

## LA DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEL MOMENTO D'INERZIA E L'INFLUENZA DELL'ELASTICITÀ<sup>(\*)</sup>

PIETRO TEOFILATO

*SUMMARY.* — Postquam critice exposuerit quibus rationibus hactenus inventis momenta inertiae experimentis determinari possint, auctor duas rationes suas exhibet, disputans quomodo se habeat elasticitatis influxus si valutatio iuxta eas fiat.

§ 1. — La conoscenza dell'ellissoide d'inerzia di un corpo costituisce un problema di speciale importanza per lo studio e la previsione di alcuni fenomeni, come ad esempio quello dell'avvitamento dei vlivoli.

Vari metodi sperimentali sono stati all'uopo immaginati, ma non tutti rispondenti alle desiderate esigenze di precisione, sia perchè le misure si fanno nell'aria e l'influenza di questa non viene opportunamente computata, sia perchè, volendo evitare grandiose attrezzature, quali si richiedono per l'esame dei corpi del peso di varie tonnellate, si fa ricorso a modelli che non rispecchiano esattamente la stessa distribuzione delle masse al vero.

Noi, dopo un rapido accenno ai vari metodi ideati, tra i quali uno da noi stessi trovato, esporremo ancora un nuovo metodo che abbiamo escogitato al fine di semplificare le grandi attrezzature sopra indicate; infine studieremo l'effetto che l'elasticità del materiale reca sulla valutazione del momento d'inerzia, in quanto siffatta valutazione viene ottenuta supponendo perfettamente rigido un corpo il quale, invece,

---

(\*) Memoria presentata nella Tornata del 20 febbraio 1942, dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini.

fisicamente si presenta più o meno in uno stato di coazione elastica, in virtù del proprio peso e delle reazioni di sostegno.

§ 2. - Il metodo classico, fin qui seguito, desume il momento inerziale dalla durata  $T$  di oscillazione del corpo sospeso alla bilancia bifilare, partendo dalla equazione del moto:

$$[1] \quad I_{\alpha} \ddot{\theta} + M_{\alpha} g \frac{d^2}{l_{\alpha}} \cdot \theta = 0,$$

dove  $I_{\alpha}$  è il momento inerziale intorno all'asse verticale di oscillazione,  $M$  la massa,  $d$  la distanza dei fili,  $l_{\alpha}$  la loro lunghezza ed  $\alpha$  un indice il quale sta a denotare che gli elementi si riferiscono ad un certo corpo  $\alpha$ .

Si deduce dalla [1]:

$$[2] \quad I_{\alpha} = \frac{T^2 M_{\alpha} g d^2}{16 \pi l_{\alpha}}.$$

Siffatta determinazione è però risultata molto grossolana, a causa dell'esistenza di un giuoco d'aria (aria satellite) che inficia il valore trovato  $I_{\alpha}$ .

Alcuni sperimentatori <sup>(1)</sup> hanno perciò introdotto una correzione per  $I_{\alpha}$ , ricorrendo al concetto da loro denominato del *momento d'inerzia virtuale*.

Si fanno cioè compiere sulla bilancia bifilare le oscillazioni, tanto al corpo  $\alpha$  di cui si vuol determinare il momento d'inerzia vero, che chiameremo  $I_{0\alpha}$ , quanto ad un corpo  $\beta$  di identiche o quasi identiche forme esterne, del quale il momento d'inerzia vero  $I_{0\beta}$  sia invece ben conosciuto a priori. Regolata la lunghezza  $l_{\beta}$  dei fili in modo che ampiezza e periodo di oscillazione del corpo  $\beta$  siano gli stessi del corpo  $\alpha$ , è

---

<sup>(1)</sup> GATES S. B., *Moments of inertia of airplanes*. R. and M. 1415 « British ARC » 1932. — HARTLEY, SOULÉ, MARVEL, MILLER, *The experimental determination of the moments of inertia of airplanes*. « Nat. Advisory Committee », Rep. 467, 1933.

legittimo ritenere che il giuoco d'aria sia lo stesso nei due casi e che le differenze  $I_\alpha - I_{0\alpha}$ ,  $I_\beta - I_{0\beta}$  siano da attribuire a tale giuoco.

Tuttavia non sembra conforme ad una più completa esperienza il ritenere che quelle differenze esprimano proprio la misura dell'effetto dell'aria, come a prima vista si presenta invece plausibile e semplice; tanto da indurre i sopra citati autori ad assumere:

$$[3] \quad I_{0\alpha} = I_\alpha - (I_\beta - I_{0\beta}).$$

Abbiamo infatti saggiato il metodo in parola, spingendone l'applicazione oltre gli ordinari confini, col provocare cospicui effetti d'aria in confronto a piccoli volumi (eguali) dei due corpi  $\alpha$  e  $\beta$ , ed abbiamo trovato risultati sconcertanti.

Ora, mentre logicamente è possibile assumere, per la misura di quell'effetto, qualunque funzione  $f$  tale che:

$$f(I_\alpha, I_{0\alpha}) = f(I_\beta, I_{0\beta}),$$

in sostanza l'esperienza ne determina una sola e non sembra anzi che questa sia proprio la differenza  $I - I_0$ , come invece presume la [3]. È poi da aggiungere che, a priori, non si può senz'altro ammettere che l'effetto accennato sia valutabile mediante una funzione finita come la  $f$ , nè che esso sia indipendente dalla forma dei corpi, dall'atto di moto e forse anche dall'accelerazione.

§ 3. - Per queste ragioni ho cercato<sup>(1)</sup> di procedere alla determinazione dei momenti d'inerzia partendo da un altro concetto. Invece di far oscillare il corpo alla bilancia bifilare, lo si faccia cadere in modo però che, mentre da una parte esso resti appoggiato e possa così ruotare intorno alla retta congiungente due appoggi, dall'altra estremità possa, dopo opportuno scapolamento di appoggio, spostarsi liberamente di qualche centimetro abbattendosi dopo sopra opportuni am-

(1) Cfr. TEOFILATO, *Sulla determinazione sperimentale dei momenti d'inerzia*. «Atti di Guidonia» n. 36, 1940.

mortizzatori. L'estremità ruotante traccerà sopra un cinemometro <sup>(1)</sup> il diagramma del moto incipiente di caduta; l'esame del diagramma permetterà poi di risalire alla conoscenza del momento d'inerzia.

Infatti, il moto incipiente di rotazione è regolato dall'equazione:

$$[5] \quad I\ddot{\theta} + Mg\zeta \sin \theta + \varphi = 0$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione,  $\zeta$  la distanza del baricentro dall'asse,  $\theta$  l'angolo che il vettore  $\zeta$  fa con la verticale,  $\varphi$  la funzione resistente.

Quest'ultima dipenderà dagli attriti tra solidi (linea di appoggio) e dalle forze aerodinamiche. Il momento degli attriti si può ritenere espresso da una costante, peraltro incognita; ma quanto alle forze aerodinamiche, potremo pensare che esse dipendano dalla sola velocità, come del resto si fa per lo studio dei proietti, ovvero anche dall'accelerazione, il che significa che dette forze possono dipendere non solo dall'atto di moto ma anche dal succedersi di questi.

Sta però il fatto che, per quel dato corpo, con quei determinati vincoli, la velocità e l'accelerazione finiscono per essere funzioni determinate (incognite) del tempo; per cui, pensando eliminato quest'ultimo, in ultima analisi l'accelerazione risulta funzione della velocità, mentre, in ogni caso, le forze aerodinamiche diventano, se non sostanzialmente, certo formalmente, dipendenti dalla sola velocità.

Potremo allora immaginare che il momento di quelle forze rispetto all'asse fisso, sia sviluppabile in serie di potenze della velocità, cosicchè, limitando lo sviluppo ai primi termini, si avrà in luogo della [5]:

$$[6] \quad I\ddot{\theta} - Mg\zeta \cdot \sin \theta + f_1 + f_2 \dot{\theta} + f_3 \dot{\theta}^2 = 0,$$

con  $f_1 f_2 f_3$  coefficienti incogniti dipendenti dal corpo e dai vincoli, e perciò costanti nel tempo. La [6] rispecchia molto fedelmente il moto incipiente, mentre il cinemometro registrerà la funzione  $\theta(t)$ , soluzione della [6], durante il brevissimo tempo di caduta (meno di  $1/10$  di secondo).

---

<sup>(1)</sup> Da noi espressamente fatto costruire al Centro Studi ed Esperienze di di Guidonia.

La difficoltà di dedurre dall'esame del diagramma il valore di  $\ddot{\theta}$ , è stata da noi superata profittando, nel caso dei velivoli, dell'entità di alcune grandezze. Sotto queste particolari circostanze, moltiplicando la [6] per  $dt$  e integrando due volte successivamente, si ottiene una equazione nella quale figurano linearmente dei coefficienti, costruiti con  $I, f_1, f_2, f_3$ , rispettivamente moltiplicati per alcune espressioni le quali si ottengono facilmente mediante l'integrafo operante due volte sopra  $\theta(t)$  e  $\theta^2(t)$ . Quattro letture, in corrispondenza di quattro tempi, daranno tante equazioni quante ne occorrono per ricavare i suddetti coefficienti e conseguentemente  $I, f_1, f_2, f_3$ .

La precisione del metodo richiede una buona lettura delle ordinate del diagramma  $\theta(t)$  al microscopio del comparatore, oppure un un buon maneggio dell'integrafo. La precisione di registrazione sul cinemometro richiede un'esatta indicazione del tempo che abbiamo realizzato mediante apposito vibrografo comandato da un oscillatore a quarzo.

Il metodo è stato controllato saggiando un parallelepipedo rettangolo, omogeneo, molto allungato, appoggiato sopra un piano, per uno spigolo, e ivi impedito di slittare, mentre l'altra estremità era bruscamente abbandonata.

§ 4. - Secondo un altro metodo proposto <sup>(1)</sup> il corpo da esaminare dovrebbe rinchiudersi entro un recipiente stagno poggiato sopra una piattaforma mobile su ralla. La misura delle reazioni provocate dall'inerzia del corpo sulla piattaforma oscillante fornirebbe le caratteristiche inerziali.

Il metodo si presta con difficoltà ad una pratica attuazione, causa la delicatezza delle misure cinetostatiche e l'ingombro di tutto il dispositivo, quando si tratti di esaminare le caratteristiche per i velivoli.

Un altro procedimento escogitato <sup>(2)</sup> ed attuato consisterebbe nel far oscillare intorno ad un asse verticale un cassone entro cui si trovi contenuto e solidale il corpo da saggiare. Misurata la durata di oscillazione di tutto il sistema, nell'interno del cassone si sostituisce il corpo con masse note (di forma geometrica semplice) e spostabili lungo

(1) FERRACANE, «Atti di Guidonia», n. 34, 1940.

(2) Prof. BROGLIO.

un asse orizzontale in modo che il cassone, dopo l'avvenuta sostituzione, possa ancora oscillare con la legge di prima. In tale circostanza, il momento d'inerzia (calcolabile a priori) delle masse rispetto all'asse di oscillazione del cassone è assolutamente eguale al momento d'inerzia del corpo, che si desiderava determinare.

Il metodo si presta convenientemente allo studio di corpi di piccola mole, come modelli di velivoli, per i quali del resto può anche farsi la determinazione, certo, con minore agio che col procedimento del BROGLIO, facendoli oscillare senz'altro entro un cassone riempito di idrogeno o, meglio ancora, vuoto, e applicando poi la [2].

§ 5. — Il secondo metodo, da noi escogitato e che ora descriveremo, è applicabile anche a corpi di grande mole e richiede attrezzature più semplici in confronto degli altri metodi.

Esso, come nel metodo del § 3, presuppone che il corpo da saggiare perda improvvisamente un appoggio, restando fissi gli altri; ma, invece di sfruttare un diagramma, sia pure relativo ad un tempo brevissimo, sfrutta la sola segnalazione della variazione che subisce la pressione degli appoggi che restano fissi. Anzi, non necessita nemmeno registrare l'entità della variazione, ma soltanto l'esistenza di questa, esistenza manifestata dall'improvviso squilibrio di contrappesi posti, in luogo degli appoggi fissi, a mantenere il corpo in equilibrio, oppure manifestata da dispositivi piezoelettrici collocati fra questi appoggi e il corpo. L'assenza di siffatta segnalazione starebbe a significare che le reazioni dinamiche degli appoggi fissi coincidono, nell'attimo in cui si inizia il moto a causa del cedimento dell'appoggio mobile, con le reazioni statiche (anteriori al cedimento).

Un opportuno e determinato spostamento di masse<sup>(1)</sup> permetterà il verificarsi di questa circostanza.

Immaginiamo che dei tre punti  $A B C$ , ai quali si appoggia il corpo in esame, i primi due stiano sopra uno stesso piano orizzontale  $\alpha$  e il terzo a una distanza  $h$  da  $\alpha$ . Sia  $O$  il piede della perpendicolare condotta dal baricentro  $G$  del corpo alla retta  $AB$ ; sia  $\theta$  l'angolo che la verticale di  $O$  diretta verso il basso forma con la posizione variabile di  $OG$ ; sia  $k$  il momento costante degli attriti fra solidi e finalmente si ponga  $l = OG$ .

(1) Cfr. § 6.

L'equazione che governa il moto incipiente, nel tempuscolo sufficiente ad avere appena la segnalazione del disturbo dalla quiete per effetto dell'improvviso cedimento dell'appoggio C, mentre A e B restano fissi sarà:

$$[7] \quad I\ddot{\theta} + Pl \sin \theta + k = 0$$

trascurando, come sembra lecito nel caso in questione, l'azione delle forze dissipative aerodinamiche.

Siano  $P_1^0$ ,  $P_2^0$ ,  $P_3^0$  i carichi su ABC quando tutti e tre i punti giacciono sopra uno stesso piano orizzontale  $\alpha$  ( $h=0$ ) e invece siano  $P_1^{00}$ ,  $P_2^{00}$ ,  $P_3^{00}$  quelli che si hanno quando C è rialzato sul piano  $\alpha$  ( $h \neq 0$ ). La conoscenza di questi sei carichi, ottenibili uno per volta a mezzo di una bilancia, permette di dedurre la posizione della proiezione del baricentro sul piano ABC nei due diversi aspetti, rispetto al piano  $\alpha$ , del corpo in esame, e conseguentemente di ricavare la posizione del baricentro rispetto ai tre appoggi ABC.

Saranno quindi conosciuti  $P, l$ , nonchè il valore iniziale di  $\theta$  e i due segmenti AO, OB, che indicheremo rispettivamente con  $a, b$ .

Si assuma come asse  $x$  la retta AB e l'asse  $y$  nel piano orizzontale di AB, e passante per O; si indichi poi con  $I_{xy}$  il momento misto rispetto agli assi  $xy$  e si distinguano con indice o apice zero gli elementi relativi all'assetto  $h=0$ , e con indice o apice doppio zero gli elementi relativi all'assetto  $h \neq 0$ . Si immagini quindi liberato il corpo dai due vincoli di appoggio A e B, e sostituiti ai medesimi le reazioni di appoggio. Il teorema del moto del baricentro e quello della derivata temporale del momento cinetico, il primo relativo alla verticale, il secondo rispetto all'asse  $z$ , forniranno due equazioni per ciascun assetto, le quali, dopo eliminazione dell'accelerazione angolare mediante la [7] e il congruaggio delle reazioni dinamiche a quelle statiche esercitate su A e B, diventano nell'istante iniziale:

$$\frac{Pl}{gI} \sin \theta_0 (Pl \sin \theta_0 + k) = -P_1^0 - P_2^0 + P$$

$$\frac{I_{xy}^0}{I} (Pl \sin \theta_0 + k) = P_1^0 a - P_2^0 b,$$

e due analoghe per il doppio indice o apice zero.

Si ricava:

$$I_{xy}^0 = \frac{P_1^0 a - P_2^0 b}{P_3^0} \cdot \frac{Pl}{g} \sin \theta_0; \quad I = \frac{Pl \sin \theta_0}{P_3 g} (Pl \sin \theta_0 + k)$$

e l'analogo per  $I_{xy}^{00}$  e ancora per  $I$ . Eliminando  $k$  dalle sue espressioni di  $I$  si ottiene finalmente:

$$I = \frac{P^2 l^2}{g} \cdot \frac{\sin \theta_0 - \sin \theta_{00}}{\frac{P_3^0}{\sin \theta_0} - \frac{P_3^{00}}{\sin \theta_{00}}}$$

Essendo poi:

$$I_{xy}^{00} = I_{xy}^0 \cos (\theta^{00} - \theta^0) - I_{xz}^0 \sin (\theta^{00} - \theta^0),$$

si deducono  $I_{xz}^0$  e così  $I_{xz}^{00}$ .

Scambiando gli appoggi, cioè facendo cadere  $B$ , anzichè  $C$ , e iterando quanto si è fatto per  $C$ , si ricavano tutti gli elementi occorrenti alla determinazione dell'ellissoide centrale d'inerzia.

§ 6. - Gli schemi considerati finora prescindono dalla elasticità degli appoggi e del corpo. Eppure l'elasticità interviene, tanto nel caso che il corpo si faccia oscillare, quanto nel caso che si faccia cadere un appoggio; soltanto se ne può ridurre l'effetto modificando la rigidità dei vari organi.

Al fine di stabilire un rapido raffronto tra l'ipotesi della rigidità e quella dell'elasticità, ci serviremo di uno schema molto semplice ed altrettanto istruttivo.

Consideriamo dapprima un'asta rigida pesante  $OB$ , di lunghezza  $L$ , cernierata in  $O$  (vincolo fisso) ed appoggiata in  $B$  (vincolo cedevole) con  $O$  e  $B$  situati sulla stessa orizzontale. Indicata con  $M$  la massa dell'asta e con  $x_0$  la distanza del suo baricentro da  $O$ , la reazione in  $O$  sarà:

$$[8] \quad F = Mg \frac{L - x_0}{L}.$$



D'altra parte, se improvvisamente cede l'appoggio B, l'asta ruota intorno a O di un angolo  $\theta$ , contato a partire dall'orizzontale OB, tale che se I è il momento inerziale rispetto a O, risulterà inizialmente:

$$[9] \quad I \ddot{\theta}_0 = M g x_0 ,$$

mentre la reazione dinamica in O sarà inizialmente:

$$[10] \quad S_0 = M g - M x_0 \ddot{\theta}_0 ,$$

ovvero, a causa della [9]:

$$[11] \quad S_0 = M g - M^2 x_0^2 \frac{g}{I} .$$

Da quest'ultima equazione, quando, mediante opportuni spostamenti di masse (note e di forma geometrica semplice), si riesca a soddisfare la condizione:

$$[12] \quad F = S_0 ,$$

si ricava dal congruaggio dei secondi membri di [8] e [11]:

$$[13] \quad I = M L x_0 .$$

Ad esempio, per un'asta sottile, omogenea, di massa  $m_1$  e lunghezza L, sulla quale si sposti un cursore puntiforme di massa  $m_2$ , l'applicabilità della [13] richiede che la distanza del cursore dalla cerniera sia:

$$\frac{1}{2} L \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{m_1}{m_2}} \right) ,$$

e con ciò risulterà naturalmente  $F = S_0$ .

§ 7. - Per esaminare ora l'effetto dell'elasticità e stabilire il paragone con quanto abbiamo trovato nei riguardi dell'asta rigida OB, rivolgiamo la nostra attenzione ad un sistema di due aste rigide sot-

tili, OA, AB senza massa, cernierate fra loro in A e di lunghezze rispettive  $l_1, l_2$ . Sulla prima sia rigidamente connessa una massa puntiforme  $m_1$  alla distanza  $a_1$  da O, sull'altra una massa puntiforme  $m_2$  alla distanza  $a_2$  da A. Il punto O sia fisso (cerniera fissa); il punto B, situato inizialmente sulla stessa orizzontale di O, sia appoggiato. Una opportuna molla in A, contrasti il ripiegamento del sistema delle due aste, che sarebbe provocato dall'azione dei pesi agenti sulle masse  $m_1, m_2$ .

Supponiamo dapprima il sistema in equilibrio, e quindi l'appoggio A fermo, mentre le due aste formano tra loro un angolo  $\widehat{OAB} = \pi - \alpha_0$ , con  $\alpha_0$  molto piccola se la rigidità della molla è sufficientemente grande.

Il momento reattivo della molla, quando l'appoggio in A è senza attrito, e si ha equilibrio, è dato da:

$$[14] \quad R_{\alpha_0} = k,$$

dove, come si trova facilmente:

$$k = - \frac{g}{L} (m_2 a_2 l_1 - m_1 a_1 l_2 - m_2 l_1 l_2)$$

$$(L = l_1 + l_2)$$

Immaginiamo ora che, venuto meno l'appoggio B, la spezzata, libera da questo vincolo, ruoti intorno alla cerniera fissa O, mentre AB ruota intorno ad A. Indicheremo con  $\theta$  l'angolo che la congiungente OB forma con l'orizzontale, e con  $\pi - \alpha$  l'angolo variabile  $\widehat{OAB}$ .

Presi i momenti delle forze perdute, ora rispetto ad A ed ora rispetto a O, tenendo conto dei vincoli, otterremo:

[15]

$$\begin{aligned} -R\alpha + m_2 a_2 g \cos(\theta + \alpha) + m_2 [-\ddot{\theta}(a_2 l_1 \cos \alpha + a_2^2) - a_2^2 \ddot{\alpha} - a_2 l_1 \dot{\theta}^2 \sin \alpha] = 0 \\ m_1 g a_1 \cos \theta + m_2 g (l_1 \cos \theta + a_2 \cos(\theta + \alpha)) - m_1 a_1^2 \ddot{\theta} - m_2 (l_1^2 + a_2^2 + 2a_2 l_1 \cos \alpha) \ddot{\theta} - \\ - m_2 (l_1 \cos \alpha + a_2) a_2 \ddot{\alpha} + m_2 a_2 l_1 \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + 2m_2 a_2 l_1 \sin \alpha \cdot \dot{\theta} \dot{\alpha} = 0 \end{aligned}$$

L'istantaneità della cessazione del vincolo è un'astrazione; effettivamente il cedimento completo dell'appoggio assorbe un tempuscolo  $\tau$  durante il quale  $\theta$  ed  $\alpha$  variano con legge prescritta dal modo col

quale il cedimento si produce (sgancio, scapolamento di un appoggio il quale praticamente non può terminare con uno spigolo vivo, ecc.).

Possiamo poi sempre immaginare che, durante il cedimento, di durata brevissima, anche  $\dot{\theta}$  ed  $\dot{\alpha}$ , grandezze le quali partono da valori nulli, si conservino piccole; sicchè, al momento in cui, unico vincolo rimasto sia la cerniera, i valori iniziali della nuova specie di movimento che sta per iniziarsi, saranno  $\alpha_* \theta_* \dot{\alpha}_* \dot{\theta}_*$ , tutti sufficientemente piccoli. Per precisare supporremo:

$$[16] \quad \begin{aligned} (\alpha_*, \alpha_0, \theta_*, \theta_0) &< \alpha_1 \\ (\dot{\alpha}_*, \dot{\theta}_*) &< \sqrt{H \alpha_1} \quad (H \text{ limitata}) \end{aligned}$$

dove  $\alpha_1$  è una quantità trascurabile rispetto alla sua radice quadrata.

Anzi, a causa della piccolezza di  $\dot{\alpha}, \dot{\theta}$  durante il prescritto moto di cedimento, e a causa della breve durata di questo, potremo ritenere senz'altro, tenuto conto che il cedimento si inizia con  $\alpha = \alpha_0, \theta = 0$ , che sia:

$$[16 \text{ bis}] \quad \alpha_* = \alpha_0, \theta_* = 0,$$

a meno di quantità del secondo ordine.

L'integrale delle forze vive, finchè  $\alpha$  e  $\theta$  si conservano piccole, sarà:

$$[17] \quad \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2 \dot{\alpha}^2 - M g x_0 \theta - m_2 g a_2 \alpha - \frac{1}{2} R \alpha^2 = \varepsilon$$

essendo  $I$  il momento d'inerzia del sistema  $OAB$  nella configurazione in cui  $OA$  e  $OB$  sono per diritto,  $x_0$  la distanza del baricentro da  $O$ , nella stessa configurazione, ed  $\varepsilon$  una costante.

L'equazione dei momenti:

$$[18] \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left[ m_2 (l_1^2 + a_2^2 + 2a_2 l_1 \cos \alpha) + m_1 a_1^2 \right] \dot{\theta} + m_2 a_2 (l_1 \cos \alpha + a_2) \dot{\alpha} \right\} = \\ = m_1 g a_1 \cos \theta + m_2 g (l_1 \cos \theta + a_2 \cos (\theta + \alpha)), \end{aligned}$$

a sua volta nell'ipotesi fatta circa  $\alpha$  e  $\theta$ , fornisce mediante integra-

zione rispetto al tempo, a partire dall'istante  $t=0$  relativo alla completa cessazione del vincolo B:

$$[19] \quad I\ddot{\theta} + m_2 a_2 (l_1 + a_2) \dot{\alpha} = M g x_0 t + \eta,$$

con  $\eta$  costante.

Le tre equazioni, dalla [17] e [19], vigono dunque per tutto il tempo in cui  $\alpha$  e  $\theta$  sono così piccole che se ne possono trascurare i termini del secondo ordine, governando il moto di caduta del sistema OAB, vincolato soltanto in O.

Dalle due equazioni [17] e [19] si ricavano  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\theta}$  in funzione del tempo e di  $\eta$  e  $\theta$ ; tanto  $\dot{\alpha}$  che  $\dot{\theta}$  risultano del tipo:

$$[21] \quad at + b\eta + [(mt + n\eta)^2 + p\dot{\epsilon} + q\dot{\theta} + r\alpha + hR\alpha^2]^{\frac{1}{2}}$$

dove  $a b m n p q r h$  sono costanti il cui valore è limitato e il cui significato si rileva dalla effettiva risoluzione delle due suddette equazioni, e dove il momento  $R\alpha$  è da considerare, in analogia alla [14], limitato.

Si tenga ora conto delle espressioni in cui si esplicitano le costanti di integrazione  $\epsilon$ ,  $\eta$  le quali figurano nella [17] e [19].

In virtù della [16] risulterà:

$$\epsilon < \left[ \frac{1}{2} (I + m_2 a_2^2) + m_2 g a_2 + \frac{1}{2} R \alpha_1 \right] \alpha_1 = P \alpha_1$$

dove, potendo ritenersi il momento  $R\alpha_1$  grandezza limitata, altrettanto potrà dirsi della costante P.

Inoltre:

$$\eta < [I + m_2 a_2 (l_1 + a_2)] \sqrt{H \alpha_1} = \sqrt{Q \alpha_1}, \quad (Q \text{ limitata})$$

Pertanto se si assume:

$$[22] \quad t \leq T, \text{ dove } T = \frac{\sqrt{Q \alpha_1}}{M g x_0},$$

avremo dalla [21] che, almeno durante un tempo T siffatto,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\theta}$  sono limitati come segue:

$$\dot{\alpha}, \dot{\theta} < \sqrt{S \alpha_1}, \quad (S \text{ limitata})$$

e pertanto sarà lecito trascurare, nelle [15], i termini in

$$\alpha \dot{\alpha}^2, \alpha \dot{\theta}^2, \alpha \dot{\alpha} \dot{\theta}, \alpha^2, \theta^2,$$

i quali vi figurano, quando, alle funzioni trigonometriche, si sostituiscono i rispettivi sviluppi in serie di potenze.

Così le [15] diverranno:

$$[23] \quad -Rz + m_2 a_2 g - m_2 a_2 [(l_1 + a_2) \ddot{\theta} + a_2 \ddot{\alpha}] = 0$$

$$[24] \quad I \ddot{\theta} = M g x_0 - m_2 (l_1 + a_2) a_2 \ddot{\alpha}$$

le quali, a differenza delle [17] e [19], richiedenti soltanto  $z$  e  $\theta$  piccoli, invece vivono sotto la specifica condizione [22] circa la limitazione del tempo.

D'altra parte, la reazione dinamica  $S$  che si esercita sul punto  $O$ , è data, sempre che  $\alpha$  e  $\theta$  siano piccoli, da:

$$[25] \quad S = M g - M x_0 \ddot{\theta} - m_2 a_2 \ddot{\alpha}.$$

Ora la [24] e la [25] non differiscono rispettivamente dalla [9] e [10] che per l'aggiunta dei termini in  $\ddot{\alpha}$  e la sostituzione di  $\ddot{\theta}$  a  $\ddot{\theta}_0$ .

Ne consegue che, eliminando  $\ddot{\theta}$  tra [24] e [25] e congruando  $F$  con  $S$ , si otterrà invece della [13], la seguente:

$$I = M x_0 L + \sigma \ddot{\alpha},$$

dove:

$$\sigma = m_2 a_2 \frac{L}{g} \left( \frac{I}{M x_0} - l_1 a_2 \right)$$

§ 8. - Si tratta ora di valutare il termine  $\sigma \ddot{\alpha}$  che rappresenta lo scarto da quel valore di  $I$  che si presenta nel caso della rigidità. A tal fine consideriamo l'equazione in  $\alpha$  che si deduce da [23] e [24] dopo eliminazione di  $\ddot{\theta}$ . Pongasi per semplicità:

$$[26] \quad \omega^2 = R I : (m_1 m_2 a_1^2 a_2^2)$$

e si tenga presente che, essendo la differenza  $\alpha_* - \alpha_0$  trascurabile rispetto ad  $\alpha_0$  in base alla [16 bis], si può scrivere:

$$\alpha_* \omega^2 = R \alpha_0 I : (m_1 m_2 a_1^2 a_2^2)$$

ovvero, a norma della [14]:

$$[27] \quad \alpha_* \omega^2 = k I : (m_1 m_2 a_1^2 a_2^2) = v, \quad (v \text{ quantità limitata}).$$

Pongasi inoltre:

$$\frac{g}{a_1 a_2} (l_1 + a_2 - a_1) = \lambda,$$

e l'accennata eliminazione di  $\ddot{\theta}$  fornirà:

$$[28] \quad \ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha - \lambda.$$

Attese le condizioni iniziali, avremo quindi:

$$[29] \quad \alpha = -\frac{\lambda}{\omega^2} + \left( \alpha_* + \frac{\lambda}{\omega^2} \right) \frac{\cos(\omega t + \beta)}{\cos \beta}.$$

Lo scarto  $\sigma \ddot{\alpha}$  si riduce quindi, in base alla [27], a:

$$\sigma \ddot{\alpha} = -\frac{\sigma}{\cos \beta} (v + \lambda) \cos(\omega t + \beta);$$

e quindi oscillerà tra i limiti  $\pm \sigma(v + \lambda) : \cos \beta$ , i quali comprendono un intervallo tutt'altro che evanescente.

Per altro la registrazione di S, anzichè con mezzi piezoelettrici, può essere fatta con mezzi meccanici. Ad esempio si può giudicare se S è o no diverso da F, dalla mobilità o meno di un contrappeso il quale, mediante una carrucola di rimando, tiri un filo verticale attaccato in O, quando l'azione della cerniera sia sostituita dalla tensione del filo e simultaneamente dall'appoggio del punto O contro una parete verticale perfettamente levigata.

In tal caso, attesa la grande frequenza con cui oscilla  $S$ , sarà il valore medio di  $S$  che influirà sul moto del contrappeso. Avremo intanto dalla [25], quando si assuma un tempo di registrazione  $T$  dato dalla [22]:

$$S_{\text{medio}} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = Mg - \frac{Mx_0}{T} \int_0^T \ddot{\theta} dt - \frac{m_2 a_2}{T} \int_0^T \ddot{x} dt ;$$

ed eliminando  $\ddot{\theta}$  a mezzo della [24]:

$$[30] \quad S_{\text{medio}} = Mg - \frac{M^2 x_0^2 g}{I} + \frac{m_2 a_2}{I} \left[ (l_1 + a_2) x_0 M - I \right] \frac{\dot{x}_T - \dot{x}_*}{T} .$$

Cioè  $S_{\text{medio}}$  differisce dal valore iniziale  $S_0$ , fornito dalla [11] per il corpo irrigidito, per il termine contenente il fattore:

$$[31] \quad \frac{\dot{x}_T - \dot{x}_*}{T} .$$

Ora ricordiamo che abbiamo scelto la grandezza  $\alpha_1$  con la condizione di essere maggiore di  $\alpha_0$  e di essere trascurabile rispetto alla sua radice quadrata.

Ebbene se si assume  $\alpha_1$  in modo che sia:

$$[32] \quad \alpha_1 = h^2 \omega^{2(n-1)}$$

con  $h^2$  limitato ed  $n$  tale che  $\omega^{-n}$  sia trascurabile rispetto all'unità e inoltre tale che:

$$0 < n < 1, \quad (n \neq 0, \quad n \neq 1)$$

risulterà certamente, per una rigidità molto grande della molla,  $\alpha_1 > \alpha_0$ , essendo per la [27]:

$$\alpha_0 = v \omega^{-2};$$

inoltre risulterà anche  $\alpha_1$  trascurabile rispetto a  $\sqrt{\alpha_1}$ .

Con l'assunzione [32] il tempo di registrazione  $T$ , dato dalla [22], sarà piccolo, ma tuttavia tale da potersi ritenere grande rispetto alla frequenza di  $\alpha$ , perchè:

$$T : \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T\omega}{2\pi} = \frac{V\overline{Q}}{2\pi Mgx_0} h\omega^n$$

D'altra parte, dalla [29] si ha:

$$\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}_* = - \frac{\nu + \lambda}{\omega} \frac{1}{\cos \beta} [\sin(\omega t + \beta) - \sin \beta] ,$$

quantità dell'ordine di  $\omega^{-1}$ .

Pertanto il fattore [31] che figura nella [30] sarà, per la [22], dell'ordine di:

$$\omega^{-1} : \omega^{n-1} = \omega^{-n}$$

e quindi sarà quantità piccola.

Si conclude che  $S_{\text{medio}}$  differisce dal valore  $S_0$  per quantità dell'ordine di  $\omega^{-n}$  e, in conseguenza, che il momento d'inerzia  $I$  del corpo elastico differisce dal valore  $Mx_0L$ , trovato per il corpo irrigidito, per meno di quantità dello stesso ordine. Tale conclusione vale sotto l'ipotesi che la durata di registrazione sia invece dell'ordine di  $\omega^{n-1}$ , condizione questa, che del resto è molto lata e dipendente massimamente dalla grandezza che si sceglie per la rigidità della molla.

È vero che ci siamo riferiti ad uno schema quanto mai semplice ed astratto; esso è tuttavia del tipo degli schemi che si sogliono fare nella teoria delle vibrazioni e che pure, malgrado la loro distanza dalla realtà che intendono rappresentare, riescono a dare un'idea abbastanza precisa dell'andamento del fenomeno vibratorio.

Infine rileviamo che, praticamente, con mezzi meccanici quali quelli da noi accennati, la registrazione viene a farsi, non solo durante il tempo  $T$ , ma anche durante il tempo  $\tau$  che dura lo sgancio, sicchè  $S_{\text{medio}}$  si riferisce in sostanza al tempo  $\tau + T$ ; ma nulla vieta di pensare, in adesione anche alle possibilità costruttive, che  $\tau$  sia trascura-



bile rispetto a T, ovvero che la registrazione si inizi a sgancio avvenuto.

In tal modo  $S_{\text{medio}}$ , e quindi il momento d'inerzia I, può essere valutato con mezzi semplici, quali una bascula (per l'appoggio fisso) e un dispositivo di sgancio (per l'appoggio mobile), purchè si provveda a spostare opportunamente masse note, al fine di realizzare la condizione di eguaglianza tra pressione statica e pressione dinamica.