

DI ALCUNE PROPRIETÀ DEI MOMENTI DELLA CURVA DI PROBABILITÀ E DEGLI INDICI DI NORMALITÀ (*)

ALBINO UGGÈ

SUMMARIVM. — Quasnam notas momenta functionis probabilitatis habeant commemorat auctor, ac demonstrat quomodo ex iis deduci possint rationes ad perpendendam distributionis cuiusdam normalitatem.

Vari mezzi, più o meno efficaci, ha a sua disposizione lo statistico per giudicare se una distribuzione di frequenza è assimilabile o no, per il suo andamento, alla funzione delle probabilità degli errori accidentali. Egli può interpolare la curva degli errori e determinare la bontà dell'adattamento, conseguito con la interpolante teorica, confrontando le ordinate note dalla osservazione con quelle calcolate; può, più sommariamente, constatare se vi è coincidenza fra la frequenza degli scarti — o delle intensità — eccedenti, o non eccedenti, in valore assoluto, dati limiti espressi in multipli dello scarto quadratico medio, e la corrispondente frequenza teorica che si avrebbe in una distribuzione obbediente alla legge di GAUSS, può, con analogo criterio, esaminare se, nella distribuzione empirica, i quartili non differiscono dallo scarto probabile; può, d'altronde, trarre un primo parziale indizio dal confronto tra media aritmetica mediana e moda; può, nel caso di grandezze estensive, comparare lo scarto quadratico medio effettivo con quello teorico, desunto da particolari schemi (BERNOULLI, LEXIS, POISSON, ecc.); può, infine, calcolare costanti segnaletiche fondate sulla com-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Marcello Boldrini, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

parazione fra certe caratteristiche proprie di momenti o di funzioni di momenti della curva delle probabilità ed i corrispondenti valori calcolati sulla distribuzione fornita dalla osservazione. Così, si esamina se $\beta_1 = \frac{v_3^2}{v_2^3} = \frac{v_3}{\sigma^3}$, del PEARSON, cioè il rapporto fra il terzo momento medio dalla media aritmetica e il cubo dello scarto quadratico medio sia uguale a 0, e se $\beta_2 = \frac{v_4}{v_2^2} = \frac{v_4}{\sigma^4}$, cioè il rapporto fra il quarto momento medio dalla media aritmetica e il quadrato del secondo momento differiscono da 3, poichè 0 e 3 sono, rispettivamente, i valori che detti rapporti acquistano nella curva gaussiana. Parimenti si suole talvolta osservare se si verifica la relazione $\frac{2v_2}{|v_1|^2} = \frac{2\sigma^2}{|v_1|^2} = \pi$ (essendo $|v_1|$ lo scarto semplice medio dalla media aritmetica cioè la media dei valori assoluti degli scarti o primo momento assoluto) poichè essa si avvera nella funzione delle probabilità.

Ora, in quest'ultimo ordine di idee, è facile immaginare indici di normalità analoghi ed altrettanto semplici, una volta determinato il valore che i momenti di diverso ordine assumono nella funzione teorica che serve di confronto.

Un breve cenno su talune proprietà dei momenti della curva delle probabilità sarà utile per chiarire il fondamento di questa famiglia di indici.

Per la curva normale delle probabilità è stato dimostrato che il momento r^o , per r pari, è $\frac{1.3.5.7 \dots (r-1)}{2^{\frac{r}{2}}}$, e, per r dispari, è $= 0$.

È pure stato dimostrato che, per r dispari, il valore del momento r^o assoluto - media dei valori assoluti delle potenze r^e degli scarti dalla media aritmetica - è $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r-1}{2} \right) !$

È facile il passaggio, dai risultati ottenuti nella curva normale delle probabilità (cioè della curva della probabilità con precisione $h=1$) a risultati valevoli per una curva di probabilità di precisione h qualsivoglia.

Come è noto, la curva normale è ottenuta alterando, nella stessa proporzione h , ma in senso opposto, ordinate ed ascisse della fun-

zione $f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, cioè, considerando la funzione corrispondente

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \text{ relativa all'argomento } \xi = hx = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}.$$

Il momento r^0 di $f(x)$ è

$$[1] \quad \nu_r = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Il momento r^0 di $f(\xi)$ è, per quanto si è detto:

$$[2] \quad \nu'_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \begin{cases} \frac{1.3.5.7 \dots (r-1)}{2^{\frac{r}{2}}} & \text{per } r \text{ pari} \\ 0 & \text{per } r \text{ dispari} \end{cases}$$

ed il momento r^0 assoluto, per r dispari, risulta:

$$[3] \quad |\nu'_r| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right|^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r-1}{2}\right) !$$

Portando fuori dell'integrale la costante $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$, possiamo scrivere la [2] e la [3] nella forma:

$$\nu'_r = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \begin{cases} \frac{1.3.5.7 \dots (r-1)}{2^{\frac{r}{2}}} & \text{per } r \text{ pari} \\ 0 & \text{per } r \text{ dispari} \end{cases}$$

$$|\nu'_r| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r-1}{2}\right) ! \quad \text{per } r \text{ dispari}$$

e, moltiplicando e dividendo per $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$, si ha:

$$\begin{aligned}
 v'_r &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{h} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \\
 [4] \quad &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{cases} \frac{1.3.5.7 \dots (r-1)}{2^{\frac{r}{2}}} & \text{per } r \text{ pari} \\ 0 & \text{per } r \text{ dispari} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |v'_r| &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{h} = \\
 [5] \quad &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2-1}{2}\right)! \quad \text{per } r \text{ dispari}
 \end{aligned}$$

Ma la [4] rappresenta, evidentemente, come risulta subito confrontandola con la [1], il momento r^o della funzione originaria $f(x)$ diviso $(\sqrt{2}\sigma)^r$ e la [5] costituisce, analogamente, il momento r^o assoluto della $f(x)$ pure diviso per $(\sqrt{2}\sigma)^r$.

Cioè si avranno le relazioni:

$$[6] \quad v'_r = \frac{v_r}{(\sqrt{2}\sigma)^r}, \quad |v'_r| = \frac{|v_r|}{(\sqrt{2}\sigma)^r},$$

e, quindi le altre:

$$[7] \quad v_r = v'_r \cdot (\sqrt{2}\sigma)^r, \quad |v_r| = |v'_r| (\sqrt{2}\sigma)^r$$

Ma per la [2] e la [3] avremo anche:

$$\begin{aligned}
 v_r &= \frac{1.3.5.7 \dots (r-1)}{2^{\frac{r}{2}}} 2^{\frac{r}{2}} \sigma^r = 1.3.5.7 \dots (r-1) \sigma^r. \\
 [8] \quad |v_r| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)! 2^{\frac{r}{2}} \sigma^r
 \end{aligned}$$

Da questi risultati si ricavano immediatamente le già ricordate proprietà della curva gaussiana

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 3, \text{ e } \frac{2\sigma^2}{|v_1|} = \pi : \text{ infatti } \beta_1 = \frac{0}{v_2^2}, \beta_2 = \frac{v_4}{v_2^2} = 3;$$

$$\frac{2\sigma^2}{|v_1|^2} = \frac{2v_2}{|v_1|^2} = \frac{2v_2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 0! 2^{\frac{1}{2}} v_2^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \pi$$

Ma gli stessi risultati permettono di consegnare altri consimili criteri di normalità basati pure sul confronto fra momenti di ordine diverso.

Accenneremo, per esempio ad uno di essi, ricavato dal rapporto fra momenti di ordine r ed $r-2$.

Ragguagliando v_r ad $v_{(r-2)}$, per r pari, otterremo:

$$[9] \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (r-1) \sigma^r}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (r-2-1) \sigma^{r-2}} = (r-1) \sigma^2 = (r-1) v_2$$

e, per r dispari,

$$[10] \quad \frac{\frac{|v_r|}{|v_{r-2}|}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{r-2-1}{2}\right)! 2^{\frac{r-2}{2}} \sigma^{r-2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)! 2^{\frac{r}{2}} \sigma^r}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{r-2-1}{2}\right)! 2^{\frac{r-2}{2}} \sigma^{r-2}} = (r-1) \sigma^2 = (r-1) v_2$$

Quindi, in una distribuzione che segua la legge gaussiana, i rapporti fra il quarto ed il secondo momento, fra il sesto ed il quarto ecc. dovrebbero rispettivamente riuscire pari a $3\sigma^2$, $5\sigma^2$ ecc. o prossimi a tali valori multipli della varianza, mentre i rapporti fra il terzo ed il primo momento assoluto, fra il quinto ed il terzo ecc. dovrebbero essere uguali o prossimi a $2\sigma^2$, $4\sigma^2$, ecc.

La [10] consente poi di esprimere il momento assoluto di ordine r^0 (per r dispari) in termini del primo e del secondo momento: infatti da

$$\frac{|v_r|}{|v_{r-2}|} = (r-1) \sigma^2 = (r-1) v_2 \text{ si ricava } |v_r| = |v_{r-2}| (r-1) v_2 \text{ e, partendo}$$

a_i	f_i	$x_i = (a_i - m)$	$x_i^2 = (a_i - m)^2$	$x_i^3 = (a_i - m)^3$	$x_i^4 = (a_i - m)^4$	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	$x_i^3 f_i$	$x_i^4 f_i$
1	1	-8	64	-512	4096	-1	64	-512	4096
2	5	-7	49	-343	2401	-35	245	-1715	12005
3	24	-6	36	-216	1296	-144	864	-5184	31104
4	92	-5	25	-125	625	-460	2300	-11500	57500
5	279	-4	16	-64	256	-1116	4464	-17856	71424
6	655	-3	9	-27	81	-1965	5895	-17685	53055
7	1210	-2	4	-8	16	-2420	4840	-9680	19360
8	1747	-1	1	-1	1	-1747	1747	-1747	1747
9	1974	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1747	1	1	1	1	1747	1747	1747	1747
11	1210	2	4	8	16	2420	4840	9680	19360
12	655	3	9	27	81	1965	5895	17685	53055
13	279	4	16	64	256	1116	4464	17856	71424
14	92	5	25	125	625	460	2300	11500	57500
15	24	6	36	216	1296	144	864	5184	31104
16	5	7	49	343	2401	35	245	1715	12005
17	1	8	64	512	4096	11	64	512	4096
	10.000					-7895	40838	-65879	500.582
						+7895		+65879	
						15.790		131.758	

da $|v_3| : |v_1|$ si ha: $\frac{|v_3|}{|v_1|} = 2v_2$, $|v_3| = 2v_2|v_1|$ da cui discende: $|v_5| =$
 $= |v_3| 4v_2 = 4 \times 2 |v_1| v_2 v_2 = 8v_2^2$; $|v_7| = 6 \times 8 |v_1| v_2^2 v_2 = 48 |v_1| v_2^3$;
 $|v_9| = 8 \times 48 |v_1| v_2^3 v_2 = 384 |v_1| v_2^4$ ecc.

Applichiamo il criterio esposto alla distribuzione, contenuta nella tabella unita, che presenta i caratteri della normalità, per essere stata desunta dalle tavole degli integrali della funzione di probabilità.

I momenti medi dalla media aritmetica risultano:

$$v_1 = 0, |v_1| = 15.790 : 10.000 = 1,790$$

$$v_2 = 40.838 : 10.000 = 4,0838$$

$$v_3 = 0, |v_3| = 131.758 : 10.000 = 13,1758$$

$$v_4 = 500.582 : 10.000 = 50,0582$$

Si confronti il 4° momento col 2°. Converrà applicare la correzione di SHEPPARD, per eliminare od attenuare l'effetto dovuto al fatto che si sono assunte come intensità i valori centrali delle classi (che, nel caso concreto, hanno modulo = 1).

Il momento secondo corretto diventa $4,0838 - \frac{1}{12} = 4,00047$, ed
il momento 4° $= 50,0582 - \frac{1}{2} 4,0838 + \frac{7}{240} = 48,04547$.

Il valore del rapporto che si ottiene, $48,04547 : 4,00047 = 12,00996$, è assai prossimo al triplo del secondo momento corretto $3 \times 4,00047 = 12,00141$, come potevasi prevedere in base alla relazione posta in luce.