ACTA
Vol. VI - N. 4

UN'OSSERVAZIONE SUL CALCOLO DELLE CATENE INFINITE DI TRASDUTTORI ELETTRICI (*)

ANNIBALE BLANCHI

SVMMARIVM. — In formulis analyticis quae ad infinitas electricorum transductorum catenas attinent, et ad apparatus electricis undis emittendis, signa ambigua oriuntur (scil.: +, —); quae res olim nimis negligi solebat, necdum plane explanari potuit.
Auctor solutionem tradit cuiusdam casus peculiari difficultate obnoxii.

Consideriamo una catena infinita di trasduttori elettrici uguali, passivi. Si indichi con V_0 e I_0 il voltaggio e l'amperaggio ai morsetti d'entrata del 1° trasduttore; V_1 e I_1 ai morsetti d'entrata del 2°; V_n e I_n ai morsetti $n+1$ *esimo*.

I successivi voltaggi e amperaggi sono legati da relazioni lineari di questo tipo:

$$[1] \qquad \begin{cases} V_0 = a V_1 + b I_1 \\ I_0 = c V_1 + d I_1 \end{cases}$$

Nel caso di correnti continue le V e le I e così pure le a, b, c, d, sono grandezze reali. Nel caso di correnti alternanti sinusoidali si deve intendere che i simboli complessi sono sostituiti a quelli reali e che le a, b, c, d, dipendono oltrechè dalle resistenze anche dalle induttanze e capacità componenti e sono funzioni della frequenza. Questo caso delle correnti alternanti sinusoidali è quello che interessa i filtri elettrici.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, nella Tornata del 30 novembre 1941.

Indichiamo con:

$$G = \frac{I_0}{V_0} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{I_2}{V_2} \cdots$$

la conduttanza, o ammettenza, asintotica della catena infinita di trasduttori. Similmente con:

$$S = \frac{V_1}{V_0} = \frac{I_1}{I_0} = \frac{V_2}{V_1} \cdots$$

indichiamo il rapporto di trasmissione della catena stessa.

Poichè facciamo l'ipotesi che l'energia partendo dal 1° trasduttore viaggi nel senso delle n crescenti il modulo di S deve riuscire minore od eguale all'unità.

Con un noto calcolo dalla [1] si deduce:

$$G = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2b} \tag{2}$$

ed

$$S = \frac{a + d \mp \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2} \tag{3}$$

abbiamo pure che l'inverso di G (cioè la resistenza o impedenza asintotica) assume la forma:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{d - a \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \tag{4}$$

L'esame di queste formule fermò la mia attenzione sulla questione del segno da far precedere al radicale.

Il segno non poteva infatti essere preso indifferentemente ma doveva essere tale che:

$$|S| \leqslant 1$$

Questa osservazione era trascurata nella letteratura dei trasduttori.

Veniva scelto quasi sempre uno solo dei segni, e precisamente il segno *meno*, da far precedere al radicale nell'espressione di S (e quindi

il segno *più* in quelle di G e di R) perchè, si faceva riferimento al caso di trasduttori composti di sole resistenze ohmiche, in corrente continua o alternante, ed all'ipotesi che a e d fossero positive; allora per:

$$a + d > 2$$

era necessario porre il segno *meno* davanti al radicale per avere

$$|S| < 1$$

(quando $(a + d) < 2$ si ha sempre $|S| = 1$). Ma le formule che forniscono G, R ed S non sono, in questo caso, trasportabili senz'altro nel campo delle correnti alternanti, con la sostituzione dei numeri complessi ai numeri reali, perchè la scelta del segno davanti al radicale implica la considerazione di maggiore o minore, considerazione non trasportabile dal campo reale a quello complesso.

Le conclusioni relative al segno da far precedere al radicale, tratte per correnti continue, non sono quindi applicabili al caso di correnti alternanti, in circuiti contenenti induttanze e capacità ove $a, b, c, d,$ risultano complessi.

Infatti, ad esempio, in un filtro a T, simmetrico, passa basso, costruito nella forma più semplice, quando sia:

$$\omega^2 LC > 2 \tag{6}$$

la a e d sono reali e soddisfano alla condizione:

$$(a + d) < -2$$

Davanti al radicale si deve allora porre il segno *più*.

È quindi necessario far precedere al radicale talvolta il segno *più* talvolta il *meno*.

Mi proposi di esaminare la questione e stabilire, a priori, quale segno debba precedere il radicale per un trasduttore qualsiasi, formato da resistenze induttanze e capacità. In questo trasduttore, $a, b, c, d,$ sono complessi, e non, come nel caso dei filtri, reali o immaginarii

puri. Questo complicò notevolmente la questione, ma permise di risolverla in modo completo.

Posto $\frac{a+d}{2}$ sotto forma di un unico numero complesso $P+jQ$ e indicato con $x+jy$ il valore della radice, stabilii, in un primo tempo, che, se i valori assoluti di P e Q erano preceduti dallo stesso segno questo fatto doveva verificarsi anche per il segno che doveva precedere x e y. Se invece P e Q erano preceduti da segno opposto questo doveva verificarsi anche per x e y (per $P=0$ risultava sempre $x=0$). Premesso questo determinai quanto costituiva oggetto della ricerca:

Il segno da far precedere al radicale deve essere scelto in modo da rendere il segno di x opposto a quello di P (e quindi quello di y risulta opposto a quello di Q).

Quando $Q=0$ e $x=0$ (si verifica questo per $\frac{a+d}{2}=P$ reale e $|P|<1$, come nel caso delle zone passanti dei filtri ideali, puramente reattivi) si avrebbe il caso denominato *ambiguo* perchè in base alla premessa $|S|\leqslant 1$, sarebbe indifferente far precedere il segno *più* o il *meno* al radicale.

Escluso questo caso osserviamo che, una volta fissato il segno da far precedere al radicale nell'espressione di S viene stabilito anche quello da far precedere al radicale nelle espressioni di G e di R.

Occorre tener presente che, quando in S compare il *meno*, in R e G deve comparire il *più* e viceversa.

Questi risultati furono esposti nella mia Memoria:

Osservazioni alle formule che intervengono nel calcolo dei filtri elettrici, pubblicata sulla « Rassegna delle Poste dei Telegrafi e dei Telefoni » del marzo 1938.

È stato da taluni osservato, che in luogo di partire dalla condizione $|S|<1$, avrei potuto prendere in considerazione l'espressione di R anzichè quella di S e fissare il segno del radicale in modo da rendere la parte reale di R positiva. Dalle espressioni di S e di R risulta però subito come questo procedimento sia molto più complicato. Nell'espressione di R intervengono, infatti, tre parametri complessi

anzichè due, come nell'espressione di S, ed uno di essi è al denominatore. Di più i parametri a e d non restano conglobati in un unico numero complesso, perchè fuori del radicale compare la loro differenza ed entro la loro somma mentre invece nell'espressione di S compare solo la somma.

Ritenni quindi opportuno, al fine proposto, considerare l'espressione di S anzichè quella di R.

Il caso *ambiguo*, però, fa eccezione.

Mostro qui, come detto caso, per i filtri ideali, possa venire risolto ricorrendo alla considerazione di R.

In questo caso, per le ipotesi fatte, a e d sono reali, $|a+d|<2$ e c e b sono immaginarii puri.

Poichè per $|a+d|<2$ il radicale è un immaginario puro ed $a-d$ è reale, nell'espressione di R, sarà $\frac{d-a}{2c}$ l'immaginario e $\frac{\pm\sqrt{(d+a)^2-4}}{2c}$ la parte reale.

Affinchè questa risulti positiva il radicale dovrà essere preso col segno *più* o *meno* in modo che il rapporto tra i due immaginarii puri

$$\frac{\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$$

sia positivo.

Se prendiamo in considerazione R anzichè S si ha, per i filtri elettrici, il caso ambiguo per $|a+d|>2$ anzichè per $|a+d|<2$.

Infatti per $|a+d|>2$ l'espressione di R diventa un immaginario puro. Non è quindi possibile stabilire il segno della sua parte reale.

È evidente come il problema proposto si semplifichi nel caso particolare, importante, dei filtri elettrici ideali, ove a e d sono reali e b e c immaginarii puri.

Il segno da far precedere al radicale è spesse volte, subito, evidente e non si pensa allora a prendere in esame di questione.

Per $a+d<-2$ occorre far precedere al radicale il segno *più*, per $a+d>2$ il segno *meno*. Per $|a+d|\leqslant 2$, nell'espressione di R, il segno che rende il rapporto $\frac{\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$ positivo.

Con l'uso delle funzioni iperboliche l'attenuazione prodotta da una cellula è, apparentemente, calcolabile senza dover considerare il segno da far precedere al radicale.

Infatti posto:

$$S = e^k \tag{7}$$

si ottiene:

$$\frac{e^k + e^{-k}}{2} = \cosh k = \frac{a+d}{2} \tag{8}$$

dei due valori, opposti, di k che soddisfano a questa equazione si scieglieva quello ove la parte reale di k risultava negativa.

Non compare nella [8] il radicale, quindi non sembra necessario considerare il segno da attriburgli per il calcolo dell'attenuazione prodotta da una cellula.

Occorre però fare subito un'osservazione. I due valori di S, ottenuti ponendo il segno *più* o il segno *meno* davanti al radicale, sono reciproci fra di loro; infatti:

$$\frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4}}{2} \cdot \frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4}}{2} =$$

$$= \frac{(a+d)^2-(a+d)^2+4}{4} = 1$$

Gli esponenziali rappresentanti i due valori di S differiscono, quindi, solo per il segno da attribuire all'esponente. Applicato allora, a questi esponenziali, il calcolo che conduce alle [8] si ottiene, ponendo davanti al radicale, sia il segno *più* sia il segno *meno* la stessa espressione

$$\cosh k = \frac{a+d}{2}$$

soltanto il segno da attribuire all'argomento distingue i due casi uno dall'altro. Questo non era accertabile dalla [8] perchè il coseno iperbolico è una funzione pari. L'eventuale errore commesso, in partenza, sul segno attribuito al radicale non veniva così rilevato.

Ritengo che questa ultima osservazione, unita a quella sulla facilità colla quale si determina il segno da attribuire al radicale nel caso dei filtri elettrici, ove le formule [2], [3], [4], trovano maggiore applicazione pratica, renda ragione del motivo per cui la questione del segno da far precedere al radicale sia stata sollevata soltanto in tempi recenti.