

## SUL PRODOTTO DEI POLINOMI DI LAGUERRE (\*)

ERVIN FELDHEIM

SUMMARY. — Auctor determinat quasdam evolutiones producti  $L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x)$  in seriebus polynomiorum specialium LAGUERRE, et evolutiones inversas; ac praesertim evolutionem producti praecedentis in seriebus productuum  $L_{\Delta}^{(\gamma)}(x) L_{\Delta}^{(\delta)}(x)$  cum  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .

1. — Abbiamo dimostrato in lavori precedenti <sup>(1)</sup> le relazioni, fra loro inverse,

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{2k}{k} L_{2k}^{(\alpha-k)}(x), \\ (-1)^n \binom{2n}{n} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \{L_k^{(\alpha)}(x)\}^2 \end{array} \right.$$

che possono essere condensate nell'unica formula

$$[2] \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = (1-t)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) \quad (|t| < 1).$$

Si possono indicare ancora due altre relazioni della stessa natura, che si ricavano facilmente da [1]:

$$[3] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = e^t \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x),$$

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi, nella Tornata del 6 giugno 1942.

<sup>(1)</sup> E. FELDHEIM, *Relations entre les polynomes Jacobi, Laguerre et d'Hermite*, e *Contributions à la théorie des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables*, II. (In corso di stampa).

e, per  $|t| < 1$ ,

$$[4] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n L_{2n}^{(\alpha-n)}(x).$$

Tenendo conto della nota formula di HILLE-HARDY, la [4] conduce ad una nuova funzione generatrice per i polinomi di LAGUERRE:

$$[5] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! t^n}{n! \Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) = e^{-2tx} \left(\frac{tx^2}{1+t}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} I_{\alpha}(2x\sqrt{t(1+t)}) \left(t > -\frac{1}{2}\right)$$

D'altra parte W. N. BAILEY ha stabilito lo sviluppo <sup>(1)</sup>

$$[6] \quad L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{r=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r}{(1+\alpha)_r (1+\beta)_r (n-r)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1+\alpha+\beta}{2} + r, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + r, -n+r; 1 \\ 1+\alpha+r, 1+\beta+r \end{matrix} \right) L_{2r}^{(\alpha+\beta)}(2x)$$

ove  $(a)_r = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}$ ,  $(a)_0 = 1$ . Il caso particolare  $\alpha = \beta$  di [6], precedentemente trovato da W. T. HOWELL <sup>(2)</sup>, è:

$$[7] \quad \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^{2n} n!} \sum_{r=0}^n \frac{(2n-2r)! (2r)!}{\Gamma(\alpha+r+1) [(n-r)!]^2 r!} L_{2r}^{(2\alpha)}(2x).$$

Da questa formula si ricava subito, per  $|t| < 1$ , la relazione analoga a [4]:

$$[8] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! t^n}{2^{2n} n! \Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = \sqrt{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2$$

e il valore comune delle due serie infinite è ancora dato dalla formula citata di HILLE-HARDY. Si ha dunque un'altra funzione generatrice dei polinomi di LAGUERRE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! t^n}{2^{2n} n! \Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(2\alpha)}(x) = \frac{(tx^2)^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{2tx}{1-t}} I_{\alpha}\left(\frac{x\sqrt{t}}{1-t}\right) \quad (|t| < 1).$$

<sup>(1)</sup> W. N. BAILEY, *On the product of two Laguerre polynomials*, « Quart. Journ. of Math. », vol. 10, (1939), pag. 60-66.

<sup>(2)</sup> W. T. HOWELL, *On some operational Representations of Products of Parabolic Cylinder Functions*. « Philos. Magazine », vol. 7 (24), (1937), pag. 1082-1093.

Ma il risultato [8] ha una più grande importanza in quanto fornisce l'inversione di [7], sotto la forma

$$[9] \quad L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = - \frac{n! \Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!} \sum_{r=0}^n \frac{2^{2r} (2n-2r)! r!}{(2n-2r-1)! \Gamma(r+\alpha+1) [(n-r)!]^2} \{L_r^{(\alpha)}(x)\}^2.$$

Osserviamo che il valore  $\beta = \alpha + 1$  conduce, secondo la [6], a una formula di coefficienti uguali a quelli di [7]; la sua inversa ha gli stessi coefficienti che [9]. Queste formule possono essere condensate, per  $|t| < 1$ , nella

$$[10] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! t^n}{2^{2n} n! \Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(2\alpha+1)}(2x) = \sqrt{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha+1)}(x)$$

Lo scopo del presente articolo è di generalizzare le relazioni [1] e [9], cioè di trovare l'inversione di [6]. Applicheremo poi i risultati ottenuti per stabilire altri interessanti sviluppi del prodotto di due polinomi di LAGUERRE.

2. - Il punto di partenza di queste ricerche è la relazione

$$[11] \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = (1-t)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \left( \frac{t}{1-t} \right)^n L_{2n}^{(\alpha-n)}(x), \quad (|t| < 1)$$

equivalente agli sviluppi inversi:

$$[12] \quad L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n+\alpha}{n-s} L_{2s}^{(2\alpha)}(x),$$

$$[13] \quad L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = \sum_{s=0}^n 2^{2s} \binom{n+\alpha}{n-s} L_{2s}^{(\alpha-n)}(x).$$

Si può indicare anche una formula analoga a [11], equivalente a [12] e [13]:

$$[11'] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = e^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4t)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x).$$

Scrivendo, nella [13],  $\alpha + \beta$  in luogo di  $2\alpha$ , e sostituendo l'espressione corrispondente di  $L_{2r}^{(\alpha+\beta)}(2x)$  nella formula [6], viene

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) &= \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r}{(1+\alpha)_r (1+\beta)_r (n-r)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1+\alpha+\beta}{2} + r, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + r, -n+r; 1 \\ 1+\alpha+r, 1+\beta+r \end{matrix} \right) \times \\ &\quad \times \sum_{s=0}^r 2^{2s} \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (r-s)!} L_{2s}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-s\right)}(x). \end{aligned}$$

Sviluppando qui la funzione  ${}_3F_2$ , e cambiando l'ordine delle somme (il che è lecito), si ottiene

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) &= \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^r \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r \left(\frac{1+\alpha+\beta}{2} + r\right)_k \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + r\right)_k \cdot 2^{2s} \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r L_{2s}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-s\right)}(x)}{(1+\alpha)_r (1+\beta)_r (n-r)! (1+\alpha+r)_k (1+\beta+r)_k k! \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (r-s)!} = \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\alpha)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{2^{2s}}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s} \left\{ \sum_{r=s}^n \sum_{k=0}^{n-r} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r \left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_{k+r} \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{k+r} (-1)^k}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_r (1+\alpha)_{k+r} (1+\beta)_{k+r} (n-k-r)! k! (r-s)!} \right\} L_{2s}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-s\right)}(x) \end{aligned}$$

Per calcolare la somma doppia di quest'ultima formula, poniamo  $k+r=p$ , e  $r=s+q$  con che si ha

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_s}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_s} \sum_{p=s}^n \frac{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_p \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_p (-1)^{p-s}}{(1+\alpha)_p (1+\beta)_p (p-s)! (n-p)!} \sum_{q=0}^{p-s} \frac{\left(\frac{1}{2}+s\right)_q (-p+r)_q}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}+s\right)_q q!}.$$

La seconda somma è nota per una formula di GAUSS (funzione ipergeometrica di variabile uguale a 1); il risultato cercato sarà:

$$\begin{aligned} [14] \quad L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) &= \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{(2s)!}{(1+\alpha)_s (1+\beta)_s (n-s)! s!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{\alpha+\beta}{2}, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + s, -n+s; 1 \\ 1+\alpha+s, 1+\beta+s \end{matrix} \right) L_{2s}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-s\right)}(x). \end{aligned}$$

Questa è la generalizzazione della prima formula [1]; e per  $\alpha=\beta$  la [14] si riduce proprio alla [1].

3. - Un'altra espressione del prodotto  $L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x)$ , sotto forma di sviluppo di serie di  $\{L_s^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2$ , sarà dedotta in modo analogo dagli sviluppi [6] e [9]. Da quest'ultima si ha:

$$L_{2r}^{(\alpha+\beta)}(2x) = \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r}{\left(\frac{1}{2}\right)_r} \sum_{s=0}^r \frac{s! \left(-\frac{1}{2}\right)_{r-s}}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (r-s)!} \{L_s^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2.$$

Sostituendo nelle [6], e effettuando i calcoli analoghi a quelli fatti nel n. 2, si avrà la relazione seguente:

$$[15] \quad L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n (n-s)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + s, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + s, -n+s; 1 \\ 1+\alpha+s, 1+\beta+s \end{matrix} \right) \{L_s^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2.$$

Per  $\alpha=\beta$ ,  ${}_3F_2$  non differisce da 0 che per  $s=n$  e [15] si riduce ad una identità.

4. - Secondo la formula [10], si ha ancora

$$L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(2x) = \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \sum_{s=0}^n \frac{s! \left(-\frac{1}{2}\right)_{n-s}}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (n-s)!} L_s^{(\frac{\alpha+\beta+1}{2})}(x) L_s^{(\frac{\alpha+\beta-1}{2})}(x),$$

e questa relazione può essere scritta anche come segue

$$L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(2x) = \frac{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_n \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (n-s)!} \times \\ \times {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1 + \frac{\alpha+\beta+1}{2} + s, 1 + \frac{\alpha+\beta-1}{2} + s, -n+s; 1 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{2} + s, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + s \end{matrix} \right) L_s^{(\frac{\alpha+\beta+1}{2})}(x) L_s^{(\frac{\alpha+\beta-1}{2})}(x)$$

Se ne conclude che la formula generale dovrà aver l'espressione:

$$[16] \quad L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(2x) = \frac{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_n \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (n-s)!} \times \\ \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -n+s; 1 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s \end{matrix}\right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x),$$

che si verifica con la sostituzione nella [6]. I calcoli danno luogo ad una identità. La formula [16] è l'inversione cercata dello sviluppo [6] del BAILEY. Se  $\alpha=\beta$ , o  $\alpha+1=\beta$ , si ritrovano i casi particolari sopra menzionati.

5. - I polinomi di HERMITE  $H_n(x)$  sono legati, come è noto<sup>(1)</sup>, a quelli di LAGUERRE per mezzo della formula limite

$$H_n(x) = 2^n n! \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{-n} L_n^{\left(\frac{\omega^2}{2}\right)+k} \left(\frac{\omega^2}{2} - \omega x\right) \quad (k \text{ arbitrario})$$

Applicando questa relazione alla formula [8], se ne ricava

$$[17] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} H_{2n}^2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\frac{2tx^2}{1+t}} \quad (|t| < 1)$$

Si può verificare che [17] si deduce anche dalla nota formula di MEHLER<sup>(2)</sup>. Da [17], si avrà per esempio

$$[18] \quad H_{2n}(x\sqrt{2}) = -n! \sum_{k=0}^n \frac{2^k (2n-2k)!}{(2n-2k-1)! k! [(n-k)!]^2} H_k^2(x).$$

<sup>(1)</sup> L. TOSCANO, *Formule limiti sui polinomi di Laguerre*. « Boll. Un. Mat. Ital. » (II), vol. 1, (1939), pag. 337-339 (con altre notazioni).

<sup>(2)</sup> « Journal de Crelle », vol. 66, (1866), pag. 161.

Questa relazione, la sua inversa (che si deduce anche da [17]), come anche altri risultati più generali, sono stati stabiliti con altro metodo, in uno dei nostri lavori precedenti <sup>(1)</sup>.

Tenendo conto dell'altro legame ben noto fra polinomi di LAGUERRE e di HERMITE, attribuito al SZEGÖ, si avrà, ponendo nel [10],  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = +\frac{1}{2}$ ,

$$[19] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x) H_{2n+1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_{2n}(2x^2) \quad (|t| < 1)$$

donde

$$[20] \quad 2x L_{2n}(2x^2) = \sum_{s=0}^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_{n-s}}{(2s)! (n-s)! 2^{2s}} H_{2s}(x) H_{2s+1}(x),$$

e la sua inversa che si deduce da [19] sviluppando il secondo membro in serie di potenze di  $t$ .

Per gli stessi valori di  $\alpha$  e  $\beta$  (cioè  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = +\frac{1}{2}$ ), la formula [15] dà lo sviluppo del prodotto  $H_{2n}(x) H_{2n+1}(x)$  in serie di  $\{L_s(x^2)\}^2$  e si avrà anche lo sviluppo inverso.

Osserviamo che l'applicazione della formula limite di TOSCANO alle relazioni [1] dà luogo a noti risultati sui polinomi di HERMITE; gli sviluppi generali di quest'ultimo tipo sono stati dedotti con questo metodo dai risultati stabiliti nel nostro secondo lavoro, citato a pag. 359, nota <sup>(1)</sup>.

6. - Continuiamo adesso con l'inversione di [15]. Scrivendo [7] sotto la forma

$$\{L_n^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2 = \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_k (n-k)!} L_{2k}^{(\alpha+\beta)}(2x),$$

<sup>(1)</sup> E. FELDHEIM, *Développements en série de polynome d'Hermite et de Laguerre à l'aide des transformations de Gauss et de Hankel*, I-III. « Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. », vol. 43, (1940), pag. 224-248, 379-386.

e sostituendo per  $L_{2k}^{(\alpha+\beta)}(2x)$  l'espressione ricavata da [16], mediante calcoli analoghi a quelli precedenti, si ottiene il risultato

$$[19] \quad \{L_n^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2 = \frac{\left[\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n\right]^2}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{\left[\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s\right]^2 (n-s)!} \times \\ \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -n+s; 1 \\ 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s \end{matrix}\right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)$$

Per  $\alpha > \beta$  la [19] si riduce ad una identità.

7. - Le formule [15] e [19] permettono di stabilire una relazione più generale che contiene anche le due relazioni particolari. Scrivendo la [19] con i parametri  $\gamma$  e  $\delta$  tali che  $\gamma + \delta = \alpha + \beta$ , e sostituendo l'espressione ottenuta di  $\{L_s^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2$  nella [15], dopo alcune trasformazioni, viene

$$L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \\ \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{s=0}^k \sum_{q=0}^{k-s} \frac{(-1)^{p+q} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{k+p} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{k+p} s! (1+\gamma)_{s+q} (1+\delta)_{s+q} L_s^{(\gamma)}(x) L_s^{(\delta)}(x)}{(1+\alpha)_{k+p} (1+\beta)_{k+p} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{s+q} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{s+q} (1+\gamma)_s (1+\delta)_s p! q! (n-k-p)! (k-q)!}$$

Poniamo qui  $k+p=i$ ,  $s+q=j$ :

$$L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \\ \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \sum_{i=s}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^{i-k+j-s} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_i \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_i (1+\gamma)_j (1+\delta)_j s! L_s^{(\gamma)}(x) L_s^{(\delta)}(x)}{(1+\alpha)_i (1+\beta)_i \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_j \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_j (1+\gamma)_s (1+\delta)_s (n-i)! (i-k)! (k-j)! (j-k)!}$$

Effettuando la somma rispetto a  $k$ , si vede che la somma precedente non sarà differente da 0 che per  $k=j=i$ . Si avrà dunque il risultato notevole:

$$[20] \quad L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \\ = \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{(1+\alpha)_s (1+\beta)_s (n-s)!} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+\gamma+s, 1+\delta+s, -n+s; 1 \\ 1+\alpha+s, 1+\beta+s \end{matrix}\right) L_s^{(\gamma)}(x) L_s^{(\delta)}(x)$$

valido per  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .



Come una conseguenza di [20], sia menzionata l'identità:

$$(1+\gamma)_n(1+\delta)_n \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s s! L_s^{(\gamma)}(x) L_s^{(\delta)}(x)}{(1+\gamma)_s(1+\delta)_s(n-s)!} \equiv (1+\alpha)_n(1+\beta)_n \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s s! L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)}{(1+\alpha)_s(1+\beta)_s(n-s)!}$$

valida per  $\gamma+\delta=\alpha+\beta$ , e  $n=0, 1, 2, \dots$ .

8. - Resta ancora da generalizzare la seconda delle formule [1], cioè da stabilire lo sviluppo di  $L_{2n}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)}(x)$  in serie di  $L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)$ , nel caso  $\alpha \neq \beta$ . Dalle [1] e [19] si ha:

$$\begin{aligned} (-1)^n \binom{2n}{n} L_{2n}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)}(x) &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+\frac{\alpha+\beta}{2}}{n-r} \frac{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r}{r!} \times \\ &\times \sum_{s=0}^r \frac{s!}{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (r-s)!} {}_2F_2\left(\begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -r+s; 1 \\ 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s \end{matrix}\right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x) = \\ &= \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n \sum_{r=0}^r \sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{r-s} \frac{(-1)^r \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r s! (1+\alpha+s)_k (1+\beta+s)_k (-r+s)_k L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)}{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s\right)_k \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s\right)_k (n-r)! r! (r-s)! k!} = \\ &= \frac{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \sum_{k=0}^{n-s} \frac{(-1)^s s! (1+\alpha+s)_k (1+\beta+s)_k \left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{n-s-k}}{(n-s-k)! \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{s+k} k!} L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x). \end{aligned}$$

Finalmente, per  $\alpha \neq \beta$ ,

$$[21] \left\{ \begin{aligned} L_{2n}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)}(x) &= \frac{(-1)^n \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n \left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n n!}{(2n)!} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)_s (n-s)!} \times \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -n+s; 1 \\ 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}-n+s \end{matrix}\right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x) \end{aligned} \right.$$

9. - Tutti gli sviluppi stabiliti sono invarianti per la trasformazione di HANKEL, cioè se si moltiplicano i due membri per  $J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy}) e^{-x} x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} dx$ , e se si integra rispetto ad  $x$  da 0 a  $\infty$ , questi sviluppi saranno ritrovati, per mezzo di noti risultati sulla trasformata di HANKEL di prodotti di polinomi di LAGUERRE<sup>(1)</sup>. Osserviamo qui che questa proprietà mostra già la possibilità di tali sviluppi come abbiamo indicato nel lavoro citato a pag. 365, nota 1, per le formule [1], [14], [16] e [21], senza determinare i coefficienti.

D'altra parte abbiamo dimostrato con lo stesso metodo l'impossibilità dello sviluppo di  $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$  in serie dei prodotti  $L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)$ . Si verifica, al contrario, che la funzione  $\frac{x^{2n}}{(2n)!} + L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(x)$  può essere sviluppata, e i coefficienti possono essere calcolati facilmente, mediante i risultati precedenti.

Utilizzando la formula di moltiplicazione ben nota<sup>(2)</sup> dei polinomi di LAGUERRE, noi avremo subito

$$[22] \quad \frac{x^{2n}}{(2n)!} + L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(x) = \frac{2}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^n \binom{2n+\alpha+\beta}{2n-2k} L_{2k}^{(\alpha+\beta)}(2x),$$

e occorre sostituire qui a  $L_{2k}^{(\alpha+\beta)}(2x)$  l'espressione [16]:

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} + L_{2n}^{(\alpha+\beta)} = \frac{2(1+\alpha+\beta)_{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(2n-2k)! (2k)!} \sum_{s=0}^k \frac{s! 2^{2s}}{(1+\alpha+\beta)_{2s} (k-s)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -k+s; 1 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s \end{matrix} \right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x).$$

<sup>(1)</sup> Questi risultati sono riassunti, per esempio nel § 1, del lavoro citato a pag. 365, nota 1.

<sup>(2)</sup> Vedi per esempio il § 1, del lavoro citato a pag. 365, nota 1.

Si può invertire l'ordine delle sommatorie, in modo da effettuare la prima sommatoria rispetto a  $k$ . Viene

$$[23] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(x) &= \frac{(1+\alpha+\beta)_{2n}}{(2n)!} \sum_{s=0}^n \frac{s!(2n-s-1)!}{(1+\alpha+\beta)_{2s}(2n-2s)!} \times \\ &\times {}_4F_3 \left( \begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -n+s, \frac{1}{2}-n+s; -1 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s, -2n+s+1 \end{matrix} \right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x). \end{aligned} \right.$$

Per  $\alpha=\beta$ , la funzione  ${}_4F_3$  si riduce a una  ${}_3F_2$ .

Il numero di tali formule può essere evidentemente esteso in diverse maniere. Noi ci limitiamo qui a quelle date nei passaggi precedenti, indicando per finire il modo della loro generalizzazione.

# 10. - Riprendiamo il risultato <sup>(1)</sup>

$$[24] \quad L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \sum_{s=0}^{m+n} c_s L_s^{(\alpha+\beta)}(x) = \sum_{s=0}^{m+n} b_s \frac{x^s}{s!};$$

con

$$c_s = (-1)^{m+n+s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} \binom{m+\alpha}{n-s+r} \binom{n+\beta}{m-r},$$

e

$$b_s(m, n; \alpha, \beta) = (-1)^{m+n} c_s(m, n; \beta-m+n, \alpha+m-n).$$

Da [24] si ricava, in primo luogo, l'inversione di [23]. Tenendo poi conto della formula

$$L_s^{(\alpha+\beta)}(x) = \frac{1}{2^s} \sum_{k=0}^s \binom{s+\alpha+\beta}{s-k} L_k^{\alpha+\beta}(2x),$$

<sup>(1)</sup> E. FELDHEIM, *Expansion and integral-Transforms for Products of Laguerre and Hermite Polynomials*. « Quarterly Journ. of Math. », vol. 11, (1940), pag. 18-29.

e sostituendo nella [24], si avrà

$$L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \frac{1}{2^s} \left\{ \sum_{r=0}^{m+n-k} \frac{c_{k+r}(1+\alpha+\beta+k)_r}{2^r r!} \right\} L_k^{(\alpha+\beta)}(2x) .$$

Si possono stabilire in tal modo delle generalizzazioni per le formule [1]; e relazioni di questa natura sono state già trovate con altro metodo nel nostro lavoro citato, a pag. 359, nota 1.