ACTA
Vol. VI - N. 5

FORMULE RISOLUTIVE PER I PROBLEMI GENERALI SULLE RETI DI CONDUTTORI ELETTRICI (*)

CARLOTTA PATERNA

SVMMARIVM. — Inquirit Auctor in problemate generali de computatione retis conductorum electricorum et formulae resolutionis ostendit.

1. - Data una rete composta di un qualunque numero finito di conduttori ohmici, si presenta il problema di calcolare le correnti nei singoli lati e le differenze di potenziale fra le singole coppie di nodi, quando la rete è sollecitata da forze elettromotrici date agenti lungo i lati, quando intensità di correnti date entrano in alcuni nodi, e quando altri nodi sono mantenuti da sorgenti esterne a potenziali obbligati. Ogni problema di questo tipo si può risolvere di volta in volta, scrivendo le equazioni di KIRCHHOFF per ogni maglia e semplificando i calcoli, se si vuole, con la considerazione delle correnti circolanti (metodo di MAXWELL). Partendo da questi fondamenti, interessa ricavare formule generali che diano senz'altro la soluzione di n nodi in forma algebrica.

Un primo esempio di formule di questo tipo si trova già in MAXWELL (1), altri autori hanno esposto nuove formule, tra cui J. H. JEANS (2). G. GIORGI (3).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, nella Tornata 20 febbraio 1942.

(1) J. C. MAXWELL, *A treatise on Electricity and Magnetism*, 2ª ed. Vol. I, § 280.

(2) J. H. JEANS, *The mathematical Theory of electricity and magnetism*, 5ª ed. Cambridge, 1925, Cap. IX, Art. 360 e segg.

(3) G. GIORGI, *Lezioni di fisica matematica tenuta alla R. Università di Cagliari*, Vol. I, Roma, 1926-27, Cap. V.

Qui ho voluto riprendere la ricerca nella forma più generale. In questa ricerca interviene una certa matrice formata dalle conduttanze dei lati della rete. Ho trovato alcune uguaglianze e proprietà dei determinanti minori di questa matrice e ne ho tratto profitto per ottenere nella forma più semplice le formule risolutive.

Confido di aver potuto dare un insieme completo di tali formule, atto alla risoluzione esplicita dei diversi problemi tipici cui ho fatto cenno più sopra. Spero con ciò che questo lavoro possa riuscire utile agli studiosi.

* * *

2. - Sia data una qualsiasi rete di conduttori ohmici.

Indichiamo con g_{RS} la conduttanza del lato che congiunge il nodo R e il nodo S; con i_{RS} la corrente che fluisce nel lato RS nel verso da R verso S; con e_{RS} la f. e. m. impressa inserita in detto lato, sempre in detto verso; infine sia V_{R} il potenziale nel nodo generico R, I_{R} la corrente che, dall'esterno, eventualmente, affluisce al nodo R.

Valgono le relazioni:

$$g_{\mathrm{RS}} = g_{\mathrm{SR}}\ ; \quad e_{\mathrm{RS}} = - e_{\mathrm{SR}}\ ; \quad i_{\mathrm{RS}} = - i_{\mathrm{SR}}$$

Per convenzione poniamo:

$$g_{\mathrm{SS}} = - \sum_{1}^{n}{}_{\mathrm{R}}\, g_{\mathrm{RS}} \qquad\qquad \mathrm{R} \neq \mathrm{S}$$

e consideriamo il determinante simmetrico:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots\cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots\cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots\cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

Questo determinante, a causa della convenzione posta, per cui tutte le righe e tutte le colonne hanno per somma zero, è nullo; inoltre ha la proprietà di avere tutti i minori di ordine $n-1$ uguali tra loro, come si può facilmente verificare. Tale proprietà, che credo non sia stata finora osservata, permette di semplificare le formule, indicando con D_0 uno qualunque di tali minori, mentre con D^{PR}_{QS} viene indicato il determinante che si ottiene da D sopprimendo le righe e le colonne che si incrociano sugli elementi g_{PR}, g_{QS}.

3. - Poste queste convenzioni, consideriamo anzitutto il caso più semplice in cui ai nodi della rete non arrivi alcuna corrente dall'esterno e le f. e. m. impresse siano inserite nei lati. Allora la corrente che fluisce lungo il lato generico R S è:

$$i_{RS} = g_{RS}(V_R - V_S + e_{RS}) \tag{1}$$

e per ogni nodo come R si ha l'equazione:

$$\sum_S i_{RS} = 0$$

ovvero:

$$\sum_S g_{RS}(V_R - V_S + e_{RS}) = 0 \tag{2}$$

Questo sistema di equazioni è evidentemente indeterminato, quando come incognite si vogliano riguardare i potenziali, perchè questi possono venire incrementati tutti di una comune costante additiva, senza che vengano perturbate le condizioni della rete e senza che le equazioni cessino di essere soddisfatte.

Ciò è in accordo col fatto che, ordinando le equazioni e scrivendole come equazioni nelle incognite V_i, il determinante dei coefficienti di queste incognite, essendo il determinante D, è nullo. Il sistema è invece determinato se come incognite si assumono le differenze dei potenziali.

Se n è il numero dei nodi, di queste differenze ve ne sono $n-1$ indipendenti; le equazioni sono in numero di n, ma si vede che sono compatibili fra loro. Esse conducono a determinare le $\frac{n(n-1)}{2}$ differenze di potenziale, e quindi le corrispondenti intensità di corrente.

4. - Per mostrare come si arriva a un risultato semplice, consideriamo una rete con n nodi e una f.e.m. impressa agente fra i nodi P e Q. Le equazioni sono allora:

$$
\begin{array}{l}
g_{11}(V_1-V_S)+g_{12}(V_2-V_S)+\dots+g_{1R}(V_R-V_S)+\dots+g_{1n}(V_n-V_S)=0\\
g_{21}(V_1-V_S)+g_{22}(V_2-V_S)+\dots+g_{2R}(V_R-V_S)+\dots+g_{2n}(V_n-V_S)=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
g_{P1}(V_1-V_S)+g_{P2}(V_2-V_S)+\dots+g_{PR}(V_R-V_S)+\dots+g_{Pn}(V_n-V_S)=g_{PQ}\,e_{PQ}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
g_{Q1}(V_1-V_S)+g_{Q2}(V_2-V_S)+\dots+g_{QR}(V_R-V_S)+\dots+g_{Qn}(V_n-V_S)=g_{PQ}\,e_{QP}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
g_{n1}(V_1-V_S)+g_{n2}(V_2-V_S)+\dots+g_{nR}(V_R-V_S)+\dots+g_{nn}(V_n-V_S)=0
\end{array}
$$

Abbiamo scritto così un sistema di n equazioni nelle $n-1$ incognite V_1-V_S, V_2-V_S, ..., V_n-V_S. Risolvendo rispetto a una qualsiasi di queste incognite, p. es. rispetto a V_R-V_S e trascurando, per simmetria, l'*s-sima* equazione, si ha:

$$V_R-V_S=e_{PQ}\,g_{PQ}\frac{1}{D_0}\left[D_{SS}^{PR}-D_{SS}^{QR}\right]\;; \tag{3}$$

formula corrispondente alla [293] del trattato di Jeans [1], espressa in forma lievemente diversa.

Se poi si trascura una delle due equazioni contenenti la f.e.m, cioè la P-*esima* o la Q-*esima*, si ha:

$$V_R-V_S=e_{PQ}\,g_{PQ}\frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} \tag{4}$$

---

(1) J. H. Jeans, *Op. cit.*

Questa ha, naturalmente, lo stesso valore della precedente ed è più semplice, poichè si riduce al calcolo di due determinanti invece che di tre. Essa mette in evidenza un'altra proprietà del determinante D: la differenza tra due minori di ordine $n-2$, complementi algebrici di due elementi appartenenti alla stessa riga o alla stessa colonna di una medesima matrice di ordine $n-1$, complemento algebrico di un elemento della diagonale principale di D, è ancora un minore di ordine $n-2$ di D. Anche questa proprietà permette una semplificazione delle formule.

Al rapporto

$$\frac{V_R - V_S}{e_{PQ}} = g_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} \tag{5}$$

si può dare il nome di fattore di trasduzione tra f. e. m.

Poichè è

$$i_{RS} = (V_R - V_S)\, g_{RS}$$

introducendo la [4] risulta:

$$\frac{i_{RS}}{e_{PQ}} = g_{RS}\, g_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} \tag{6}$$

il 2° membro è quello che riceve il nome di *ammettenza mutua* dei due lati RS, PQ, e si indica col simbolo G_{PQ}^{RS}. Il nome è giustificato dal fatto che a una f. e. m. e_{PQ} inserita nel lato PQ, corrisponde nel lato RS una corrente

$$i_{RS} = G_{PQ}^{RS}\, e_{PQ} \tag{7}$$

e a una f. e. m. inserita nel lato RS, corrisponde nel lato PQ una corrente

$$i_{PQ} = G_{PQ}^{RS}\, e_{RS} \tag{8}$$

Queste formule conducono al noto teorema di reciprocità:

« La corrente che fluisce in un lato PQ, quando una f. e. m. impressa è inserita nel lato RS, è uguale alla corrente che fluisce nel lato RS quando la stessa f. e. m. è inserita nel lato PQ ».

5. - Ricavando invece la d. d. p. e l'intensità di corrente lungo lo stesso lato PQ in cui agisce la f. e. m., si ha:

$$V_P - V_Q = e_{PQ}\, g_{PQ} \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0} \tag{9}$$

$$i_{PQ} = e_{PQ}\, g_{PQ} \left[g_{PQ} \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0} + 1 \right] \tag{10}$$

All'espressione

$$G_{PQ}^{PQ} = g_{PQ} \left[g_{PQ} \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0} + 1 \right] \tag{11}$$

si addice il nome di *conduttanza*; conduttanza del sistema composto del lato PQ e del complesso della rete compresa tra i nodi P e Q.

6. - Interessa frequentemente determinare la conduttanza G_{PQ} di una rete, essa sola, tra due nodi P e Q, considerati come estremi della rete. Si ottiene questo come caso particolare del precedente quando g_{PQ} diventa infinita essendo la f. e. m. applicata direttamente tra i due nodi. L'espressione [11] ha bisogno in tal caso di essere modificata per eliminare gli infiniti. Più semplicemente si può sottrarre g_{PQ}^{-1} dalla reciproca della precedente. L'elemento g_{PQ} viene eliminato dal risultato, il quale si può porre sotto la forma

$$G_{PQ} = - \frac{D_0}{D_{PP}^{QQ}} \tag{12}$$

purchè si pongano uguali a zero tutti gli elementi di D_0 che contengono g_{PQ}.

La d. d. p. tra due nodi qualunque si ottiene, in questo caso, dividendo il numeratore e il denominatore della [9] per g_{PQ} e mandando al limite per $g_{PQ} \to \infty$.

Si perviene alla formula:

[13] $$V_R - V_S = e_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_{PP}^{QQ}}$$

dove non compaiono più gli infiniti.

7. - Il caso generale di n forze elettromotrici inserite in tutti gli n lati, per la proprietà additiva delle *d. d. p.*, si può ricavare dal caso di una sola f. e. m. impressa, sommando $\binom{n}{2}$ termini analoghi a a quello già trovato:

[14] $$V_R - V_S = \sum_{P,Q} g_{PQ} e_{PQ} \frac{1}{D_0} \left[D_{SS}^{PR} - D_{SS}^{QR}\right] \qquad \text{dove } \begin{array}{l} P = 1, 2, \ldots, n-1 \\ Q = 2, 3, \ldots, n \\ P < Q \end{array}$$

e nei determ. $Q \neq S$

ovvero

[15] $$V_R - V_S = \sum_{P,Q} g_{PQ} e_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} \quad \text{con le stesse condizioni.}$$

Facendo figurare le ammettenze mutue:

$$G_{RS}^{PQ} = g_{PQ} g_{RS} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0}$$

si ha la corrente nel lato generico RS sotto la forma:

[16] $$i_{RS} = \sum_{P,Q} G_{RS}^{PQ} e_{PQ} + g_{RS} e_{RS}$$

8. – Consideriamo ora il caso in cui si abbia una corrente I che che entri in un nodo P ed esca dal nodo Q, e nessuna f. e. m. inserita nei lati. Avremo la formula generica:

$$I = G_{PQ}(V_P - V_Q)$$

in cui la G_{PQ}, funzione delle conduttanze di tutti i lati, rappresenta la conduttanza complessiva della rete fra i nodi P e Q.

Per determinare il valore di questa grandezza scriviamo le equazioni della rete per il caso proposto.

Essendo:

$$I = I_P = - I_Q$$

avremo:

$$\begin{array}{l}
g_{11} V_1 + g_{12} V_2 + \ldots + g_{1P} V_P + \ldots + g_{1Q} V_Q + \ldots + g_{1n} V_n = 0 \\
g_{21} V_1 + g_{22} V_2 + \ldots + g_{2P} V_P + \ldots + g_{2Q} V_Q + \ldots + g_{2n} V_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_{P1} V_1 + g_{P2} V_2 + \ldots + g_{PP} V_P + \ldots + g_{PQ} V_Q + \ldots + g_{Pn} V_n = - I_P \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_{Q1} V_1 + g_{Q2} V_2 + \ldots + g_{QP} V_P + \ldots + g_{QQ} V_Q + \ldots g_{Qn} V_n = I_P \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_{n1} V_1 + g_{n2} V_2 + \ldots + g_{nP} V_P + \ldots + g_{nQ} V_Q + \ldots + g_{nn} V_n = 0
\end{array}$$

Trascurando la Q-*esima* equazione e risolvendo rispetto a $V_P - V_Q$ si ha:

[17] $$V_P - V_Q = - I_P \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0}$$

La conduttanza della rete è data perciò da:

[18] $$G_{PQ} = - \frac{D_0}{D_{PP}^{QQ}}$$

formula analoga alla [12], salvo le restrizioni dovute al caso particolare cui la [12] si riferiva.

La corrente nel lato PQ è

[19] $$i_{PQ} = -\, g_{PQ}\, I_P \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0}$$

Il fattore di traduzione tra le correnti è invece

[20] $$\frac{i_{PQ}}{I_P} = -\, g_{PQ} \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0}$$

9. - Nel caso generale in cui a tutti i nodi arrivino delle correnti, la *d. d. p.* tra due nodi qualunque si riduce a una sommatoria di termini analoghi al 2° membro della [17]:

[21] $$V_R - V_S = -\sum_{1}^{n}{}_{L}\, I_L \frac{D_{SS}^{LR}}{D_0} \qquad L \neq S$$

La corrente che fluisce nel lato RS sarà

[22] $$i_{RS} = -\, g_{RS} \sum_{1}^{n}{}_{L}\, I_L \frac{D_{SS}^{LR}}{D_0}$$

Questa formula dà la distribuzione delle correnti in ciascun lato della rete quando siano note le conduttanze dei lati e le correnti che arrivano a ogni nodo.

10. - Estendendo i risultati ottenuti al caso in cui f. e. m. impresse siano inserite in tutti i lati e correnti arrivino a tutti i nodi, si hanno per le *d. d. p.* e per le correnti le formule generali:

[23] $$V_R - V_S = \sum_{P,Q} g_{PQ}\, e_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} - \sum_{1}^{n}{}_{L}\, I_L \frac{D_{SS}^{LR}}{D_0}$$

[24] $$i_{RS} = g_{RS} \left[\sum_{P,Q} g_{PQ}\, e_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} + e_{RS} - \sum_{1}^{n}{}_{L}\, I_L \frac{D_{SS}^{LR}}{D_0} \right]$$

con le condizioni già convenute riguardo alla variazione degli indici. Da queste si può poi discendere, con facili calcoli, a qualsiasi caso particolare.