

RIDUZIONE A FORMA SIMMETRICA
DELLE ESPRESSIONI
PER LE GRANDEZZE CARATTERISTICHE
DEI CAMPI GRAVITAZIONALI ED ELETTRICI^(*)

LETTERIO LABOCETTA

SUMMARY. — Si et unitas quantitatis materiae et unitas quantitatis electricae aequae definiuntur tamquam ea quantitas agentis quae ab eadem distantia, attrahendo vel repellendo tantum operetur quantum est roboris unitas, conficitur: constans gravitationale $\kappa^2 = (q/m_1)^2$ esse quadratum relationis inter quantitatem materiae et neutronis massam; constans dielectricum $\sigma^2 = (e/m_2)^2$ esse quadratum relationis inter caricam et massam electronis; relationem inter haec duo constantia esse constans cosmicum $\psi'' = (e/q)^2 (m_1/m_2)^2$, qui est numerus purus; ex quo cum (e/q) necessario sit numerus purus, consequitur hanc etiam materiae quantitatem eiusdem esse generis, quod attinet ad dimensionem, ac quantitas electrica.

Le unità del sistema C. G. S. sono puramente cinetiche. Per giungere con esse ad esprimere le grandezze gravitazionali ed elettriche si procede, come è noto, in due modi del tutto diversi.

Per le unità gravitazionali, ponendo la massa cinetica proporzionale a quella ponderale e quindi alla quantità di materia, come unità di quantità di materia si assume quella corrispondente all'unità di massa cinetica ed allora nella espressione della legge di NEWTON bisogna introdurre un coefficiente dimensionale che è la costante gravitazionale k .

Per le unità elettriche, assumendo come unità di quantità di elettricità quella carica che attira con l'unità di forza una carica uguale

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Luigi Lombardi, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

e di segno contrario posta nello spazio vuoto all'unità di distanza, la legge di COULOMB conduce a porre uguale all'unità la costante dielettrica che dovrebbe corrispondere a quella gravitazionale.

Si hanno perciò due forme diverse come espressioni di queste due leggi:

$$[1] \quad F_1 = k \frac{M_1 M_2}{R^2}, \quad F_2 = \frac{E_1 E_2}{R^2}.$$

La dissimetria di queste due formule fondamentali si riproduce poi in tutte le altre espressioni che da esse derivano; cosicchè per l'intensità del campo, il potenziale e la densità dell'energia in un punto dello spazio, fuori del corpo attraente, si hanno, secondo che si tratta di un campo gravitazionale od elettrico, le due serie di espressioni:

$$[2] \quad f_1 = \frac{k M_1}{R^2}, \quad U_1 = \frac{k M_1}{R}, \quad \Delta_1 = \frac{f_1^2}{8\pi k}$$

$$[3] \quad f_2 = \frac{E_1}{R^2}, \quad U^2 = \frac{E_1}{R}, \quad \Delta_2 = \frac{f_2^2}{8\pi}$$

Questa disimmetria non esiste se si adoperano le *unità atomiche naturali*, come da me definite⁽¹⁾, delle quali io ho sempre fatto uso, giacchè con esse le due serie di espressioni [2] e [3] risultano perfettamente simmetriche e corrispondenti.

Non è però senza interesse il ricercare se ad una forma simmetrica delle espressioni per le grandezze gravitazionali ed elettriche si possa pervenire, pur conservando sostanzialmente i concetti ai quali è informato il sistema C. G. S. E l'interesse non è soltanto formale perchè, come si vedrà, la riduzione a forma simmetrica delle due serie di espressioni conduce a mettere in evidenza delle relazioni d'importanza veramente fondamentale che la dissimetria delle espressioni aveva finora impedito di scorgere.

⁽¹⁾ In un precedente scritto: *Le costanti numeriche caratteristiche dello spazio fisico*. « Act. Pont. Acc. Scient. Nov. Lync. », anno LXXXVIII, Sessio V (Maggio 1935).

A tale scopo, riprendendo una idea già ripetutamente applicata⁽¹⁾, si definiscano in modo analogo le quantità di materia e di elettricità; si assuma cioè come unità di materia (di elettricità) quella quantità di materia (di elettricità) che collocata all'unità di distanza da una eguale quantità dia luogo ad una attrazione (ripulsione) misurata dall'unità di forza.

Con questa convenzione la legge di NEWTON, e quella di COULOMB, indicando con Q la quantità di materia e con E quella di elettricità, prendono la forma

$$[4] \quad F_1 = \frac{Q_1 Q_2}{R^2}, \quad F_2 = \frac{E_1 E_2}{R^2}.$$

Queste due formule, se si indica con q la quantità di materia di un neutrone⁽²⁾, con e la carica di un elettrone, e con N un numero intero, ponendo cioè per la quantità di materia (di elettricità) $Q = qN$, $E = eN$, diventano

$$[5] \quad F_1 = \frac{q^2 N_1 N_2}{R^2}, \quad F_2 = \frac{e^2 N_1 N_2}{R^2}$$

e queste due nuove espressioni alla loro volta, indicando con m_1, m_2 rispettivamente le masse, cinetiche, del neutrone e dell'elettrone, si possono identicamente scrivere

$$[6] \quad F_1 = \left(\frac{q}{m_1}\right)^2 \left(\frac{m_1}{R}\right)^2 N_1 N_2, \quad F_2 = \left(\frac{e}{m_2}\right)^2 \left(\frac{m_2}{R}\right)^2 N_1 N_2.$$

Poniamo per semplicità di scrittura $q/m_1 = z$, $e/m_2 = \sigma$ e con ciò le relazioni [6] potranno pure scriversi

$$[7] \quad F_1 = z^2 \left(\frac{m_1}{R}\right)^2 N_1 N_2, \quad F_2 = \sigma^2 \left(\frac{m_2}{R}\right)^2 N_1 N_2$$

⁽¹⁾ Vedi ad es. W. THOMPSON and P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, pag. 9, Vol. I, University Press. Cambridge, 1883.

⁽²⁾ Si considera per maggiore semplicità un corpo costituito soltanto di neutroni per eliminare l'effetto di ogni azione elettrica dovuta alla carica dei protoni e degli elettroni; e d'altra parte è evidente che per un corpo allo stato neutro l'azione delle dette cariche è nulla.

essendo evidentemente κ^2, σ^2 la costante gravitazionale e la costante dielettrica dello spazio vuoto. Si deve cioè avere $\kappa^2 = k$ e poichè le due costanti κ^2, σ^2 devono essere dimensionalmente identiche, affinché possano essere verificate entrambe le [7], ne segue dimensionalmente si deve avere pure

$$[8] \quad [\kappa^2] \equiv [\sigma^2] \equiv [k] \equiv M^{-1} L^3 T^{-2}$$

risultato questo al quale già ero giunto per altra via, appunto in una precedente ricerca⁽¹⁾ sul significato della costante σ . Ma qui l'apparizione contemporanea e parallela delle due costanti κ, σ nelle espressioni [7] delle due leggi di NEWTON e di COULOMB porta a delle conseguenze notevoli che vanno subito rilevate.

Anzitutto discende dalla [7] una definizione assoluta, identica, delle due costanti gravitazionale e dielettrica che le collega direttamente alle *costanti fisiche fondamentali discontinue*; si ha infatti:

La costante gravitazionale κ^2 è il quadrato di rapporto fra la quantità di materia del neutrone e la sua massa⁽²⁾.

La costante dielettrica σ^2 , del vuoto, è il quadrato del rapporto fra la carica dell'elettrone e la sua massa, cioè il quadrato della carica specifica dell'elettrone.

Mentre dunque nella definizione ordinaria di queste due costanti apparisce una distanza, dovendosi avere, per la costante gravitazionale ad esempio,

$$[9] \quad k = F_1 R^2 / M_1 M_2$$

qui la distanza nella definizione di $k = \kappa^2$ è scomparsa e ciò in armonia col fatto che κ e σ debbono esprimere una proprietà intrinseca dei punti dello spazio indipendente dalla distanza R alla quale casualmente possono venire a trovarsi due corpi, o due cariche, in presenza e che, nel fatto, varia durante il moto.

⁽¹⁾ *La carica specifica dell'elettrone e la costante gravitazionale.* « La ricerca scientifica », IX, 1, Gennaio 1938, n. 1-2, pag. 41.

⁽²⁾ Il valore di questo rapporto q/m_1 si è presentato, come è noto, in altre ricerche, essendo appunto \sqrt{k} l'espressione della durata, in secondi, dell'ora naturale. Vedi G. LIPPMANN, *Sur la mesure absolue du temps déduite des lois de l'attraction universelle*, « C. R. de l'Académie des Sciences », 8. V. 1899.

Poi la nuova definizione delle due costanti, presa insieme con la relazione dimensionale [8], permette di scrivere immediatamente il loro valore, in forma assoluta mediante le unità atomiche naturali delle quali io mi servo. Chiamando infatti $\lambda_1, \mu_1, \tau_1, \lambda_2, \mu_2, \tau_2$ le unità atomiche naturali gravitazionali ed elettriche di lunghezza, di massa, di tempo la [8] mostra che si deve avere

$$[10] \quad \kappa^2 = \mu_1^{-1} \lambda_1^3 \tau_1^{-2}, \quad \sigma^2 = \mu_2^{-1} \lambda_2^3 \tau_2^{-2}.$$

La prima di queste due espressioni era stata già indicata in un mio precedente scritto⁽¹⁾ ed alla seconda si potrebbe giungere con un analogo ragionamento; ma, in modo più semplice, basta osservare che sostituendo nelle [10] i valori delle unità naturali, gravitazionali ed elettriche,

$$[11] \quad \mu_1 = m_1, \quad \lambda_1 = k m_1 / c^2, \quad \tau_1 = k m_1 / c^3$$

$$[12] \quad \mu_2 = m_2, \quad \lambda_2 = e^2 / m_2 c^2, \quad \tau_2 = e^2 / m_2 c^3$$

si ottiene identicamente

$$[13] \quad \mu_1^{-1} \lambda_1^3 \tau_1^{-2} = k, \quad \mu_2^{-1} \lambda_2^3 \tau_2^{-2} = (e/m_2)^2.$$

Inoltre dalla identità dimensionale delle due costanti κ^2, σ^2 segue che il loro rapporto

$$[14] \quad (\sigma/\kappa)^2 = (e/q)^2 (m_1/m_2)^2 = (\mu_1/\mu_2)^{-1} (\lambda_1/\lambda_2)^3 (\tau_1/\tau_2)^{-2}$$

deve essere un numero puro essendo dato da un prodotto di rapporti di grandezze omogenee.

Avviene poi che questo numero è una delle *costanti cosmiche* e ricordo a questo proposito che sono tre le costanti cosmiche nascenti appunto dal confronto fra le azioni gravitazionali e quelle elettriche

$$[15] \quad \psi = \frac{e^2}{k m_1^2}, \quad \psi' = \frac{e^2}{k m_1 m_2}, \quad \psi'' = \frac{e^2}{k m_2^2}$$

⁽¹⁾ Una definizione assoluta della costante della gravitazione. « Atti S. I. P. S. », XXIII Riun. Napoli 11-17 Ottobre, 1934, Vol. II, pag. 309-310.

legate fra loro, come ho mostrato in un precedente scritto⁽¹⁾ da una relazione semplicissima

$$[16] \quad \psi' = \psi \mu_0, \quad \psi'' = \psi \mu_0^2$$

se si chiama μ_0 il rapporto della massa del protone a quella dell'elettrone.

Introducendo poi per k il suo valore innanzi trovato $(q/m_1)^2$ si hanno anche per le dette tre costanti le espressioni

$$[17] \quad \psi = \left(\frac{e}{q}\right)^2, \quad \psi' = \left(\frac{e}{q}\right)^2 \mu_0, \quad \psi'' = \left(\frac{e}{q}\right)^2 \mu_0^2$$

le quali mettono meglio in evidenza in qual modo, nella espressione della costante cosmica, intervengano i due rapporti: quello della carica dell'elettrone alla quantità di materia del neutrone e quello delle due masse del neutrone e dell'elettrone.

La costante cosmica che nella [14] si presenta è quella ψ'' che fra le tre ha il valore maggiore.

Apparece perciò che il rapporto fra le costanti dielettrica e gravitazionale, che sono dimensionalmente omogenee, è un numero puro e precisamente la costante cosmica maggiore.

Da questa constatazione ne discende una conseguenza assai importante ed è la seguente. Poichè il rapporto $(\sigma/\kappa)^2 = \psi''$ è un numero puro ed esso risulta a sua volta dal prodotto di due fattori $(m_1/m_2)^2$, $(e/q)^2$ uno dei quali $(m_1/m_2)^2$ è il rapporto di due quantità omogenee, l'altro fattore $(e/q)^2$ deve essere un numero puro anch'esso.

Ciò significa dunque che la quantità di materia è una grandezza omogenea con la quantità di elettricità.

Questo risultato è d'altra parte una immediata necessaria conseguenza delle definizioni date con le [4] e [5].

In conclusione si scorge che vi è perfetta omogeneità fra tutte le grandezze gravitazionali ed elettriche. Ciò costituisce una generalizza-

⁽¹⁾ Costante gravitazionale, costante elettrica e costante cosmica. « La ricerca scientifica », IX-2, Novembre 1938, n. 9-10, pag. 628.

zione completa dei risultati ai quali ero giunto in precedenti scritti⁽¹⁾ sulla corrispondenza che esiste fra campi gravitazionali ed elettrici. Ma più direttamente a quei risultati si perviene, come appunto qui si è visto, adottando un criterio unico ed uniforme per la definizione delle unità fondamentali dei due casi. Nell'applicazione di questo criterio si possono seguire due vie diverse: una è quella di mettere in evidenza in entrambi i casi la quantità di agente, estendendo alla quantità di materia la definizione adottata per la quantità di elettricità e così procedendo le due costanti gravitazionale ed elettrica vengono a sparire riducendosi l'una e l'altra all'unità; l'altra via è quella invece di mettere in evidenza queste due costanti estendendo alla definizione della quantità di elettricità quella adottata per la quantità di materia e così facendo si mettono in evidenza le masse associate alle quantità di materia e di elettricità, mentre queste quantità restano implicitamente contenute nelle due costanti gravitazionali e dielettrica. L'introduzione infine nelle espressioni così ottenute delle unità naturali gravitazionali ed elettriche, carica e massa dell'elettrone e quantità di materia e massa del neutrone, conduce ad eliminare, ogni coefficiente dimensionale introducendo, come si è visto, dei numeri interi per la misura delle quantità di materia, di elettricità e delle corrispondenti masse, le quali grandezze tutte cessano di essere continue e diventano quantificate.

Così le espressioni [2], [3] per l'intensità del campo, il potenziale e la densità dell'energia, divengono, nei campi gravitazionali ed elettrici

$$[18] \quad f_1 = \frac{\kappa^2 m_1 N_1}{R^2}, \quad U_1 = \frac{\kappa^2 m_1 N_1}{R}, \quad \Delta_1 = \frac{f_1^2}{8\pi \kappa^2}$$

$$[19] \quad f_2 = \frac{\sigma^2 m_2 N_1}{R^2}, \quad U_2 = \frac{\sigma^2 m_2 N_1}{R}, \quad \Delta_2 = \frac{f_2^2}{8\pi \sigma^2}$$

In entrambe le due serie di espressioni si ha, simmetricamente, che l'intensità del campo ha la dimensione di una accelerazione che

⁽¹⁾ *L'omogeneità dei campi gravitazionali elettrici*. «La ricerca scientifica». IX-1, Giugno 1938, n. 11-12, pag. 636.

La similitudine fisica fondamentale. «La ricerca scientifica», IX-2, Dicembre 1938, n. 11-12, pag. 734.

moltiplicata per una massa dà una forza; il potenziale ha le dimensioni del quadrato di una velocità, cosicchè moltiplicato per una massa dà un lavoro e così pure dà un lavoro la densità dell'energia, che ha le dimensioni di una pressione, quando venga moltiplicata per un volume.

Inoltre in esse non appaiono più che le due masse del neutrone e dell'elettrone e le due costanti κ^2 , σ^2 , nelle quali sono implicitamente contenute la quantità di materia q del neutrone e la carica e dell'elettrone, corrispondenti ai due modi di distribuzione della densità dell'energia nei campi gravitazionali ed elettrici.

Quali siano questi due modi di distribuzione della densità dell'energia è stato messo in chiaro in due precedenti scritti nei quali ho mostrato che: nel caso dei campi elettrici⁽¹⁾ la densità è sempre dello stesso segno in tutto lo spazio, positiva o negativa, dal centro dell'elettrone al quale è dovuto il campo (positrone e negatrone) sino all'infinito; nel caso dei campi gravitazionali invece⁽²⁾ la densità dell'energia è positiva all'interno della sfera normale, anzi *uniformemente normale*, formata con la massa del neutrone ed è negativa nello spazio esterno compreso fra la superficie di detta sfera e l'infinito.

(1) *La massa dell'elettrone in riposo*. « La ricerca scientifica », VII-1, marzo 1937-xv, n. 5-6, pag. 228.

(2) *Energia potenziale e curvatura nei campi gravitazionali*. « R. C. Acc. Naz. Lincei », Vol. XXV, pag. 122-128, Febbraio 1937.