

ATTRAZIONE NEWTONIANA RITARDATA (*)

CARLO CATTANEO

SUMMARIVM. — Auctor, postquam exposuerit investigationes, quae de possibili velocitate propagationis gravitatis in classica astronomia anteactis temporibus peractae sunt, duo simplicissima postulata ponit, e quibus eruit novam legis gravitationis expressionem, qua deterministicum principium excluditur, seu novam gravitatis legem quae haereditaria nota pollet. Demonstrat praeterea huiusmodi legem nihil fere, si superiores terminos negligas, differre a legibus, quibus ARMELLINI in suis cosmologicis investigationibus usus est.

Per rendere ragione di molti fatti cosmogomici rimasti inspiegati nella meccanica celeste classica, imperniata sulla formula newtoniana di gravitazione, il Professor ARMELLINI ha proposto, or è qualche anno, di modificare la legge dell'attrazione universale alla maniera seguente:

$$[1] \quad F = f \frac{m m'}{r^2} \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right);$$

il significato dei simboli è evidente: m e m' sono le masse dei due corpi, r la loro distanza attuale, f il medesimo coefficiente che compare nella formula classica di Newton, ε , coefficiente della derivata temporale di r , costituente con essa il cosiddetto termine correttivo, è un parametro assai piccolo che ha, come f , carattere universale; le sue dimensioni fisiche sono quelle dell'inverso di una velocità.

La [1] saggiata dall'ARMELLINI in una serie di ormai conosciutissime Note⁽¹⁾, ha condotto a conclusioni molto soddisfacenti, vale a

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini, nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della cosmogonia e la legge di Newton*, «Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei» (1937-1938-1939) o «Rendiconti della Reale Accademia d'Italia» (1940-1941).

dire in buon accordo con i dati dell'osservazione astronomica, su una quantità di questioni di cosmogonia che qui non è il caso neppure di accennare.

Il successo della formula dell'ARMELLINI, se da un lato costituisce il migliore argomento della sua fondatezza, dall'altro fa nascere il desiderio di cercarne una giustificazione aprioristica basata sui principi della filosofia naturale. Nella presente Nota mostrerò (n. 3) come in effetto la [1] possa considerarsi espressione approssimata di una spontanea modificazione della legge di Newton, unicamente ispirata al principio di escludere a priori, come impossibile, ogni azione immediata a distanza (n. 2).

Le pagine che seguono sono dedicate ad illustrare questa legge modificata, che chiameremo legge di attrazione newtoniana ritardata.

Nella formula che la esprime compare una costante w a priori indeterminata: è facile tuttavia riconoscere, in base all'accennata equivalenza approssimata con la formula dell'ARMELLINI, che fra la w e ϵ della [1] intercorre una semplice relazione: la circostanza presenta qualche interesse potendosi tal w interpretare, *in un certo senso*, come misura della rapidità con cui si propaga la gravitazione.

Della formula proposta è facile (n. 4) seguendo un'osservazione del KRALL⁽¹⁾, riconoscere il carattere ereditario poichè la forza di attrazione attuale viene da essa subordinata, in sostanza, alle simultanee derivate temporali, di ogni ordine, della distanza tra i due corpi. Da un punto di vista speculativo, ammessa la legge indicata, si vengono ad escludere nell'ambito meccanico i principi deterministici ordinari.

Poichè il punto di partenza delle presenti considerazioni è l'esclusione di qualsiasi azione immediata a distanza, penso utile, per completezza, cominciare con il riassumere per sommi capi (n. 1) i principali tentativi fatti nell'Astronomia classica per attribuire alla gravitazione una velocità finita.

I. LE IPOTESI CLASSICHE SULLA PROPAGAZIONE DELLA GRAVITAZIONE⁽²⁾. — La meccanica newtoniana postula che tra due corpi (punti-

(1) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica vibratoria*, Zanichelli, Bologna 1940.

(2) Cfr. J. CHAZY, *La theorie de la relativité et la mecanique celeste*, tome II, chap. X.

formi) S e P di masse m e m' si eserciti, qualunque siano le loro condizioni di moto, una mutua forza attrattiva la cui grandezza F è legata alla simultanea distanza r fra i due corpi dalla celebre formula

$$[N] \quad F = f \frac{m m'}{r^2};$$

la subordinazione di F alla posizione relativa dei due corpi (e cioè al valore di r) è istantanea.

La naturale ripugnanza ad ammettere tale immediatezza e il desiderio di eliminare alcune discordanze tra la teoria e l'osservazione, hanno suscitato, già da un secolo, l'idea, pur vaga, che l'azione gravitazionale si propaghi attraverso gli spazi interstellari e interplanetari con velocità finita.

L'ipotesi più antica in proposito risale, come è ben noto, al LAPLACE, secondo il quale la velocità del pianeta rispetto al sole darebbe origine, nei riguardi dell'attrazione, a una specie di aberrazione, perfettamente analoga a quella luminosa. Considerata una terna T di orientamento invariabile con l'origine in S (sole), si postula che la gravità emani da S , così come si propagherebbe l'impulso in un fluido, con velocità finita costante V rispetto a detta terna. Se il pianeta P si muove rispetto a T con velocità che non sia puramente radiale, l'azione che esso risente dal sole non risulta diretta come SP ma appare deviata di un certo angolo. Supposto per semplicità che il pianeta descriva attorno al sole una circonferenza, l'ipotesi del LAPLACE equivale ad ammettere che esso risenta oltre all'ordinaria attrazione newtoniana anche una forza tangenziale opposta al moto, proporzionale all'attrazione medesima e alla velocità del pianeta.

La teoria del LAPLACE mai si accorda con l'osservazione. Basti pensare che l'accennata resistenza tangenziale dovrebbe dar origine, tra l'altro, ad accelerazioni secolari nel moto medio dei pianeti, accelerazioni che non risultano all'osservazione se non per ciò che concerne il moto della Luna attorno alla Terra. È vero che essa porterebbe, in compenso, un'accrescimento secolare della longitudine media, accrescimento effettivamente osservato (sebbene in misura assai piccola) nel moto della Terra e di Mercurio; ma volendo spiegare mediante la teoria del LAPLACE sia l'accelerazione del moto medio lunare sia gli

accrescimenti di longitudine della Terra e di Mercurio, quali risultano dall'osservazione occorrerebbe adottare per V tre valori distinti⁽¹⁾.

Le cose avvengono in modo un pò diverso secondo il LEHMANN-FILHÈS: anche secondo questo scienziato l'azione risentita dal pianeta proviene, anzichè dalla posizione attuale del sole da una posizione da questo occupata precedentemente, ma quest'ultima è determinata non dal moto relativo pianeta-sole bensì dal moto assoluto del sole rispetto alle stelle fisse.

Anche questa seconda ipotesi non sfugge alle obiezioni della precedente, pur potendo anch'essa dar ragione di alcuni degli accennati effetti secolari riscontrati all'osservazione.

Le teorie precedenti escludono che la forza di attrazione solare sia conservativa. Non volendo rinunciare a questo carattere si è proposto di modificare l'ipotesi di LEHMANN-FILHÈS supponendo che sia il potenziale e non la forza a propagarsi. Le superficie equipotenziali del campo di forza generato dal Sole, mobile nello spazio assoluto, sarebbero sempre sfere di raggio crescente nel tempo e nascenti, istante per istante, attorno alla posizione a mano a mano occupata dal sole. Ma anche questa ipotesi non ha dato migliore prova delle altre.

L'obiezione principale che a mio parere deve farsi a tutte le teorie or ora accennate, a prescindere da ogni controllo sperimentale, sta nel fatto che ciascuna di esse ammette un particolare riferimento privilegiato sede della propagazione gravitazionale. E questo, pur lasciando da parte ogni considerazione relativistica, costituisce un regresso di fronte alla stessa meccanica newtoniana la quale, se pure ammette riferimenti privilegiati, ha almeno il vantaggio di ammetterne infiniti tutti equivalenti (tutti i cosiddetti riferimenti galileiani).

Altro punto debole comune alle teorie stesse consiste nel considerare in modo non simmetrico i due corpi gravitanti, fra i quali viene ben distinto qual'è il corpo attraente e quale il corpo attratto; nè serve invertire l'ufficio dei due corpi, ché le correzioni delle forze risentite dall'uno e dall'altro sono in generale differenti sia in grandezza che in direzione, tanto da dover rinunciare al principio di azione e reazione, anche formulato in una forma più generale di quella classica.

⁽¹⁾ Rispettivamente $V \approx 9,10^{17} \frac{cm}{sec}$, $V \approx 1,8 \cdot 10^{17} \frac{cm}{sec}$, $V = 1,8 \cdot 10^{19} \frac{cm}{sec}$.

Fatta questa rapida rassegna passo a proporre, *a puro scopo di tentativo*, un'altra modificazione della legge del NEWTON.

2. AZIONE NEWTONIANA RITARDATA. — Noi ammetteremo che la [N] si mantenga rigorosamente valida solo in condizioni stazionarie, quando cioè la distanza r fra i due corpi si mantiene costante. In caso diverso noi ammetteremo ancora che a una distanza r fra i due corpi si associi una forza attrattiva di intensità data da [N] ma, escludendo a priori che tale azione possa esplicarsi istantaneamente, supporremo che essa agisca con un certo ritardo, ritardo tanto maggiore quanto più grande è il valore di r medesimo. Per motivi di semplicità supporremo che questo ritardo τ (il quale dovrà senz'altro annullarsi insieme con r) sia semplicemente proporzionale a r medesimo. Porremo dunque

$$[2] \quad \tau = \frac{r}{w}$$

con w costante; si tratta perciò del medesimo ritardo che si avrebbe se l'azione gravitazionale si propagasse con velocità finita w . Ma naturalmente alla costante w , avente le dimensioni fisiche di una velocità, non converrà in ogni caso attribuire che un significato astratto: a un'effettiva propagazione gravitazionale non si saprebbe neppure se attribuire il verso da S a P o l'opposto (¹).

Quanto precede equivale, in termini precisi, ad ammettere i seguenti postulati:

I) *Nelle più generali condizioni di moto l'azione mutua esplicata da due corpi (puntiformi) gravitanti ammette a ogni istante come retta di applicazione la congiungente i due corpi.*

II) *L'intensità di questa azione all'istante t coincide con quella dell'azione newtoniana ordinaria relativa non alla distanza r che i due*

(¹) Volendo parlare di un'effettiva propagazione forse converrebbe considerare due onde sferiche distinte emananti da S e da P o incontrantisi a metà distanza. In tal caso come velocità di propagazione anziché il valore esatto della costante w bisognerebbe assumere $\frac{w}{2}$.

corpi hanno nel medesimo istante, bensì alla distanza $r_{t-\frac{r}{w}}$ che i due corpi avevano nell'istante $t - \frac{r}{w}$. Con tale modificazione la legge di attrazione si formula allora così;

$$[3] \quad F = f \frac{mm'}{r^2_{t-\frac{r}{w}}}.$$

Il secondo postulato, equivalente ad ammettere la semplice proporzionalità fra ritardo τ e distanza r , è giustificato da motivi di semplicità; il primo postulato consegue invece dal considerare la gravitazione come un'azione esplicita direttamente e in modo simmetrico dai due corpi senza alcun intermediario.

Mostriamo ora come la [1] dell'ARMELLINI possa considerarsi un'espressione approssimata della [3].

3. PRIMA E SECONDA APPROSSIMAZIONE; COINCIDENZA CON LA FORMULA DI ARMELLINI. - Sviluppiamo la funzione $\frac{1}{r^2_{t-\frac{r}{w}}}$ in serie di TAYLOR nell'intorno dell'istante t ; si ha, indicando con r la distanza attuale,

$$[4] \quad \frac{1}{r^2_{t-\frac{r}{w}}} = \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{2}{w} \frac{dr}{dt} + \dots \right).$$

Tenuto conto dell'indubbio grandissimo valore di w si ha in prima approssimazione

$$[5] \quad \frac{1}{r^2_{t-\frac{r}{w}}} = \frac{1}{r^2}.$$

con ciò la formula [3] dell'attrazione ritardata viene ricondotta all'ordinaria formula di NEWTON. In seconda approssimazione si ha invece:

$$[6] \quad \frac{1}{r^2_{t-\frac{r}{w}}} = \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{2}{w} \frac{dr}{dt} \right).$$

La [6] è in accordo con quanto abbiamo asserito nelle pagine precedenti; basta porre

$$[7] \quad \varepsilon = \frac{2}{w}$$

perchè la [3] in seconda approssimazione si identifichi con la [1]. Attribuendo alla ε il valore numerico proposto da ARMELLINI $\left(4 \cdot 10^{-14} \frac{\text{sec}}{\text{cm}}\right)$ come massimo possibile, si ha per il minimo valore di w

$$w = 5,10^{13} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Il valore di w è però sempre dubbio. Anche prescindendo dalla inevitabile incertezza nel valore assegnato alla ε , si rifletta che il valore numerico effettivamente competente alla w è certamente diverso, e forse molto diverso, da quello che si può ottenere sostituendo alla [3] una formula approssimata.

Ripeto poi ancora che alla w non deve attribuirsi il significato concreto di una velocità.

4. ASPETTO EREDITARIO DELL'ATTRAZIONE RITARDATA. — Se nel secondo membro della [3] si immagina sostituito il completo sviluppo [4] la forza F risulta dipendere *da tutte* le successive derivate della funzione r . Tale circostanza mette in luce come alla determinazione del valore della forza di attrazione ad un'assegnato istante contribuisca, non solamente la posizione istantanea dei due corpi, ma anche la storia passata delle loro posizioni reciproche, spinta fino ad un intorno *completo* dell'istante attuale. La [3] ha dunque carattere ereditario.

Conseguentemente il problema dei due corpi, e con esso ogni altro problema più complesso, si presenta ricondotto a equazioni differenziali nelle quali compaiono derivate delle funzioni incognite di ordine comunque elevato: a equazioni differenziali, per così dire, di ordine infinito. Come è ben noto, ad analoghe equazioni si possono ridurre, previo sviluppo in serie dei « nuclei ereditari » anche le equazioni

integrodifferenziali che traducono il generico problema ereditario nell'indirizzo di VOLTERRA ⁽¹⁾.

La presenza in queste equazioni differenziali di derivate di ordine comunque elevato mostra che, ad individuare la soluzione di un problema meccanico mediante la [3], saranno insufficienti non solamente i dati iniziali consueti (posizione e atto di moto del sistema) ma addirittura non basterà un numero finito di dati numerici. Una Meccanica celeste fondata sulla [3] sembra dunque allontanarsi considerevolmente da ogni schema classico, venendo addirittura a mancare per essa i principi deterministici, almeno nella loro accezione ordinaria.

Di tale notevole circostanza, di interesse prevalentemente speculativo, ci accontentiamo di avere fatto cenno.

⁽¹⁾ Cfr. G. KRALL, *op. cit.*, Vol. I, cap. III.