ACTA
Vol. VI - N. 3

SULL' EQUAZIONE DEL MOTO SMORZATO CON PARAMETRI VARIABILI E SU UN CASO DI INSTABILITÀ (*)

ENZO FOÀ

SVMMARIVM. — Auctor, professoris GRAFFI, magistri sui, vestigia secutus, exponit integrationem vero proximam (superiore quoque erroris limite perpenso) pro aequatione motus restincti, lineari secundi ordinis et cuius coëfficientia sint variabilia; solutionum valorem in peculiari quodam casu perpendit.

1. - Si abbia l'equazione differenziale del 2° ordine

$$y'' + 2py' + q^2 y = 0 \tag{1}$$

dove y è la funzione incognita della variabile indipendente t che identificheremo col tempo, e p e q due parametri. È ben noto che se p e q sono costanti, con $p > 0$ e $p^2 - q^2 < 0$ la [1] rappresenta l'equazione di un moto armonico smorzato e l'integrazione della [1] è molto facile. Più complesso diventa il problema se p e q sono variabili col tempo pur essendo in ogni istante $p^2 < q^2$. Noi esporremo in questa Nota dapprima una integrazione approssimata della [1] valendoci di un risultato del GRAFFI (1) determinando anche un valore maggiorante

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Tullio Levi-Civita nella Tornata del 30 novembre 1941.

(1) D. GRAFFI, *Gli invarianti adiabatici come metodo d'integrazione approssimata di equazioni differenziali*. «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», serie VI-XV, 1932, pag. 657.

D. GRAFFI, *Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici*. «Annali di Matematica», IV-XV, 1936, pag. 87.

dell'errore commesso con questa approssimazione. Poi, presa in esame l'equazione particolare

$$y'' + 2py' + (A^2 e^{2\lambda t} + p^2)\, y = 0$$

con A, p, λ costanti positive, dimostreremo un curioso caso di instabilità. Proveremo infatti che, pure essendo $p > 0$ cioè presente lo smorzamento, al tendere di t all'infinito y tende allo zero; ma se $p < \frac{\lambda}{2}$, la y' non tende allo zero, anzi in certi istanti diventa grande quanto si vuole; se invece $p > \frac{\lambda}{2}$, y' per t tendente all'infinito tende allo zero e la y è soluzione stabile della [1]. Questo teorema si comprende e potrebbe anche dedursi dai risultati del Wiman [1] per l'equazione di un moto non smorzato (cioè per la [1] con $p = 0$) ma abbiamo creduto opportuno ottenerlo in modo del tutto indipendente da queste memorie.

2. – Facciamo nella [1] la sostituzione ben nota

$$[2] \qquad y = e^{-\int_0^t p\, dt}\, x$$

dove x è una nuova incognita; otteniamo subito:

$$[3] \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = -(q^2 - p^2 - p')\, x = -\omega^2 x$$

con ovvio significato del simbolo ω, che supporremo in ogni istante positivo.

Ora il Graffi [2] ha dato la seguente soluzione di [1]. Posto

$$[4] \qquad x = \sqrt{\frac{2J}{\omega}}\, \operatorname{sen} \vartheta \qquad x' = \sqrt{2J\omega}\, \cos \vartheta$$

(1) A. Wiman, *Über eine Stabilitatfrage in der theorie der linearen differentialgleichungen*, « Acta Mathematica », 66, 1936, pag. 121.

(2) Vedi memorie citate.

dove J e ϑ sono nuove funzioni (incognite) della variabile t, si trova la relazione

$$[5] \qquad J = J_0 e^{-\int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\vartheta \, dt} \qquad \vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega \, dt + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \operatorname{sen} 2\vartheta \, dt$$

dove J_0 e ϑ_0 sono i valori iniziali di J e ϑ calcolabili facilmente mediante le [4] e [2] dai valori iniziali di y e y'. Le formule di [5] non permettono però il calcolo esplicito di J e ϑ perchè contengono a 2° membro gli integrali da 0 a t di $\frac{\omega'}{\omega} \cos 2\vartheta$ e $\frac{\omega'}{\omega} \operatorname{sen} 2\vartheta$ che sono incogniti perchè dipendenti da ϑ; ma supponendo ω variabile lentamente col tempo, considerazioni che si riconnettono alla teoria degli invarianti adiabatici, inducono a ritenere gli integrali ora citati, trascurabili, e del resto esporremo fra poco il metodo che assicura la validità di tale ipotesi. Allora le [5] si riducono a

$$[6] \qquad J = J_0 \qquad \vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega \, dt$$

Perciò per le [4] e [6] la soluzione approssimata della [1] è espressa dalle

$$[7] \quad \left\{ \begin{aligned} y &= e^{-\int_0^t p\,dt} x = \frac{e^{-\int_0^t p\,dt} \sqrt{2 J_0}}{\sqrt[4]{q^2 - p^2 - p'}} \operatorname{sen} \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} \, dt \right\} \\ y' &= -p e^{-\int_0^t p\,dt} x + e^{-\int_0^t p\,dt} x' = -\frac{p e^{-\int_0^t p\,dt} \sqrt{2 J_0}}{\sqrt[4]{q^2 - p^2 - p'}} \operatorname{sen} \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} \, dt \right\} + \\ &\quad + e^{-\int_0^t p\,dt} \sqrt{2 J_0} \sqrt[4]{q^2 - p^2 - p'} \cos \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} \, dt \right\} \end{aligned} \right.$$

Le [7] rappresentano una soluzione approssimata di [1]. L'approssimazione sarà tanto maggiore quanto più piccoli in valore assoluto sono gli integrali

$$\mathrm{I}(t) = \int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\vartheta \, dt \quad ; \qquad \mathrm{I}'(t) = \int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \operatorname{sen} 2\vartheta \, dt$$

Ora il Graffi ha dimostrato che

$$[8] \qquad |\mathrm{I}(t)| \leq \Delta_m a' \int_0^t |a'| \, dt + \left(\frac{1}{2} + \pi e^{\Delta_m a}\right) \Delta_m a \int_0^t |a'| \, dt + \Delta_m a$$

dove a vale $\log \omega$ e $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$ sono rispettivamente i massimi in $(0, t)$ di

$$\Delta a = \int_t^{t+\mathrm{T}(t)} |a'| \, dt \qquad \Delta a' = \frac{\int_t^{t+\mathrm{T}(t)} |a''| \, dt \, \mathrm{T}(t)}{\Delta_m a} \qquad \mathrm{T}(t) = \frac{2\pi}{\omega(t)} .$$

Poichè identica limitazione vale per $\mathrm{I}'(t)$ si conclude che quanto più piccolo è il 2° membro di [8] (cioè tanto più piccoli sono $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$) tanto più approssimata è la nostra integrazione. Anzi la [8] ci dà facile modo di valutare questa approssimazione.

3. – Applichiamo ora i risultati ottenuti all'equazione:

$$[9] \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2p \frac{dy}{dt} + (\mathrm{A}^2 e^{2\lambda t} + p^2) y = 0$$

con A, p, λ costanti positive.

Soluzioni approssimate di [9] sono date da

$$[10] \begin{cases} y = e^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)t} \sqrt{\dfrac{2\mathrm{J}_0}{\mathrm{A}}} \operatorname{sen}\left[\vartheta_0 + \dfrac{\mathrm{A}}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)\right] \\ y' = -pe^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)t} \sqrt{\dfrac{2\mathrm{J}_0}{\mathrm{A}}} \operatorname{sen}\left[\vartheta_0 + \dfrac{\mathrm{A}}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)\right] + e^{-\left(p-\frac{\lambda}{2}\right)t} \sqrt{2\mathrm{J}_0 \mathrm{A}} \cos\left[\vartheta_0 + \dfrac{\mathrm{A}}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)\right] \end{cases}$$

Si ha poi subito, applicando la [8] e tenendo presente che $T(t) = \frac{2\pi}{A} e^{-\lambda t} < \frac{2\pi}{A}$

$$a' = \lambda \,; \quad \Delta_m a' = 0 \,; \quad \Delta a = T(t)\lambda < \frac{2\pi}{A}\lambda$$

$$\text{[11]} \qquad I(t) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \pi e^{\frac{2\pi\lambda}{A}}\right) \frac{2\pi\lambda^2}{A} t + \frac{2\pi\lambda}{A}$$

e analoga limitazione vale per $I'(t)$. In base alle [5] e [7] e [1] la soluzione esatta di [9] sarebbe però data da

$$\text{[12]} \begin{cases} y = e^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)t - I(t)} \sqrt{\frac{2 J_0}{A}} \operatorname{sen}\left[\vartheta_0 + \frac{A}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) + \frac{I'(t)}{2}\right] \\ y' = -pe^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)t - I(t)} \sqrt{\frac{2 J_0}{A}} \operatorname{sen}\left[\vartheta_0 + \frac{A}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) + \frac{I'(t)}{2}\right] + \\ \qquad + e^{-\left(p-\frac{\lambda}{2}\right)t - I(t)} \sqrt{2 J_0 A} \cos\left[\vartheta_0 + \frac{A}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) + \frac{I'(t)}{2}\right] \end{cases}$$

Esaminiamo ora le [10]. È interessante notare che se $\frac{\lambda}{2} > p$ la y tende allo zero per $t \to \infty$ mentre il valore di y' in certi istanti e in particolare quelli in cui l'argomento del coseno di [10] assume il valore $k\pi$ (k intero), tendono al trascorrere del tempo a crescere esponenzialmente, cioè a diventar grandi quanto si vuole. In altre parole, al tendere di t all'infinito, se y rappresentasse la coordinata di un punto mobile, la sua posizione tende a zero, mentre, in sostanza, la velocità compie oscillazioni la cui ampiezza tende all'infinito. Il moto sarebbe dunque instabile anche in presenza di smorzamento.

Invece se $p > \frac{\lambda}{2}$, anche y' tende allo zero per $t \to \infty$ e il moto è stabile.

Ma questa deduzione non è però rigorosa perchè abbiamo trascurato i termini $I(t)$ e $I'(t)$ di cui, per ora, non abbiamo esaminato il comportamento all'infinito. Per far ciò, premettiamo la seguente osservazione essenziale. Se nella formula [9] spostiamo l'origine dei tempi, cioè cambiano t in t' ponendo

$$t' = t - t_0$$

dell'errore commesso con questa approssimazione. Poi, presa in esame l'equazione particolare

$$y'' + 2py' + (A^2 e^{2\lambda t} + p^2)\, y = 0$$

con A, p, λ costanti positive, dimostreremo un curioso caso di instabilità. Proveremo infatti che, pure essendo $p > 0$ cioè presente lo smorzamento, al tendere di t all'infinito y tende allo zero; ma se $p < \frac{\lambda}{2}$, la y' non tende allo zero, anzi in certi istanti diventa grande quanto si vuole; se invece $p > \frac{\lambda}{2}$, y' per t tendente all'infinito tende allo zero e la y è soluzione stabile della [1]. Questo teorema si comprende e potrebbe anche dedursi dai risultati del WIMAN [1] per l'equazione di un moto non smorzato (cioè per la [1] con $p = 0$) ma abbiamo creduto opportuno ottenerlo in modo del tutto indipendente da queste memorie.

2. – Facciamo nella [1] la sostituzione ben nota

[2] $$y = e^{-\int_0^t p\,dt}\, x$$

dove x è una nuova incognita; otteniamo subito:

[3] $$\frac{d^2 x}{dt^2} = -(q^2 - p^2 - p')\, x = -\,\omega^2 x$$

con ovvio significato del simbolo ω, che supporremo in ogni istante positivo.

Ora il GRAFFI [2] ha dato la seguente soluzione di [1]. Posto

[4] $$x = \sqrt{\frac{2J}{\omega}}\, \operatorname{sen} \vartheta \qquad x' = \sqrt{2J\omega}\, \cos \vartheta$$

---

(1) A. WIMAN, *Über eine Stabilitatfrage in der theorie der linearen differentialgleichungen*, « Acta Mathematica », 66, 1936, pag. 121.

(2) Vedi memorie citate.

dove J e ϑ sono nuove funzioni (incognite) della variabile t, si trova la relazione

$$[5] \qquad J = J_0 e^{-\int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\vartheta \, dt} \qquad \vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega \, dt + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \operatorname{sen} 2\vartheta \, dt$$

dove J_0 e ϑ_0 sono i valori iniziali di J e ϑ calcolabili facilmente mediante le [4] e [2] dai valori iniziali di y e y'. Le formule di [5] non permettono però il calcolo esplicito di J e ϑ perchè contengono a 2° membro gli integrali da 0 a t di $\frac{\omega'}{\omega} \cos 2\vartheta$ e $\frac{\omega'}{\omega} \operatorname{sen} 2\vartheta$ che sono incogniti perchè dipendenti da ϑ; ma supponendo ω variabile lentamente col tempo, considerazioni che si riconnettono alla teoria degli invarianti adiabatici, inducono a ritenere gli integrali ora citati, trascurabili, e del resto esporremo fra poco il metodo che assicura la validità di tale ipotesi. Allora le [5] si riducono a

$$[6] \qquad J = J_0 \qquad \vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega \, dt$$

Perciò per le [4] e [6] la soluzione approssimata della [1] è espressa dalle

$$[7] \quad \left\{ \begin{aligned} y &= e^{-\int_0^t p\,dt} x = \frac{e^{-\int_0^t p\,dt} \sqrt{2 J_0}}{\sqrt[4]{q^2 - p^2 - p'}} \operatorname{sen} \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} \, dt \right\} \\ y' &= -p e^{-\int_0^t p\,dt} x + e^{-\int_0^t p\,dt} x' = -\frac{p e^{-\int_0^t p\,dt} \sqrt{2 J_0}}{\sqrt[4]{q^2 - p^2 - p'}} \operatorname{sen} \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} \, dt \right\} + \\ &\quad + e^{-\int_0^t p\,dt} \sqrt{2 J_0} \sqrt[4]{q^2 - p^2 - p'} \cos \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} \, dt \right\} \end{aligned} \right.$$

dove t_0 è una costante, l'equazione [9] rimane invariata soltanto A va sostituita dalla costante $Ae^{\lambda t_0}$. Ora preso t_0 sufficientemente grande si può rendere questa costante grande quanto si vuole. Si conclude dunque che con una opportuna scelta dell'origine del tempo l'equazione [9] a cui soddisfa la y rimane la stessa solo che la costante che moltiplica l'esponenziale $e^{\lambda t}$ (e che potremo senza pericolo di equivoci indicare ancora con A[2]) si può scegliere grande quanto si vuole e in particolare soddisfaciente alla diseguaglianza (essendo α un numero positivo inferiore a $\frac{\lambda}{2}-p$; ammetteremo cioè $\frac{\lambda}{2}>p$)

$$[13] \qquad \frac{\lambda}{2}-p>\alpha \geqslant \left(\frac{1}{2}+\pi e^{\frac{2\pi\lambda}{A}}\right)\frac{2\pi\lambda^2}{A}$$

Quindi (¹)

$$[14] \qquad |I(t)| \leqslant \alpha t + \frac{2\pi\lambda}{A} \qquad |I'(t)| \leqslant \alpha t + \frac{2\pi\lambda}{A}$$

Ciò posto, riprendiamo la prima di [12]. Poichè si ha

$$[14'] \qquad e^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)t+I(t)} \leqslant e^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)t+|I(t)|} \leqslant e^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)t}\, e^{\frac{2\pi\lambda}{A}}$$

e poichè α è minore di $\frac{\lambda}{2}-p$ e quindi di $\frac{\lambda}{2}+p$ si vede subito che il limite del secondo membro di [14'] per $t\to\infty$ è nullo, quindi tale sarà anche il limite del primo. Allora dalla prima di [12], essendo il seno sempre limitato si deduce che

$$\lim_{t\to\infty} y=0$$

Studiamo ora la y'. Osserviamo che l'argomento ϑ del seno e del coseno che compaiono nella sua espressione tende all'∞ per $t\to\infty$ e

(¹) Anche se l'origine è spostata indicheremo ancora per semplicità il tempo con t.

ciò perchè i primi due termini di ϑ tendono a infinito, per $t \to \infty$, in modo esponenziale, mentre l'ultimo $\mathrm{I}'(t)$, per la [11] anche se tendesse a $-\infty$, vi tenderebbe al più in modo lineare. Perciò esisterà una successione di istanti tendente all'infinito $t_1, t_2, \ldots t_n \ldots$ per cui è $t_n = n\pi$ (n intero). Allora i valori assoluti di y' in questo istante saranno

$$|y'(t_n)| = e^{-\left(p-\frac{\lambda}{2}\right)t_n + \mathrm{I}(t_n)} \sqrt{2\mathrm{J}_0\mathrm{A}} > e^{-\left(p-\frac{\lambda}{2}\right)t_n - |\mathrm{I}(t_n)|} \sqrt{2\mathrm{J}_0\mathrm{A}} > \sqrt{2\mathrm{J}_0\mathrm{A}}\, e^{\left(\frac{\lambda}{2}-p-\alpha\right)t_n} e^{-\frac{2\pi\lambda}{\mathrm{A}}} =$$

[15]

$$= \sqrt{2\mathrm{J}_0\mathrm{A}}\, e^{\left(\frac{\lambda}{2}-p-\alpha\right)n\pi} e^{-\frac{2\pi\lambda}{\mathrm{A}}}$$

Ora nell'esponente, il coefficiente $\frac{\lambda}{2} - p - \alpha$ di πn è, per l'ipotesi fatta su α, positivo, perciò $|y'(t_n)|$ per $n \to \infty$ ossia $t_n \to \infty$, tende $a + \infty$. Il moto è perciò instabile. Si avrà la stabilità del moto se $p > \frac{\lambda}{2}$. Per provare ciò si supponga di aver scelto A in modo che valgano ancora le [14], [14'] dove ora però α è inferiore a $p - \frac{\lambda}{2}$. Allora per i due esponenziali che compaiono nelle [12] si può scrivere:

$$e^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)t + \mathrm{I}(t)} \leqslant e^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)t + \alpha t + \frac{2\pi\lambda}{\mathrm{A}}} = e^{\frac{2\pi\lambda}{\mathrm{A}}} e^{-\left(p+\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)t} e^{-\lambda t}$$

$$e^{-\left(p-\frac{\lambda}{2}\right)t + \mathrm{I}(t)} < e^{-\left(p-\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)t} e^{-\frac{2\pi\lambda}{\mathrm{A}}}$$

Poiché $\alpha < p - \frac{\lambda}{2}$ e $p > \frac{\lambda}{2}$ i secondi membri di queste diseguaglianze tendono per $t \to \infty$ allo zero: altrettanto perciò succederà per i primi. Allora passando al limite per $t \to \infty$ nelle [12] si avrà:

$$\lim_{t \to \infty} y = 0 \qquad \lim_{t \to \infty} y' = 0$$

e ciò dimostra la stabilità della soluzione.