

SULLA IMAGINE PROIETTIVA DELLE SERIE E DEI SISTEMI D'EQUIVALENZA ELEMENTARI SOPRA UNA VARIETÀ (*)

ENZO MARTINELLI

SYMMARIUM. -- Generali ratione ostenditur notio imaginis projectivae systematis aequivalentiae elementaris; cuius imaginis, quam MARONI iam invexerat pro serie aequivalentiarum elementarium, quaedam notae peculiares plenius perpenduntur.

1. Mi propongo di estendere la nozione di immagine proiettiva di una serie lineare sopra una curva o di un sistema lineare sopra una varietà, e talune proprietà di quest'immagine, al caso di una serie e di un sistema d'equivalenza elementari sopra una varietà.

Limitatamente al caso di una serie d'equivalenza sopra una superficie, il MARONI⁽¹⁾ ha già indicato vari procedimenti, che permettono di ottenere immagini proiettive della serie. Io ho fissato l'attenzione sopra uno di questi, che mi sembra il più opportuno. La sua opportunità voglio appunto dimostrare - presentandolo in generale per le serie e per i sistemi d'equivalenza sopra una varietà di dimensione qualunque - col far vedere che è possibile di perseguire un pò più a fondo l'analogia con il caso delle serie e dei sistemi lineari.

In sostanza, come l'immagine proiettiva di una serie o di un sistema lineare, di dimensione r , si ottiene entro uno spazio lineare S_r , in relazione alle sezioni della varietà immagine con gli spazi lineari S_{r-1}

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) Cfr. A. MARONI. *Scritti matematici offerti a L. Berzolari*, Pavia (1936), pag. 511.

subordinati ad S_r , così l'immagine proiettiva di una serie o di un sistema d'equivalenza, di dimensione r , si ottiene entro una varietà di SEGRE M_r di specie s conveniente, in relazione alle sezioni della varietà immagine con le varietà di SEGRE M_{r-s} subordinate ad M_r . E come due immagini proiettive in S_r , l'una proiezione dell'altra, rappresentano serie o sistemi lineari l'uno subordinato all'altro, così due immagini proiettive in M_r , ottenuta l'una dall'altra mediante una certa trasformazione analoga alla proiezione ordinaria, e che chiamo « proiezione entro M_r », rappresentano serie o sistemi d'equivalenza l'uno subordinato all'altro.

2. Sopra una varietà irriducibile V_k , a k dimensioni, sia assegnato il sistema d'equivalenza elementare Σ , di dimensione r e di specie h , come intersezione di $k-h$ sistemi lineari di varietà a $k-1$ dimensioni, $|A^{(1)}|$, $|A^{(2)}|$, ..., $|A^{(k-h)}|$. Si suppongano i sistemi lineari preventivamente ridotti ad avere dimensioni r_1, r_2, \dots, r_{k-h} , soddisfacenti alla relazione $r = r_1 + r_2 + \dots + r_{k-h}$: in modo cioè che per la generica varietà W_h di Σ passi una sola $(k-h)$ -pla di varietà $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k-h)}$ ⁽¹⁾. Per $h=0$ il sistema Σ si riduce ad una serie di equivalenza elementare di gruppi di punti su V_k .

Sia M_r la varietà di SEGRE di specie $s = k-h$, che rappresenta le $(k-h)$ -ple di punti estratti da $k-h$ spazi $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$ di dimensioni r_1, \dots, r_{k-h} . Ricordiamo che, quando si pensi M_r come prodotto di questi spazi lineari, ad ogni s -pla di spazi S_{q_1}, \dots, S_{q_s} subordinati a (o coincidenti con) S_{r_1}, \dots, S_{r_s} , corrisponde un prodotto $M_{q_1+\dots+q_s}$, che è anche una varietà di SEGRE, di specie s (o inferiore, se qualcheduno dei q è nullo), contenuta in M_r . Osserviamo inoltre che, entro M_r , sussiste una specie di dualità (prodotto delle dualità esistenti in S_{r_1}, \dots, S_{r_s}), la quale fa corrispondere ad ogni varietà $M_{q_1+\dots+q_s}$ una varietà $M_{r-(q_1+\dots+q_s)-s}$, prodotto degli spazi duali di S_{q_1}, \dots, S_{q_s} nei propri ambienti. In particolare, ai punti di M_r corrispondono, per

⁽¹⁾ Si può soddisfare a questa condizione, per esempio imponendo alle varietà di ciascuno dei sistemi lineari $|A|$ il passaggio per un numero conveniente di punti fissi, scelti in modo generico su V_k .

dualità, le M_{r-s} di una totalità ∞^r (che è a sua volta una varietà di SEGRE M_r di elementi).

Ciò premesso, si pongano $k-h$ corrispondenze proiettive tra le varietà di $|A^{(1)}|, \dots, |A^{(k-h)}|$ e gl'iperpiani di $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$, e ad ogni varietà di Σ intersezione effettiva o virtuale di una $(k-h)$ -pla di varietà $A^{(1)}, \dots, A^{(k-h)}$, si faccia corrispondere la varietà di SEGRE $M_{r-s} = M_{r-k+h}$, contenuta in M_r , prodotto degli $S_{r_1-1}, \dots, S_{r_{k-h}-1}$, corrispondenti proiettivamente ad $A^{(1)}, \dots, A^{(k-h)}$. Vuol dire che, se $A^{(1)}, \dots, A^{(k-h)}$ s'incontrano effettivamente lungo una varietà di dimensione $> h$, alla $(k-h)$ -pla $A^{(1)}, \dots, A^{(k-h)}$ corrispondono infinite varietà di Σ , costituenti un sistema d'equivalenza su una varietà subordinata a $V_k^{(1)}$. Queste infinite varietà appaiono come elementi eccezionali nella corrispondenza che si pone fra Σ e le varietà M_{r-s} di M_r .

Risulta che alle varietà di Σ che contengono un punto P di V_k , corrispondono le M_{r-s} passanti per un punto P' di M_r . Al variare di P su V_k , se Σ è *semplice*, P' descrive in M_r una varietà V'_k in corrispondenza birazionale con V_k . Al sistema Σ su V_k , corrisponde il sistema Σ' segato su V'_k dalla totalità ∞^r delle M_{r-s} di M_r . La varietà V'_k è l'immagine proiettiva di Σ in M_r .

Viceversa, assegnata una varietà V'_k in M_r , il sistema Σ di varietà di dimensione h , segato su V'_k dalle M_{r-s} di M_r , è un sistema d'equivalenza elementare, che può ottenersi come intersezione dei $k-h$ sistemi lineari su V'_k di varietà di dimensione $k-1$, che sono a loro volta intersezione di V'_k con i $k-h$ sistemi lineari su M_r costituiti dalle varietà (di SEGRE, di specie s e di dimensione $r-1$), prodotti degli iperpiani di S_{r_1} con $S_{r_2}, S_{r_3}, \dots, S_{r_{k-h}}$, degli iperpiani di S_{r_2} con $S_{r_1}, S_{r_3}, \dots, S_{r_{k-h}}$, ecc. Naturalmente il sistema Σ' , che in generale risulta di dimensione r , può, per particolari varietà V'_k entro M_r , abbassarsi di dimensione.

OSSERVAZIONE. — Si è supposto che il sistema d'equivalenza Σ sia semplice; in caso contrario occorre distinguere a seconda che esso sia *composto* con un'involuzione di gruppi di punti, o con una con-

(¹) Cfr. F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, (Ed. Cremonese, Roma, 1942), Cap. III, n. 41.

gruenza di varietà di dimensione $l < k$, su V_k . Conseguentemente V' risulta ancora di dimensione k , ovvero di dimensione $k-l$, e non più riferita birazionalmente a V_k , ma soltanto in corrispondenza univoca in un senso con V_k , e nell'altro in corrispondenza d'indice finito (> 1), ovvero infinito. Insomma, non vi è nulla di nuovo rispetto a quanto avviene per le serie e i sistemi lineari.

3. Vediamo come si possa estendere al caso delle serie e dei sistemi d'equivalenza il teorema che lega due serie o sistemi lineari, che abbiano immagini proiettive l'una proiezione dell'altra.

A tal fine, si considerino entro gli spazi $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$, $k-h$ proiezioni eseguite rispettivamente dai centri $S_{q_1}, \dots, S_{q_{k-h}}$ sopra gli spazi $S_{r_1-q_1-1}, \dots, S_{r_{k-h}-q_{k-h}-1}$, essendo $0 \leq r_1 \leq r_1-2, \dots, 0 \leq r_{k-h} \leq r_{k-h}-2$. Il prodotto topologico di tali proiezioni dà luogo ad una trasformazione che chiameremo *proiezione entro* M_r , avente come centro la varietà di SEGRE $M_{q_1+\dots+q_{k-h}} = \Omega_q$, prodotto di $S_{q_1}, \dots, S_{q_{k-h}}$, e come quadro di proiezione la varietà di SEGRE $M_{r-(q_1+\dots+q_{k-h})-s} = \omega_{r-q-s}$, prodotto di $S_{r_1-q_1-1}, \dots, S_{r_{k-h}-q_{k-h}-1}$.

Precisamente, un punto P di M_r (fuori di Ω_q), il quale provenga dal prodotto dei punti $P^{(1)}, \dots, P^{(k-h)}$ rispettivamente in $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$, verrà proiettato entro M_r , da Ω_q sopra ω_{r-q-s} , nel punto P' di ω_{r-q-s} , che è prodotto dei punti $P'^{(1)}, \dots, P'^{(k-h)}$, proiezioni rispettivamente in $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$ dai centri $S_{q_1}, \dots, S_{q_{k-h}}$ sopra gli spazi $S_{r_1-q_1-1}, \dots, S_{r_{k-h}-q_{k-h}-1}$. Altrimenti (senza ricorrere all'immagine offerta dal considerare M_r come prodotto topologico di $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$) si può dire così: un punto P , variabile in M_r , individua insieme ad Ω_q una varietà di SEGRE M_{q+s} subordinata ad M_r , la quale passa per Ω_q e per P , e sega ω_{r-q-s} nel punto P' proiezione di P . Le varietà M_{q+s} , passanti per Ω_q , stanno in luogo degli spazi proiettati nella proiezione ordinaria.

Ciò posto, sia in M_r una varietà V'_k , e V''_k ne sia una proiezione biunivoca entro M_r , eseguita dal centro Ω_q (non appoggiato a V'_k) sopra la varietà di SEGRE ω_{r-q-s} . Al sistema d'equivalenza elementare $\Sigma''_0, \infty^{r-q-s}$, di specie h , segato su V''_k dalle varietà di SEGRE ω_{r-q-2s} subordinate ad ω_{r-q-s} , e duali in ω_{r-q-s} dei punti di ω_{r-q-s} stessa (n. 2), corrisponde su V'_k il sistema segato dalle M_{r-s} di M_r passanti per Ω_q : cioè un sistema d'equivalenza elementare Σ'_0 con-

tenuto totalmente nel sistema Σ', ∞' , segato su V'_k da tutte le M_{r-s} di M_r . E poichè le varietà V'_k, V''_k si possono considerare come immagini proiettive, rispettivamente in M_r, ω_{r-q-s} , di sistemi elementari Σ, Σ_0 , trasformati di Σ', Σ'_0 , su una V_k birazionalmente equivalente a V'_k e V''_k , si conclude col teorema:

Se una varietà V'_k è proiezione biunivoca entro M_r di un'altra varietà V_k , la proiezione essendo eseguita da un centro Ω_0 (che non incontri V'_k) sopra un quadro ω_{r-q-s} , il sistema Σ_0 su una varietà V_k , del quale V''_k può considerarsi come immagine proiettiva in M_r , è totalmente contenuto in un sistema più ampio Σ su V_k , del quale V'_k è immagine proiettiva in M_r .

OSSERVAZIONE. — Allorchè il centro di proiezione Ω_0 si appoggi a V'_k , il precedente teorema va modificato (in modo del tutto analogo al caso delle serie e dei sistemi lineari), nel senso che il sistema Σ_0 risulta solo *parzialmente* contenuto entro il sistema Σ .