PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XVI - n. 10
pag. 85-94

IL PROBLEMA D'INCONTRO DI DUE ORBITE GRAVITAZIONALI IN FUNZIONE DELLE CONDIZIONI INIZIALI (*)

RENATO PENNACCHI

SVMMARIVM — Ex prima alicuius corporis positione et velocitate quid in eius motum efficiatur, si motus gravitationali campo sit obnoxius, determinat Auctor. Ex conclusionibus autem quaerit quibus condicionibus fieri possit occursus duorum corporum, quorum orbitae in eodem plano ambae sint vel in diversis planis.

In recenti studi di carattere astronautico si è presentato il problema di determinare un'orbita gravitazionale capace di permettere il trasferimento di un corpo da un pianeta (per esempio la terra) ad un altro.

Sorge quindi l'opportunità di esaminare quali debbano essere le condizioni iniziali di un moto siffatto, tali che l'orbita che ne risulta soddisfi le seguenti condizioni:

1) permettere l'incontro (ed eventualmente la tangenza) con l'orbita del pianeta che deve essere raggiunto;

2) permettere al corpo trasferentesi di giungere nel punto d'intersezione delle due orbite contemporaneamente al pianeta stesso.

La ricerca delle equazioni che realizzano le condizioni sopra dette dà luogo a quello che si è qui chiamato « problema d'incontro ».

È evidente che una soluzione rigorosa di questo problema richiederebbe la considerazione di un campo gravitazionale generato dalle masse del sole, della terra e del pianeta da raggiungere, avendo preponderanza, nel tratto

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gaetano Arturo Crocco nella Riunione del 24 maggio 1955.

iniziale dell'orbita di trasferimento, l'attrazione terrestre; nel tratto intermedio (il più lungo) quella solare e nel tratto finale quella del secondo pianeta.

Nella presente nota viene, invece, considerato, in prima approssimazione, il solo tratto intermedio, supponendosi che il corpo trasferente sia, lungo l'intera orbita, sottoposto alla sola attrazione solare.

1. *Influenza delle condizioni iniziali.*

Come è noto, se un corpo C di massa m si muove in un campo gravitazionale generato da un corpo S di massa M, l'orbita O da esso descritta è una conica avente un fuoco in S, e la legge del moto è data dalla costanza della velocità areolare.

Riferendo il corpo C (che si suppone puntiforme) ad un sistema di coordinate polari piane aventi l'origine in S e designando con r il modulo del vettore C-S e con ϑ la sua anomalia rispetto ad un fissata direzione origine, l'equazione dell'orbita è

$$[1] \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos(\vartheta - \omega)}$$

ove p è il parametro della conica, e è l'eccentricità ed ω è l'angolo che l'asse maggiore forma con la direzione origine.

È evidente che p, e, ω sono funzioni delle masse m ed M nonchè delle condizioni iniziali del moto

$$[2] \qquad \begin{aligned} \vec{V}_0 &= \vec{V}(t_0) \\ \vec{r}_0 &= \vec{r}(t_0) \end{aligned}$$

essendo t_0 l'istante iniziale.

Si supporrà nel seguito che sia

$$[3] \qquad 0 \leqslant e < 1$$

e quindi l'orbita considerata sarà ellittica (o, per $e = 0$, circolare).

Considerando uno spostamento infinitesimo di C, compiuto in un tempo dt, si ricava

$$[4] \qquad v^2 = r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dr}\right)^2$$

e poichè, per la [1], è

$$\frac{dr}{d\vartheta} = r^2 \frac{e \operatorname{sen}(\vartheta - \omega)}{p} \qquad [5]$$

si ha

$$V^2 = \left(\frac{d\vartheta}{dt} r^2\right)^2 \left[\frac{1 + 2e\cos(\vartheta - \omega) + e^2}{p^2}\right]. \qquad [6]$$

Detta k la costante delle aree, cioè

$$k = \frac{d\vartheta}{dt} r^2 \qquad [7]$$

si ottiene

$$V^2 = \frac{k^2}{p^2}\left[1 + 2e\cos(\vartheta - \omega) + e^2\right]. \qquad [8]$$

La costante k può anche esprimersi in funzione di M, m, p mediante una nota equazione della teoria delle orbite

$$f(M + m) = \frac{k^2}{P} \qquad [3]$$

ove f è la costante di attrazione.

Allora, posto

$$f(M + m) = F \qquad [10]$$

si ricava

$$k^2 = Fp \qquad [11]$$

e quindi la [8] può scriversi

$$V^2 = \frac{F}{P}\left[1 + 2e\cos(\vartheta - \omega) + e^2\right] \qquad [12]$$

ovvero, in funzione di r,

$$V^2 = 2F\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right] \qquad [13]$$

ove si è indicato con

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \qquad [14]$$

il semiasse maggiore dell'ellisse.

Se al tempo iniziale t_0 il corpo C si trova nel punto P_0 di coordinate (r_0, ϑ_0) con una velocità $\vec{V}_0$ avente un modulo V_0 ed una direzione che formi col vettore S-P un angolo α_0, deve aversi, per le [12] e [13],

[15]
$$V_o^2 = \frac{F}{P}[1 + 2e\cos(\vartheta_o - \omega) + e^2$$

ovvero

[16]
$$V_o^2 = 2F\left|\frac{2}{r_o} - \frac{1}{2a}\right| ,$$

Inoltre, poichè è

[17]
$$\cos\alpha = \frac{dr}{ds}$$

con

[18]
$$dr = \frac{r^2}{p} e \operatorname{sen}(\vartheta - \omega)\, d\vartheta$$

[19]
$$ds = V\frac{r^2}{k} d\vartheta \ ,$$

si ottiene, al tempo t_0,

[20]
$$\cos\alpha_o = \frac{e\,k \operatorname{sen}(\vartheta_o - \omega)}{V_o p} \sqrt{\frac{F}{P}} \frac{e \operatorname{sen} e(\vartheta_o - \omega)}{V_o} \ .$$

È poi evidente che l'orbita di C dovrà soddisfare la relazione

[21]
$$p = r_o[1 + e\cos(\vartheta_o - \omega)]$$

dovendo passare per P_0.

Le equazioni [15], [20] e [21] forniscono le relazioni cercate che determinano l'influenza delle condizioni iniziali del moto sull'orbita, e precisamente la dipendenza di p, e, ω da $\vec{V}_0$ ed $\vec{r}_0$.

Infatti, dalla [20], si ricava

[22]
$$e = \frac{V_o \cos\alpha}{\sqrt{\frac{F}{p}} \operatorname{sen}(\vartheta_o - \omega)}$$

e sostituendo nella [21]

[23]
$$p = r_o\left[\frac{V_o\cos\alpha_o}{\sqrt{\frac{F}{p}}\operatorname{tg}(\vartheta_o - \omega)}\right]$$

Posto poi

[24] $$\operatorname{tg}(\vartheta_0 - = \omega) = x$$

si ha

[25] $$p = r_0 \left[1 + \frac{V_0 \cos \alpha_0}{\sqrt{\frac{F}{p}}\, x} \right]$$

e quindi, dalla [15],

[26] $$r_0 \left[1 + \frac{V_0 \cos \alpha_0}{x} \sqrt{\frac{p}{F}} \right] = \\ = \frac{F}{V_0^2} \left[1 + \frac{2 V_0 \cos \alpha_0}{x} \sqrt{\frac{p}{F}} + \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha_0}{x} (1 + x^2) \frac{F}{p} \right]$$

da cui può ottenersi x (e quindi ω) e successivamente p ed e.

In tal modo, noti gli elementi iniziali del moto, può ritenersi nota l'orbita descritta.

2. *Problema d'incontro.*

Allo scopo di risolvere il problema d'incontro occorre ora esaminare in qual modo debbano essere determinate le condizioni iniziali del moto perchè il corpo C possa effettivamente incontrare lungo la sua orbita un prefissato pianeta C'.

Schematizzando il problema, supporremo essere C e C' due corpi materiali puntiformi di masse m ed m' gravitanti intorno ad S su orbite ellittiche che si supporranno, per ora, complanari. Sia

[27] $$r = \frac{p'}{1 + e' \cos(\vartheta - \omega')}$$

l'equazione dell'orbita O' di C' e P_0' la sua posizione all'istante iniziale t_0.

Siano P_0 e V_0 la posizione e la velocità di C nello stesso istante iniziale t_0.

Se la [1] è l'equazione dell'orbita O di C, perchè C e C' possano incontrarsi è necessario che l'equazione

[28] $$\frac{p}{1 + e \cos(\vartheta - \omega)} = \frac{p'}{1 + e' \cos(\vartheta - \omega')}$$

abbia radici reali (eventualmente coincidenti se si impone la condizione di tangenza).

Posto

$$\xi = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \tag{29}$$

la [28] equivale alla

$$\xi^2\left(\frac{1}{p} - \frac{e}{p}\cos\omega - \frac{1}{p'} + \cos\omega'\right) + 2\,\xi\left(\frac{e}{p}\operatorname{sen}\omega - \frac{e'}{p'}\operatorname{sen}\omega'\right) + \\ + \left(\frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\omega - \frac{1}{p'} - \frac{e}{p'}\cos\omega'\right) = 0 \tag{30}$$

ossia

$$\xi^2\left[p'(1 - e\cos\omega) - p\,(1 - e'\cos\omega')\right] + 2\,\xi(p'e\operatorname{sen}\omega - pe'\operatorname{sen}\omega') + \\ + \left[p'(1 + e\cos\omega) - p(1 + e'\cos\omega')\right] = 0$$

e quindi deve essere

$$\frac{e^2}{p^2} + \frac{e'^2}{p'^2} - 2\,\frac{e'e}{pp'}\cos(\omega - \omega') - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)^2 \geqslant 0 \tag{31}$$

valendo l'uguaglianza per la condizione di doppia tangenza.

Sia, per le condizioni sopra specificate, P_c un punto, comune alle due orbite, di coordinate (r_c, ϑ_c), cioè tale che

$$r_c = \frac{p}{1 + e\cos(\vartheta_c - \omega)} = \frac{p'}{(1 + e'\cos\vartheta_c - \omega')} \tag{32}$$

È evidente che, perchè C e C′ passino per P_c contemporaneamente il tempo T_c impiegato da C per portarsi da P_0 a P_c dovrà essere uguale al tempo T'_c impiegato da C_0 per portarsi da P_0' a P_c.

Tali tempi possono essere noti ricavando la relazione che lega ϑ a t.

Essendo, per la [7] e la [11]

$$dt = \frac{r^2}{k}\,d\vartheta = \frac{r^2}{\sqrt{\mathrm{FP}}}\,d\vartheta \tag{33}$$

si ha infatti

$$t - t_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{r^2}{\sqrt{\mathrm{FP}}}\,d\vartheta\ . \tag{34}$$

Allora, posto

[35]
$$\Phi(e, \omega, \vartheta) = \frac{1}{1-e^2}\left\{ \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \operatorname{tg}\frac{\vartheta-\omega}{2}\right) - \frac{e \operatorname{sen}(\vartheta-\omega)}{1+e\cos(\vartheta-\omega)} \right\}$$

si ricava, risolvendo l'integrale [34].

[36]
$$t - t_0 = \frac{p^2}{\sqrt{F p}} [\Phi(e, \omega, \vartheta)] - e, \omega, \vartheta_0)]$$

che fornisce la cercata relazione fra ϑ e t.

È perciò

[37]
$$T_c = \frac{p^2}{\sqrt{F p}} [\Phi(e, \omega, \vartheta_c) - \Phi(e, \omega, \vartheta_0)]$$

e

[38]
$$T'_c = \frac{p'^2}{\sqrt{F' p'}} [\Phi(e', \omega', \vartheta_c) - \Phi(e', \omega, \vartheta_0)]$$

ove si è posto

[39]
$$F' = f(M + m') \quad .$$

la condizione d'incontro è allora

[40]
$$T_c = T'_c \quad ,$$

e quindi, per la [15],

$$\frac{F}{V_0^3} \sqrt{[1 + 2\,2 e \cos(\vartheta_0 - \omega) + e^2]^3} \left\{ \Phi(e, \omega, \vartheta_c) - (e, \omega, \vartheta_0) = \right.$$

[41]
$$= p' \sqrt{\frac{p'}{F'}} \left\{ \Phi(e', \omega' \vartheta_c) - \Phi(e', \omega', \vartheta') \right\} \quad ,$$

che fornisce il legame fra l'orbita di C' e la velocità iniziale V_0 di C.

La funzione Φ (e, ω, ϑ) può semplificarsi nel caso in cui l'eccentricità e dell'orbita sia piccola (come accade per le orbite dei pianeti del sistema solare) cioè che il suo quadrato sia trascurabile di fronte all'unità.

In tale ipotesi, sviluppando la Φ (e, ω, ϑ) in serie di potenze di e nell'interno del punto $e = o$ si ha

[42]
$$\Phi(e, \omega, \vartheta) = \vartheta - \omega - e \operatorname{sen}(\vartheta - \omega) + \ldots$$

sicchè la [36] diviene

[43]
$$t - t_0 = p \sqrt{\frac{p}{F}} \left[\vartheta - \vartheta_0 - e\big(\operatorname{sen}(\vartheta - \omega) - \operatorname{sen}(\vartheta_0 - \omega)\big)\right] .$$

e conseguentemente si semplifica la [41].

In modo analogo può essere trattato il problema, se si suppone la non complanarità delle due orbite; cioè nel caso in cui il punto P_0 non giace nel piano π' contenente O', ovvero, pur giacendo P_0 su π', non così è per il vettore $\vec{V}_0$.

In tal caso il piano π individuato da $\vec{V}_0$ ed S taglierà l'orbita O' in due punti reali, uno dei quali può essere assunto come il punto P_0 del caso precedente.

Sul piano π l'equazione dell'orbita di C è la [1]; sul piano π' l'equazione dell'orbita O' di C' è la [17].

Il punto P , considerato come appartenente a π, avrà le coordinate (r_c, ϑ_c) considerato come appartenente a π', le coordinate (r'_c, ϑ'_c).

In tal caso la [40] può scriversi

[44] $$\frac{p^2}{\sqrt{Fp}}\left[\Phi(e, \omega, \vartheta_c) - \Phi(e, \omega, \vartheta_o)\right] =$$
$$= \frac{p'^2}{\sqrt{F'p'}}\left[\Phi(e'; \omega', \vartheta'_c) - \Phi(e', \omega', \vartheta_o)\right]$$

Come applicazione si considera qui il caso di un'orbita O' di equazione

$$r = \frac{p'}{1 + e' \cos \vartheta}$$

(la direzione di riferimento si è presa coincidente con quella dell'asse maggiore dell'ellisse, e quindi si è posto $\omega' = o$), e di un corpo C che si muova con le seguenti condizioni iniziali:

$$P_o(r_o, \vartheta_o = 0)$$
$$\vec{V}_o \equiv \left(V_o, \frac{\pi}{2}\right)$$

In tal caso la [20] fornisce subito

$$\omega = 0$$

e quindi le [15] e [21] divengono

[15 a] $$V_o^2 = \frac{F}{p}(1 + e)^2$$

[21 a] $$p = r_o(1 + e)$$

da cui si ricava

$$e = \frac{V_o^2 r_o}{F} = 1$$

$$p = \frac{V_o^2 r_o^2}{F}$$

L'equazione dell'orbita O è quindi

$$r = \frac{V_o^2 r_o^2}{F + (V_o^2 r_o - F)\cos\vartheta}$$

I punti comuni alle due orbite sono forniti dalla [30] che, in questo caso, diviene

$$[30\,a] \qquad \xi^2 \left[\frac{1}{p}(1-e) - \frac{1}{p'}(1-e')\right] + \left[\frac{1}{p}(1+e) - \frac{1}{p'}(1+e')\right] = 0$$

La condizione d'incontro, risolta la [30 a] e posto

$$\vartheta_c = \operatorname{arctg} \xi \ ,$$

è

$$p\sqrt{\frac{p}{F}}\left[\vartheta_c - e \operatorname{sen} \vartheta_c\right] = p'\sqrt{\frac{p'}{F'}}\left[\vartheta_c - e \operatorname{sen} \vartheta_c - \vartheta'_o + e \operatorname{sen} \vartheta'_o\right]$$

essendo ϑ_0' la posizione di c' al tempo t_0.

In modo analogo si ottiene

$$T_c p\sqrt{\frac{p}{F}}\,(\vartheta_c - e \operatorname{sen} \vartheta_c) \ .$$

che è il tempo di tragitto di C dal punto P_0 a P_c.