesi può dedursi dalle premesse a) e c). In vista di questa conclusione ed allo scopo di inserire i risultati di ZARISKI nella nuova trattazione di SEVERI, mostreremo anzitutto che il genere riemanniano π coincide con il genere p introdotto in [12].

3. - Per giungere al risultato sopra detto, occorre premettere alcune considerazioni sulla teoria topologica delle corrispondenze algebriche e sui fondamenti topologici della geometria numerativa.

Data una corrispondenza algebrica, T , di indici l e s , e di valenza γ , fra i punti di C , dalla teoria topologica delle corrispondenze algebriche sopra una curva algebrica, sviluppata da O. CHISINI⁽¹⁾ e da S. LEFSCHETZ [7], si ha che il numero, u , dei punti uniti di T è dato dalla formula di CAYLEY-BRILL:

$$[1] \quad u = l + s + 2\pi\gamma$$

Mediante considerazioni di carattere topologico (confrontare ad esempio: [1], pag. 558; [2], pag. 484) si dimostra che i punti uniti della somma, $T + S$, di due corrispondenze algebriche, T e S , fra i punti di C , sono i punti uniti di T ed i punti uniti di S , contati con le rispettive molteplicità. In particolare la corrispondenza λT , multipla di T secondo l'intero positivo λ , ha, come punti uniti, i punti uniti di T contati λ volte ciascuno. Mediante considerazioni di natura topologica si dimostra inoltre che, se T e S sono corrispondenze a valenza, anche $T+S$ ha valenza, e questa è eguale alla somma delle valenze di T e di S .

Le due proposizioni precedenti sono ben note, e noi le abbiamo ricordato soltanto perchè *in base ad esse ed alla* [1], *e senza altri riferimenti alla teoria delle corrispondenze*, F. SEVERI ([10], n. 81, pag. 250-254) ha stabilito la formula di SCHUBERT che esprime il numero

$$[2] \quad Z_{r,n}^m = n^v \binom{m-1}{r} - \frac{1}{2} d \binom{m-2}{r-1},$$

dei gruppi di $r+1$ punti di C , comuni da una g_n^r ($r \geq 1$) e ad una serie γ_m^1 (razionale o irrazionale) di indice $v \geq 1$, avente d punti doppi, nell'ipotesi che ambedue le serie siano prive di punti fissi.

In base all'osservazione precedente, oppure tenendo conto dei risultati conseguiti da B. L. VAN DER WAERDEN in [15], si conclude che la [2] può considerarsi acquisita per via topologica.

Supponiamo che la γ_m^1 sia una serie lineare g_m^1 . Considerando la corrispondenza algebrica di indici $m-1$, $m-1$, e valenza 1, nella

⁽¹⁾ Cfr. [1]. In questo lavoro la formula [1] viene stabilita nell'ipotesi che T abbia una valenza e che anche T^{-1} abbia una valenza (a priori non necessariamente eguale a quella di T). Ma quest'ultima ipotesi può dedursi, per via topologica, dalla prima, come risulta da [2].

quale sono coniugati i punti di C appartenenti ad un medesimo gruppo di g_m^1 , dalla [1] si ha che

$$[3] \quad d = 2m + 2\pi - 2 \quad (1).$$

4. - Proviamo ora che

$$[4] \quad p = \pi.$$

Se $p = 0$, l'asserto è senz'altro dimostrato poichè in tal caso C è birazionalmente equivalente ad una retta ([12], n. 4, pag. 147-148). Supponiamo dunque $p > 0$, e consideriamo una serie lineare $|g_{2p}^2|$, definita a partire da un gruppo, G_{2p} , di $2p$ generici punti semplici distinti di C . A norma del teorema β), questa serie non ha punti fissi.

Essendo P un generico punto di C (non appartenente a G_{2p}), il gruppo di $p+1$ punti di C costituito da P e da p punti di G_{2p} , dà luogo ad una g_{p+1}^1 non contenuta in $|g_{2p}^2|$. Fissato un generico punto, X , di C , consideriamo il gruppo \bar{G}_p , dei p punti residui di X rispetto a g_{p+1}^1 . Poichè g_{p+1}^1 non è contenuta in $|g_{2p}^2|$, risulta univocamente determinato (anche se $|g_{2p}^2|$ è composta) un gruppo, G_p , di p punti, residuo di \bar{G}_p rispetto a $|g_{2p}^2|$. La corrispondenza algebrica fra X ed i p punti di G_p ha indici $Z_{p-1, 2p-1}^{p+1}, p$, e valenza -1 . Poichè g_{p+1}^1 non è contenuta in $|g_{2p}^2|$, tale corrispondenza non ha punti uniti. Dalla [1] si ha pertanto che

$$p + Z_{p-1, 2p-1}^{p+1} - 2\pi = 0,$$

e da questa relazione, e dalle [2], [3], si deduce la [4].

5. - Fissati $p+2$ punti generici, semplici, distinti, di C , per la proposizione β) esiste una g_{p+2}^2 di cui tali gruppi costituiscono un gruppo di livello. A norma di γ), g_{p+2}^2 è completa, semplice e priva di punti fissi. Per tale serie vale il seguente

TEOREMA I. Se $p \geq 1$, una serie lineare g_{p+2}^2 , semplice e priva di punti fissi, ha $\frac{p(p-1)}{2}$ coppie neutre.

(1) Questa relazione può ottenersi più direttamente, come caso particolare di una relazione di HURWITZ sui punti di diramazione delle superficie di ricoprimento. Cfr. ad esempio [14], Cap. VI, pag. 132-133.

Sia G_{p+2} un gruppo generico di g_{p+2}^2 , gruppo che, nelle nostre ipotesi, non è restrittivo supporre costituito da $p+2$ punti semplici, distinti, di C , e siano g_{p+2}^1 e g'_{p+2}^1 due generiche serie lineari distinte, contenute in g_{p+2}^2 ed aventi come gruppo comune G_{p+2} . Il numero, $Z_{1,p+2}^{p+2}$, delle coppie comuni a g_{p+2}^1 ed a g'_{p+2}^1 può ottenersi dalle [2], [3] e [4], e risulta espresso dalla relazione

$$[5] \quad Z_{1,p+2}^{p+2} = p^2 + p + 1 ,$$

ma conviene determinare tale numero senza fare ricorso alla formula di SCHUBERT. A questo scopo indichiamo con T la corrispondenza algebrica in cui ad un generico punto, P , di C corrispondono i punti appartenenti ai gruppi di g'_{p+2}^1 passanti per i $p+1$ punti di C , residui di P rispetto a g_{p+2}^1 . T ha indici $(p+2)(p+1)$, $(p+2)(p+1)$ e valenza zero. I suoi $2(p+2)(p+1)$ punti uniti sono i punti del gruppo jacobiano di g_{p+2}^1 ed i punti costituenti le $Z_{1,p+2}^{p+2}$ coppie comuni a g_{p+2}^1 ed a g'_{p+2}^1 ; dalle (1), (3) e (4) segue la (5).

Fra le $Z_{1,p+2}^{p+2}$ coppie ora determinate, figurano le $\binom{p+2}{2}$ coppie di punti di G_{p+2} , e si può dimostrare, nel modo che rapidamente accenniamo, che ciascuna di tali coppie compare con molteplicità uno in $Z_{1,p+2}^{p+2}$.

Sulla superficie di Riemann, F , di C , in un opportuno intorno, $U(0)$, di uno qualsiasi, 0 , dei punti di G_{p+2} , definiamo una variabile uniformizzante z ([17], § 7, pag. 36). Poichè i punti di G_{p+2} sono a due a due distinti, l'affissa, z' , di uno qualsiasi dei punti di $U(0)$ corrispondenti a z in T , è una funzione olomorfa di z , con derivata non nulla in 0 . Si ha dunque, in un opportuno intorno di 0

$$z' = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad (a_1 \neq 0),$$

e si riconosce facilmente che, per la supposta genericità di g_{p+2}^1 e di g'_{p+2}^1 in g_{p+2}^2 , risulta $a_1 \neq 1$. Infatti, se, fissato g_{p+2}^1 , al variare di g'_{p+2}^1 in g_{p+2}^2 , a_1 fosse identicamente eguale a costante, per la g_{p+2}^2 non varrebbe evidentemente la proprietà involutoria, contro l'ipotesi a).

Dunque $z' - z$ è funzione olomorfa di z con derivata non nulla in 0, e pertanto ([1]; [2]) la molteplicità di 0 per T è semplice.

Il numero

$$Z_{1, p+2}^{p+2} + \binom{p+2}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

è il numero delle coppie neutre di g_{p+2}^2 .

Dal teorema ora dimostrato segue ovviamente il

COROLLARIO. - Se $p > 1$ su C esiste qualche serie speciale g_p^1 .

Nell'ipotesi che sia $p > 1$ ritorniamo alla serie g_{p+2}^2 definita all'inizio di questo numero, e, indicando con g la serie multipla minima di g_{p+2}^2 secondo l'intero $p-1$, dimostriamo che le coppie neutre di g_{p+2}^2 sono coppie neutre anche per g .

Siano G^1 e G^2 due generici gruppi di g_{p+2}^2 passanti per una, H_2 , di tali coppie, e sia G^3 un terzo gruppo generico di g_{p+2}^2 non passante per H_2 . G^1 , G^2 e G^3 sono linearmente indipendenti, e g è la serie congiungente i $\binom{3+p-1-1}{p-1} = \frac{(p-1)(p+2)}{2} + 1$ gruppi

$$[6] \quad i_1 G^1 + i_2 G^2 + i_3 G^3,$$

ove i_1, i_2, i_3 , è una qualsiasi soluzione in interi non negativi della equazione $i_1 + i_2 + i_3 = p-1$. Poichè fra i gruppi [6] ve ne è uno solo, $(p-1) G^3$, non passante per H_2 , si conclude che H_2 è una coppia neutra per g .

In quanto, a norma di β , la dimensione di $|(p-1)g_{p+2}^2|$ è uguale a $p^2 - 2 \geq \frac{(p-1)(p+2)}{2}$, dal fatto che i gruppi [6] sono linearmente indipendenti si deduce che la dimensione di g è non inferiore, e quindi eguale ([10], n. 29, pag. 108) a $\frac{(p-1)(p+2)}{2}$. Essendo $\frac{(p-1)(p+2)}{2} > \frac{p(p-1)}{2}$, preso un qualsiasi intero, h , tale che $1 \leq h \leq \frac{p(p-1)}{2}$, e fissate h coppie neutre di g_{p+2}^2 , le rimanenti $\frac{p(p-1)}{2} - h$ sono coppie neutre per la serie residua, rispetto a g ,

delle h coppie neutre fissate. Pertanto la serie residua, rispetto a g , delle $\frac{p(p-1)}{2}$ coppie neutre di g_{p+2}^2 ha ordine

$$(p-1)(p+2) - p(p-1) = 2p - 2,$$

e dimensione non minore di

$$\frac{(p-1)(p+2)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} = p - 1,$$

e quindi, in virtù della β), eguale a $p - 1$. Ciò prova il

TEOREMA II. *Esiste su C almeno una serie speciale g_{2p-2}^{p-1} .*

Questo teorema elimina l'ipotesi d) di O. ZARISKI e, in base alla [4], consente di inserire la dimostrazione del teorema di Riemann-Roch, data da questo Autore, nella nuova trattazione di F. SEVERI. D'altra parte, l'aver acquisito per via topologica la formula [2] di SCHUBERT permette di trasportare nell'ambito di questa trattazione la classica dimostrazione data da CASTELNUOVO e rielaborata per via intrinseca da ENRIQUES.

OSSERVAZIONE I. - Le argomentazioni di questo numero restano valide, indipendentemente dalla [4], quando in esse si sostituisca π a p .

OSSERVAZIONE II. - Il modo con cui è stato acquisito il Corollario del Teorema I fa sì che esso presenti qualche interesse anche al di fuori della nuova sistemazione della geometria sulla curva. Infatti, il noto teorema di NÖTHER estensione del *teorema delle lacune* è stato dimostrato da O. CHISINI ([3]; [10], n. 52, pag. 166) con una semplice argomentazione intrinseca che, in base a β), è indipendente dal teorema di Riemann-Roch. Le considerazioni che ci hanno condotto al corollario precedente completano in tale senso il teorema di NÖTHER dimostrando, indipendentemente dal teorema di Riemann-Roch, che, se $p > 1$, su C esiste qualche gruppo speciale di p punti.

6. - Sia in [12] che in [18] trovasi affermato che la ipotesi c), relativa all'esistenza di serie lineari più volte infinite su C, si suppone acquisita *per via proiettiva*. Osserviamo anzitutto come questa espressione abbia un significato particolare, in quanto, all'esistenza di serie lineari soddisfacenti alla c), si giunge (cfr. ad es. [10], pag. I, 2) fis-

sando un *qualsiasi* modello di C , senza fare intervenire in alcun modo la particolarità proiettive del modello stesso. Ciò risulta ulteriormente chiarito qualora si introducano la superficie di Riemann di C e le serie lineari su di essa seguendo DEDEKIND e WEBER [5].

Ricordiamo inoltre che si può giungere all'ipotesi c) anche mediante considerazioni di carattere funzionale involgenti soltanto la struttura della superficie di Riemann, F , di C . Infatti, sia data F , secondo la definizione di H. WEYL ([17] § 7, pag. 36), come varietà a due dimensioni orientata, chiusa, definita nel gruppo conforme, oppure secondo S. STOILOW ([14], Cap. II, pag. 34), come varietà a due dimensioni, per la quale esista un *ricoprimento riemanniano* sulla sfera complessa. È noto che, mediante considerazioni poggianti sul fatto che F ha una struttura analitica complessa, si prova che, per ogni intero n sufficientemente elevato ($> \pi$), esistono su F delle funzioni razionali non costanti i cui gruppi di livello sono costituiti da n punti. Risulta così provata l'esistenza su F di una g^1 ; dalla dimostrazione segue inoltre che, se $n > \pi + 1$, il numero delle g_n^1 aventi un medesimo gruppo di livello è maggiore di uno ⁽¹⁾. In base a questo risultato, a norma della Osservazione I, le argomentazioni del n. 5 consentono di provare l'esistenza su F di una serie $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$. Ed è opportuno rilevare in proposito che la dimostrazione del Teorema II può essere resa indipendente dall'ipotesi che la serie $g_{\pi+2}^2$ sia semplice. Pertanto l'esistenza su F di una $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ risulta acquisita sotto un'ipotesi più ampia di c). Tuttavia l'ufficio di c) diviene *essenziale* qualora si vogliano mantenere i risultati ottenuti nel n. 5, nell'ambito della nuova trattazione [12], in quanto è proprio in base alla c) che acquista significato il genere p .

Nel n. 7 mostreremo che, sostituendo alla c) un'ipotesi, c'), più ampia della precedente — e quindi scostandosi inevitabilmente dalla [12] — si può egualmente definire una serie effettiva d'ordine $2\pi - 2$, intrinsecamente collegata a C .

(1) Tale dimostrazione trovasi già in [17] (§ 17, pag. 119), ma preferiamo riferirci alla dimostrazione più semplice, data da R. COURANT, per la quale rinviando a [14] (Cap. II, pag. 50-62), ove si evita il ricorso ai differenziali abeliani definiti su F .

7. - Data F secondo la definizione di H. WEYL [17], supporremo, c'), che su F esista una serie lineare g_n^1 .

Sia T la corrispondenza nella quale sono coniugati i punti di F appartenenti ad un medesimo gruppo di g_n^1 . T ha indici $n-1, n-1$, e valenza 1, e quindi, essendo U la corrispondenza identica, $T+U$ ha indici n, n , e valenza 0. Indichiamo con gli stessi simboli $T, U, T+U$ i cicli a due dimensioni che, nella varietà prodotto $F \times F$, rappresentano, rispettivamente, $T, U, T+U$.

Poichè $T+U$ ha valenza zero, essendo z e z' due generici punti corrispondenti in $T+U$, si ha, sopra la varietà $F \times F$:

$$T+U \sim n F \times z + n z' \times F ,$$

([7], pag. 350); e da questa relazione si trae, con le notazioni di [7], che

$$(T+U) \cdot U = n (F \times z \cdot U) + n (z' \times F \cdot U) ,$$

cioè che

$$(T \cdot U) + (U \cdot U) = 2n .$$

Ma, nell'omeomorfismo esistente fra F e U , ai $(T \cdot U)$ punti di intersezione di T e U corrispondono in F i punti del gruppo jacobiano di g_n^1 ; dalla [3] si ha dunque che

$$(T \cdot U) = 2n + 2\pi - 2 ,$$

e quindi

$$(U \cdot U) = -(2\pi - 2) .$$

Dalla definizione adottata per F segue che ciascuno dei cicli $T, U, T+U$, ha una struttura analitica complessa. Si ha pertanto che l'indice di Kronecker $(U \cdot U)$ eguaglia il numero dei punti di intersezione ([3], Cap. VIII, pag. 384). Dunque: *nella varietà $F \times F$ il gruppo caratteristico dell'identità è costituito da $2\pi - 2$ punti (ciascuno dei quali porta il contributo di -1 all'indice di Kronecker $(U \cdot U)$).*

In virtù dell'omeomorfismo esistente fra F e U risulta determinato su F un gruppo di $2\pi - 2$ punti, il quale dà luogo ad una serie $|g_{2\pi-2}|$, indipendente dalla g_n^1 considerata ed intrinsecamente connessa a F .

Sorge ora la questione se dall'ipotesi c') sia possibile dedurre che $|g_{2\pi-2}|$ è la differenza fra la *serie jacobiana* di una qualsiasi serie lineare infinita data su F , ed il doppio delle serie stessa. Tale proprietà esula evidentemente dalle considerazioni topologiche di cui ci siamo serviti fino ad ora, ma può essere stabilita, ancora in maniera intrinseca, mediante argomentazioni analoghe a quelle esposte [11] (n. 97, pag. 190-192; n. 141, pag. 304-306) dopo aver dimostrato, in base alla [3], che i gruppi jacobiani delle g_m^1 contenuti totalmente in una g_m^r , con $r > 1$, sono equivalenti.

8. — *Osservazione di F. SEVERI.* Per conseguire intrinsecamente il teorema di Riemann-Roch tutto riducesi, come si proverà, a stabilire intrinsecamente soltanto l'esistenza su C di qualche g_{2p-2} speciale.

Intanto la dimensione r della g_{2p-2} completa, speciale, esistente su C , soddisfa alla $r > p - 2$. D'altronde non può essere $r > p - 1$, se no la serie sarebbe non speciale (n. 2, teor. β)). Dunque $r = p - 1$. Esiste pertanto su C una g_{2p-2}^{p-1} completa. Non sappiamo per ora che questa serie è unica. Ad ogni modo la chiameremo una « serie canonica ».

Essa è priva di punti fissi. Infatti, se ne avesse uno (almeno), tralasciandolo si otterrebbe una g_{2p-3}^{p-1} . Preso allora un gruppo generico di $p - 1$ punti, vi sarebbero ∞^1 gruppi di $p - 1$ punti, aventi rispetto alla g_{2p-3}^{p-1} lo stesso gruppo residuo di $p - 2$ punti; epperò quel gruppo generico di $p - 1$ punti non sarebbe linearmente isolato.

Nè può esistere un gruppo di s punti, distinti o no, neutro per g_{2p-2}^{p-1} , perchè il residuo di quel gruppo sarebbe una g_{2p-2-s}^{p-2} , e, supposto $p > 2$ (¹), si concluderebbe come sopra che un gruppo generico di $p - 2$ punti non è linearmente isolato.

La g_{2p-2}^{p-1} è dunque priva di punti fissi, semplice, e tutti i rami di C sono rispetto ad essa lineari.

(¹) Se è $p = 2$ ogni coppia delle g_2^1 è neutra, ma in tal caso l'unicità della g_2^1 è ovvia.

Si stabilisce ora subito un *teorema di riduzione intrinseco* relativo alla considerata g_{2p-2}^{p-1} .

Aggiungiamo all'uopo ai gruppi di g_{2p-2}^{p-1} un punto qualunque O di C . Si ottiene una g_{2p-1}^{p-1} che, avendo l'ordine $> 2p - 2$ (un suo gruppo generico consta infatti di $2p - 1$ punti *distinti* fra loro) è non speciale e quindi completa. Questo significa che quando un gruppo G di $2p - 1$ punti contiene un gruppo canonico ed un punto O fuori di questo, la serie $|G|$ ha il punto fisso O .

Se pertanto un gruppo di una serie $|A|$ si può decomporre in un gruppo parziale B contenuto in un gruppo canonico K ed in un punto O fuori di K , la serie $|A|$ ha il punto fisso O . Infatti la serie $|K + O|$ ha il punto fisso O e la serie $|B + O|$ non è che il resto del gruppo $K - B$ rispetto a $|K + O|$.

Una volta acquisito il teorema di riduzione si ottiene il teorema di Riemann-Roch rispetto alla g_{2p-2}^{p-1} considerata, col ragionamento esposto a pag. 156-157 del *Trattato di Geometria Algebrica*. E dopo di ciò si conclude pure che la g_{2p-2}^{p-1} è unica, perchè, essendo essa speciale, è contenuta (parzialmente o totalmente) nella prescelta serie canonica e quindi, siccome ha l'ordine uguale, coincide con questa.

Per ravvicinare la definizione di genere data col metodo rapido (coincidente in sostanza con quella di Weierstrass) alla definizione pure intrinseca derivante dalla considerazione del gruppo jacobiano di una g_m^1 (*Trattato di Geometria Algebrica*, pag. 122) bastano le considerazioni del n. 3 e quelle finali del n. 7 della presente Nota del Dott. VESENTINI.

BIBLIOGRAFIA

- [1] O. CHISINI, *Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico*, « Rend. Ist. Lombardo », LIV (1921), pag. 552-569.
- [2] — *Il general principio topologico di corrispondenza*, « Rend. Ist. Lombardo », LVII (1924), pag. 481-496.
- [3] — *Intorno alla dimostrazione di un teorema di Nöther*, « Boll. U. M. I. », (1), III, (1924), pag. 197-200.
- [4] W. L. CHOW, *Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen für beliebige vollkommene Körper*, « Math. Ann. », 114 (1937), pag. 655-682.
- [5] R. DEDEKIND, H. WEBER, *Theorie der algebraischen Funktionen einer veränderlichen*, « Journ. reine ang. Math. », 92 (1882), pag. 181-290.
- [6] W. GRÖBNER, *Idealtheoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie*, Berlin-Leipzig, Teubner, 1941.
- [7] S. LEFSCHETZ, *Correspondences between algebraic curves*, « Ann. of Math. », (2), 28 (1927), pag. 342-354.
- [8] — *Topology*, « Am. Math. Soc. Colloquium Publ. », vol. XII, 1930.
- [9] F. SEVERI, *Una rapida ricostruzione della geometria sopra una curva algebrica*, « Atti Ist. Veneto », LXXIX₂ (1920), pag. 929-938.
- [10] — *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I, Bologna, Zanichelli, 1926.
- [11] — *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, vol. I, a cura di F. Conforto e di E. Martinelli, Roma, Cremonese, 1942.
- [12] — *Una nuova visione della geometria sopra una curva*, « Acta Pontificia Acad. Scient. », XVI (1951), pag. 143-152.
- [13] F. K. SCHMIDT, *Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen*, I. *Beweis des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigen Konstantenkörper*, « Math. Zeitschrift », 41 (1936), pag. 415-438.

- [14] S. STOÏLOW, *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1938.
- [15] B. L. VAN DER WAERDEN, *Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie*, « Math. Ann. », 102 (1929), pag. 337-362.
- [16] A. WEIL, *Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen*, « Journ. reine ang. Math. », 179 (1938), pag. 129-133.
- [17] H. WEYL, *Die idee der Riemannschen Fläche*, Berlin-Leipzig, Teubner, 1923.
- [18] O. ZERISKI, *A topological proof of the Riemann-Roch theorem*, « Am. Journ. of Math. », LVIII (1936), pag. 1-14.