

## SUI GRUPPI QUASI-ABELIANI CON ELEMENTI APERIODICI (\*)

GUIDO ZAPPA

**SUMMARIVM** — Antecedenti nota Auctor quasi-abelianas classes eas appellavit in quibus binae subclasses quaelibet inter se permutari semper possint, recensitque omnia quasi-abelianarum classium genera, quae e duobus tantum elementis gigni possint.

Hac nota, in studium quasi-abelianarum classium progrediens, Auctor determinat omnes quasi-abelianas classes elementa aperiodica continentes, quae e finito elementorum numero gigni possint; mox expositurus eas quasi-abelianas classes, quae e finito quidem elementorum numero gigni possint, nullum tamen elementum aperiodicum habeant.

In una Nota presentata presso questa stessa Accademia<sup>(1)</sup> ho introdotto il concetto di gruppi quasi-abeliani. Precisamente, un gruppo vien chiamato quasi-abeliano, quando due suoi qualunque sottogruppi son sempre permutabili tra loro. I gruppi quasi-abeliani generabili mediante due elementi sono stati da me determinati nella suddetta Nota. Continuando lo studio dei gruppi quasi-abeliani possedenti un numero finito di generatori, rivolgo qui l'attenzione su quelli, tra questi gruppi, che posseggono qualche elemento aperiodico. Dimostro che, se  $G$  è un tale gruppo, il quale non sia abeliano, si può trovare un sottogruppo normale finito e abeliano  $H$  di  $G$ , ed un elemento aperiodico  $g$  di  $G$ , di modo che il gruppo  $\{H, g\}$  coincida con  $G$ , e che  $g$  trasformi ogni elemento  $h$  di  $H$ , il cui ordine sia potenza di un numero primo  $p$ , in

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) *Gruppi quasi-abeliani*. Pontificia Academia Scientiarum. « Acta », vol. VI, n. 29.

un elemento della forma  $h^{1+2^x}$ , ove  $x$  è un intero dipendente da  $p$ , ma non dall'elemento  $h$ , soggetto all'ulteriore condizione di esser pari, quando  $p=2$ . Viceversa, un gruppo  $G$  che soddisfaccia alle suddette condizioni, è quasi abeliano.

Vengo in tal modo a generalizzare il risultato, ottenuto nella Nota I, in base al quale ogni gruppo quasi-abeliano generabile mediante due elementi, e possedente qualche elemento aperiodico, si può costruire mediante gli elementi  $g, h_1, \dots, h_s$ , ove  $g$  è aperiodico, mentre  $h_i$  è di ordine  $p_i^{\alpha_i}$  ( $\alpha_i$  intero;  $p_1, p_2, \dots, p_s$  numeri primi distinti); avendosi inoltre  $h_i h_j = h_j h_i$  ( $i, j = 1, \dots, s$ ), e  $g^{-1} h_i g = h_i^{1+2^{\alpha_i}}$  ( $i = 1, \dots, s$ ), con  $\alpha_i$  intero, e, nel caso che sia  $p_i = 2$ , pari. Di questo risultato mi giovo in diversi punti della presente Nota.

Per completare lo studio dei gruppi quasi-abeliani con un numero finito di generatori, resta ad esaminare il caso in cui il gruppo sia privo di elementi aperiodici (indi finito). Questo caso sarà oggetto di una Nota successiva.

1. - Determiniamo in primo luogo i gruppi quasi-abeliani, generabili mediante un numero finito di elementi, e *possedenti qualche elemento aperiodico*.

Sia  $G$  un tal gruppo. Il gruppo congiungente due qualsiasi sottogruppi di  $G$  d'ordine finito ha anch'esso ordine finito, perchè i due sottogruppi sono in esso permutabili, e quindi è costituito di elementi aventi tutti ordine finito. Da ciò segue che *gli elementi d'ordine finito di  $G$  costituiscono un sottogruppo  $H$* , evidentemente caratteristico o quindi normale.

Mostriamo ora che

*Ogni elemento di  $H$  è trasformato in una sua potenza da ogni elemento di  $G$ ,*

*di guisa che, in particolare*

*$H$  è abeliano o hamiltoniano.*

Sia  $h$  un elemento di  $H$ , e  $g$  un elemento di  $G$  (esistente, per ipotesi) aperiodico, cioè non contenuto in  $H$ . Dalla Nota I segue che, essendo  $\{g, h\}$  quasi-abeliano,  $h$  è trasformato da  $g$  in una sua potenza. Onde  $h$  è trasformato in una sua potenza da ogni elemento di  $G$  non contenuto in  $H$ . Se poi  $h'$  è un elemento di  $H$ ,  $g h h'$ , al pari di  $g$ ,

non è in  $H$ , quindi trasforma  $\{h\}$  in sè. Ma anche  $g$  trasforma  $\{h\}$  in sè, quindi anche  $h' = g^{-1} \cdot g'h$ , trasforma  $\{h\}$  in sè. In conclusione,  $\{h\}$  è normale in  $G$ , c. d. d.

2. - Supponiamo d'ora in poi che  $G$  non sia abeliano, e mostriamo che allora

*Esiste un elemento  $g$  di  $G$ , tale che  $\{H, g\} = G$ .*

Devono infatti esistere un elemento  $g$  di  $G$  aperiodico, ed un elemento  $h$  di  $H$ , non permutabili. Si può anche supporre che  $g$  sia uno dei generatori di  $G$ , e che, essendo questi in numero finito, non esista alcun generatore  $\bar{g}$  di  $G$  tale che  $\{H, g\}$  sia contenuto in  $\{H, \bar{g}\}$ .

Dico che allora è  $\{H, g\} = G$ . Infatti, in caso contrario, dovrebbe esistere un generatore  $g'$  di  $G$ , non contenuto in  $\{H, g\}$ . Mostriamo anzitutto che  $g$  e  $g'$  dovrebbero avere una potenza non identica in comune.

Se infatti ciò non fosse,  $g$  e  $g'$ , in base alla Nota I sarebbero permutabili. Inoltre  $\{g', h\} = \{g', g'h\}$ , e poichè l'ordine relativo di  $h$  rispetto a  $g'$  è finito, lo sarebbe anche quello di  $g'h$  rispetto a  $g'$ , cioè  $g'h$  e  $g'$  avrebbero potenze non identiche in comune. Ne seguirebbe che  $g'h$  e  $g$  non avrebbero potenze non identiche in comune, e allora, sempre per la Nota I, sarebbero permutabili; e del pari sarebbero permutabili  $g$  e  $h (= g'^{-1} \cdot g'h)$ , contro l'ipotesi.

Avendo pertanto  $g$  e  $g'$  una potenza non identica in comune, si avrebbe, in base alla Nota I,  $\{g, g'\} = \{\bar{h}, \bar{g}\}$ , con  $\bar{h}$  elemento d'ordine finito, quindi appartenente ad  $H$ , e  $\bar{g}$  elemento aperiodico, che si può supporre coincidente con uno dei due elementi  $g$  e  $g'$ . Ma non può essere  $\bar{g} = g$ , altrimenti  $g'$  sarebbe in  $\{H, g\}$ , contro l'ipotesi, onde  $\bar{g} = g'$ , e allora  $g$  sarebbe in  $\{H, g'\}$ , cioè, visto che  $g'$  non è in  $\{H, g\}$ ,  $\{H, g'\}$  conterrebbe propriamente  $\{H, g\}$ , contro l'ipotesi.

Pertanto è necessariamente  $\{H, g\} = G$ .

3. - In base alla Nota I, dovendo  $\{g, h\}$  essere quasi-abeliano, si ha che se l'ordine di  $h$  è del tipo  $p^a$ , con  $p$  numero primo,  $g$  trasforma  $h$  in una sua potenza della forma  $h^{1+px}$ , con  $x$  intero qualunque, se  $p$  è dispari, e con  $x$  intero pari, se  $p=2$ .

Di conseguenza  $H$  è necessariamente abeliano.

Segue già dal n. 1 che  $H$  è abeliano o hamiltoniano. Ma se  $H$  fosse hamiltoniano, esso avrebbe un sottogruppo  $Q$  isomorfo al gruppo dei quaternioni, cioè due elementi del quarto ordine,  $h_1$  ed  $h_2$ , tali che  $h_1 h_2 = h_2 h_1^3 = h_2^3 h_1$ . Per quanto precede, non si può avere  $g^{-1} h_1 g = h_1^{-1}$ , onde necessariamente sarebbe  $g^{-1} h_1 g = h_1$ . Si avrebbe pertanto, posto  $g' = h_2 g$ ,  $g'^{-1} h_1 g' = g^{-1} h_2^{-1} h_1 h_2 g = g^{-1} h_1^{-1} g = h_1^{-1}$ , il che, sempre per quel che precede, non può essere, una volta che, come si vede subito, è  $\{H, g'\} = G$ . Quindi  $H$  è necessariamente abeliano.

Inoltre:

Se  $h_1$  ed  $h_2$  sono due elementi di  $H$ , di ordini rispettivamente  $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}$  ( $p$  primo, e  $\alpha_2 \geq \alpha_1$ ), si ha  $g^{-1} h_1 g = h_1^{1+p\alpha_1}, g^{-1} h_2 g = h_2^{1+p\alpha_2}$ , con  $x_1 \equiv x_2 \pmod{p^{\alpha_2-1}}$ .

Supponiamo  $g^{-1} h_1 g = h_1^{1+p\alpha_1}, g^{-1} h_2 g = h_2^{1+p\alpha_2}$ , e dimostriamo che  $x_1 \equiv x_2 \pmod{p^{\alpha_2-1}}$ . L'elemento  $h_1 h_2$ , in base al n. 1, deve essere mutato in una sua potenza da  $g$ . Esso, d'altra parte, è mutato da  $g$  in  $h_1^{1+p\alpha_1} h_2^{1+p\alpha_2}$ , pertanto quest'ultimo elemento deve essere potenza di  $h_1 h_2$ . E ciò, dato che  $h_1$  è permutabile con  $h_2$ , e che  $h_1 h_2$  ha, del pari che  $h_2$ , periodo  $p^{\alpha_2}$ , può avvenire se e solo se  $1+p\alpha_1 \equiv 1+p\alpha_2 \pmod{p^{\alpha_2}}$ , cioè  $x_1 \equiv x_2 \pmod{p^{\alpha_2-1}}$ .

4. - Pertanto tutti gli elementi di  $H$  il cui ordine è potenza di un numero primo  $p$  sono mutati da  $g$  ciascuno nella sua potenza d'ordine  $1+p\alpha$ , ove  $\alpha$  è un intero che può supporre il medesimo per tutti i suddetti elementi. Inoltre, se  $p=2$ ,  $\alpha$  è pari.

Viceversa, sia  $G$  un gruppo possedente un sottogruppo normale  $H$  abeliano d'ordine finito, tale inoltre che il fattoriale  $G/H$  sia ciclico infinito: di modo che sarà  $G = \{g, H\}$ , con  $g$  elemento aperiodico opportuno. Inoltre  $g$  trasformi ogni elemento di  $H$  il cui ordine divide uno stesso numero primo  $p$ , nella sua potenza  $(1+p\alpha)$ -esima, ove  $\alpha$  è un intero dipendente solo da  $p$ , che per di più sia pari quando  $p=2$ . Vogliamo dimostrare che sotto queste ipotesi  $G$  è un gruppo quasi-abeliano.

Siano  $g^* h$  e  $g^* \bar{h}$  due elementi di  $G$ ,  $h$  e  $\bar{h}$  indicando elementi di  $H$ : ci proponiamo di mostrare che  $\{g^* h\}$  e  $\{g^* \bar{h}\}$  son tra loro permutabili. Supponiamo, per fissare le idee, che sia  $h = h_1 \cdot h_2$ , e  $\bar{h} = \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2$ ,

ove  $h_1$  ed  $\bar{h}_1$  hanno per ordini potenze del numero primo  $p_1$  mentre  $h_2$  ed  $\bar{h}_2$  potenze del numero primo  $p_2$ . Dal corso della dimostrazione apparirà chiaro che la cosa vale in generale.

Sia  $L$  il sottogruppo di  $G$  generato da  $g$  e  $\bar{h}$ , e sia  $N$  il sottogruppo normale ciclico generato da  $\bar{h}$ . Poichè  $g^r h$  e  $g^s \bar{h}$  sono in  $L$ , potremo fissare l'attenzione su di questo, senza pensare più a  $G$ .

Il gruppo fattoriale  $L/N$  può evidentemente generarsi mediante i soli elementi  $\gamma$  e  $\eta$  rispettivamente omologhi a  $g$  ed  $h$  nell'omomorfismo tra  $L$  ed  $L/N$ . Inoltre si può porre  $\eta = \eta_1 \eta_2$ , ove  $\eta_1$  ed  $\eta_2$ , omologhi rispettivamente di  $h_1$  ed  $h_2$  hanno ordini di potenze di  $p_1$  e  $p_2$  e sono trasformati da  $\gamma$  ciascuno in una propria potenza, della forma  $1 + p_1 x_1$ , o  $1 + p_2 x_2$ .

In base ai risultati della Nota I, un gruppo generato da tre elementi,  $\gamma, \eta_1, \eta_2$ , tali che l'ordine di  $\eta_1$  è una potenza del numero primo  $p_1$ , l'ordine di  $\eta_2$  è una potenza del numero primo  $p_2$ ,  $\gamma$  è aperiodico e trasforma  $\eta_i$  in una sua potenza del tipo  $\eta_i^{1+p_i \omega_i}$ , in modo che, se  $p_i = 2$ ,  $x_i$  è pari ( $i = 1, 2$ ), è quasi-abeliano. In un tal gruppo si deve pertanto avere

$$[I] \quad \gamma^n \eta_1 \eta_2 \cdot \gamma^s = (\gamma^s)^m (\gamma^n \eta_1 \eta_2)^n$$

con  $m$  ed  $n$  opportuni interi. E poichè un'eguaglianza di questo tipo deve valere qualunque sia l'ordine di  $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ), purchè potenza di  $p_i$ , possiamo supporre di avere scelto  $m$  ed  $n$  in modo che, scritto il primo membro della [I] sotto la forma

$$\gamma^{r+s} \eta_1^{(1+p_1 x_1)^s} \eta_2^{(1+p_2 x_2)^s}$$

e il secondo membro sotto la forma

$$\gamma^{sm+rn} \eta_1^{0_1} \eta_2^{0_2}$$

con  $0_i = \frac{(1 + p_i x_i)^{nr} - 1}{(1 + p_i x_i)^r - 1}$ , gli esponenti di  $\eta_i$  nei due membri risultino congrui tra loro rispetto a  $p_i^{\omega_i}$ , ove  $\omega_i$  è un intero positivo prefissato, ma grande quanto si vuole.

Valendo la [1] in  $L/N$ , con  $m$  ed  $n$  scelti nel modo ora detto, dovrà valere di conseguenza, attesa la permutabilità di  $h$  ed  $\bar{h}$ , pel gruppo  $L$ , la relazione seguente

$$[2] \quad g^r h \cdot g^s \bar{h} = (g^s \bar{h})^m \cdot (g^r h)^n \cdot \bar{h}^l$$

con  $l$  opportuno intero. Sviluppando, con l'aiuto delle relazioni  $g^{-1} h_i g = h_i^{1+p_i x_i}$ ,  $g^{-1} \bar{h}_i g = \bar{h}_i^{1+p_i x_i}$ , la [2], si ha

$$[3] \quad g^{r+s} h_1^{(1+p_1 x_1)^s} h_2^{(1+p_2 x_2)^s} \bar{h}_1 \bar{h}_2 = g^{ms+nr} h_1^{t_1} h_2^{t_2} \bar{h}_1^{\bar{t}_1} \bar{h}_2^{\bar{t}_2} \bar{h}_1^l \bar{h}_2^l$$

ove è

$$t_i = \frac{(1+p_i x_i)^{nr} - 1}{(1+p_i x_i)^r - 1} \quad \bar{t}_i = \frac{(1+p_i x_i)^{ms} - 1}{(1+p_i x_i)^s - 1} (1+p_i x_i)^{nr}$$

Per quanto precede, si può supporre di avere scelto  $m$  ed  $n$  in modo che si abbia

$$[4] \quad (1+p_i x_i)^s \equiv t_i \pmod{p_i^{\omega_i}}$$

con  $\omega_i$  intero prefissato, arbitrariamente grande.

Dalle [4] si ottiene, tenendo presente il significato di  $t_i$

$$(1+p_i x_i)^s [(1+p_i x_i)^r - 1] \equiv (1+p_i x_i)^{nr} - 1 \pmod{p_i^{\omega_i}},$$

$$(1+p_i x_i)^{r+s} - (1+p_i x_i) \equiv (1+p_i x_i)^{nr} - 1 \pmod{p_i^{\omega_i}}.$$

E tenendo conto del fatto che nella [3] le potenze di  $g$  nei due membri devono esser eguali, cioè  $r+s = ms+nr$ , si ottiene

$$(1+p_i x_i)^{ms+nr} - (1+p_i x_i)^s \equiv (1+p_i x_i)^{nr} - 1 \pmod{p_i^{\omega_i}}$$

e ancora

$$[5] \quad (1+p_i x_i)^{nr} [(1+p_i x_i)^{ms} - 1] \equiv (1+p_i x_i)^s - 1 \pmod{p_i^{\omega_i}}$$

Se, come possiamo supporre<sup>(1)</sup>, è  $x_i \neq 0$ , non può aversi  $(1 + p_i x_i)^s = 1$  se non quando è  $p_i = 2$ , ed  $x_i$  dispari, caso che è stato escluso per ipotesi. Pertanto  $(1 + p_i x_i)^s - 1$  non è zero, ed esiste una massima potenza  $p_i^{\sigma_i}$ , di  $p_i$ , per cui esso è divisibile. Dividendo allora ambo i membri della [5] per  $(1 + p_i x_i) - 1$ , si ottiene

$$[6] \quad \frac{(1 + p_i x_i)^{ms} - 1}{(1 + p_i x_i)^s - 1} (1 + p_i x_i)^{nr} \equiv 1 \pmod{p_i^{\omega_i - \sigma_i}}$$

Si noti a tal punto che  $\sigma_i$  non dipende dal modo con cui si scelgono  $m$  ed  $n$ . Pertanto essi si possono prendere in modo che, insieme ad  $\omega_i$ , anche  $\omega_i - \sigma_i$  risulti grande quanto si vuole. In particolare, si può supporre  $\omega_i - \sigma_i \geq \alpha_i$ , ove  $p_i^{\alpha_i}$  sia l'ordine di  $\bar{h}_i$ .

Ricordando il significato di  $\bar{t}_i$ , si ha dalla [6]

$$[7] \quad \bar{t}_i \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

D'altra parte nella [3] gli esponenti a cui compare  $\bar{h}_i$  nei due membri devono essere congrui  $\pmod{p_i^{\alpha_i}}$ , e pertanto deve aversi

$$[8] \quad \bar{t}_i + l \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

Dalle [7] e [8] segue  $l \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ , onde  $\bar{h}' = h_1' h_2' = 1$ , e la [2] diviene

$$[9] \quad g^r h \cdot g^s \bar{h} = (g^s \bar{h})^m (g^r h)^n.$$

5. - La [9] del n. prec. ci permette di dedurre senza difficoltà che i gruppi  $\{g^r h\}$  e  $\{g^s \bar{h}\}$  sono tra loro permutabili. Infatti, se  $(g^r h)^n (g^s \bar{h})^m$  son due potenze di  $g^r h$  e di  $g^s \bar{h}$  rispettivamente, si avrà intanto

<sup>(1)</sup> Se  $x_i = 0$ ,  $\{g, h, \bar{h}\}$  è il prodotto diretto di  $\{h_1, \bar{h}_1\}$  e di  $\{g, h_2, \bar{h}_2\}$ , dei quali il primo è abeliano, mentre il secondo è abeliano se  $x_2 = 0$ , quasi-abeliano, in base alla dimostrazione di cui sopra, quando  $x_2 \neq 0$ . E da ciò si deduce facilmente che  $\{g, h, \bar{h}\}$  è quasi-abeliano.

$(g^r h)^u = g^{ru} h^*$ , e  $(g^s \bar{h})^v = g^{sv} \bar{h}^*$ , ove  $h^*$  e  $\bar{h}^*$  son due opportuni elementi di  $H$ . Ma allora, applicando la [9] a  $g^{ru} h^*$  e a  $g^{sv} \bar{h}^*$ , si ha  $g^{ru} h^* \cdot g^{sv} \bar{h}^* = (g^{sv} \bar{h}^*)^\mu (g^{ru} h^*)^\nu$ , con  $\mu$  e  $\nu$  interi opportuni. Da cui

$$(g^r h)^u (g^s \bar{h})^v = (g^s \bar{h})^{v\mu} (g^r h)^{u\nu}$$

il che ci dice che  $\{g^r h\}$  e  $\{g^s \bar{h}\}$  sono permutabili.

Dai numeri precedenti possiamo pertanto concludere che

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo non abeliano  $G$ , generabile mediante un numero finito di elementi, e possedente anche elementi aperiodici, sia quasi-abeliano, è che esso possieda un sottogruppo normale  $H$  finito, ed un elemento  $g$  aperiodico, tali che  $H$  è abeliano, e normale in  $G$ ;*

*gli elementi di  $H$ , il cui ordine è potenza di uno stesso numero primo  $p$ , vengono trasformati da  $g$  ciascuno nella propria potenza  $(1 + p^x)$ -esima, ove  $x$  è un intero dipendente unicamente da  $p$ , il quale inoltre, quando  $p = 2$ , è pari;*

*il gruppo  $\{H, g\}$  coincide con  $G$ .*