ACTA
Vol. VII - N. 2
pag. 1-6

SULL'ESISTENZA DI CURVE ALGEBRICAMENTE NON ISOLATE, A SERIE CARATTERISTICA NON COMPLETA, SOPRA UNA RIGATA ALGEBRICA (*)

GUIDO ZAPPA

SVMMARIVM. — Ostendit Auctor exemplum curvae algebricae, ad systema continuum ∞^1 pertinentis, quae sint supra rigatam algebricam, quaeque habeat seriem characteristicam non completam.

In un suo recente lavoro, SEVERI ha fornito, tra l'altro (1), esempi di curve algebricamente isolate sopra una superficie algebrica, a serie caratteristica non completa; e avendo pure intuito che tra le curve algebricamente isolate di una superficie algebrica dovesse esservi eccezioni al teorema della completezza della serie caratteristica, egli ha proposto, in una lezione di seminario del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, di ricercare eccezioni del genere sulle rigate algebriche (2).

Successivamente (in una Memoria in corso di pubblicazione), SEVERI ha dimostrato che la serie caratteristica della *generica* curva (irriducibile) di un sistema algebrico almeno ∞^1 sopra una superficie algebrica è sempre completa; più precisamente, una particolare curva $\overline{C}$ di un sistema algebrico $\}C\{\infty^r, (r \geq 1)$ può avere la serie caratteristica non completa, soltanto se il numero delle curve *distinte* di $\}C\{$ che passano per r punti generici di $\overline{C}$ è *minore* del numero delle *distinte*

(*) Nota presentata dall'Accademica Pontificio S. E. Francesco Severi il 22 aprile 1943.

(1) *Intorno ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.* « Commentarii mathematici Helvetici », gennaio 1943.

(2) Cfr. la questione nella rubrica « Problemi, risultati, discussioni » dei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », Serie V, vol. IV, fasc. 1.

di $\}C\{$ che passano per r punti generici della superficie. In tal caso quando r punti generici della superficie tendono ad r punti di $\overline{C}$, almeno due delle curve di $\}C\{$ passanti per essi tendono a $\overline{C}$.

In questa Nota rispondo alla questione posta da SEVERI, fornendo un effettivo esempio di una curva algebrica, appartenente ad un sistema algebrico ∞^1, e possedente serie caratteristica incompleta. Tale esempio è ottenuto sopra una rigata di genere 2 ed ordine 6, dello spazio ordinario.

A controllo del risultato da me raggiunto, dimostro inoltre che detta curva soddisfa alla condizione necessaria, data da SEVERI e più sopra riportata, perchè una curva sia a serie caratteristica incompleta.

Mi riserbo di tornare sull'argomento quando sarà apparsa la Memoria di SEVERI, e di determinare, giovandomi dei risultati in essa contenuti, i vari tipi di eccezioni al teorema che posson presentarsi su una rigata [1].

1. - Sia C una quartica di genere 2 appartenente al piano α, e sia K un suo gruppo canonico, costituito dai punti P_1 e P_2. La retta $P_1 P_2$ incontra ulteriormente C nei due punti P_3 e P_4 coincidenti nel punto doppio P della curva. Siano poi Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 quattro punti allineati di C.

Consideriamo la serie lineare completa g_6^4, contenente il gruppo $L = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + P_3 + P_4$. Essendo il suo ordine $> 2p$, essa è priva di coppie neutre, e del pari lo è il suo resto rispetto ad un punto di C. Ne segue che non tutti i gruppi della g_6^4 che contengono due dei punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ne contengone necessariamente un terzo. Analoga conclusione varrà per la generica g_6^3 contenente L.

Se pertanto Γ è un'immagine proiettiva di una tale g_6^3, e se $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$, $\overline{Q}_3$, $\overline{Q}_4$ sone gli omologhi, su Γ, dei punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, mai tre dei punti $\overline{Q}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sono allineati.

Detto π il piano su cui giacciono i punti $\overline{Q}_i$, si può fare in modo, scegliendo opportunamente il centro di proiezione O su π, che i punti

[1] Ringrazio vivamente S. E. SEVERI per avermi tenuto al corrente circa i risultati da lui via via conseguiti, e per i preziosi suggerimenti che mi ha fornito nello svolgimento della ricerca.

Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, proiezioni dei punti $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$, $\overline{Q}_3$, $\overline{Q}_4$, da O su un piano β, formino un birapporto eguale a quello dei punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, di C. Detti poi $\overline{P}_3$ e $\overline{P}_4$ gli omologhi, su Γ, di P_3 e P_4, si può fare in modo, scegliendo opportunamente O, che le proiezioni P_3 e P_4 di $\overline{P}_3$ e $\overline{P}_4$ da O su β siano distinte.

Sia E la proiezione di Γ da O su β. Possiamo, in base a quanto precede, supporre, dopo avere eventualmente assoggettato β ad una omografia, che β sia un piano incidente ad α secondo una retta r, contenente i punti Q_i di C e i punti Q'_i di E, e che inoltre Q_i coincida con Q'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Le ulteriori intersezioni di r con E sono costituite dai punti P'_3 e P'_4.

Le curve C ed E sono birazionalmente equivalenti. Ai punti $Q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ e $P_i (i = 3, 4)$. corrispondono su E i punti Q'_i e P'_i, rispettivamente. Congiungendo punti omologhi in questa corrispondenza birazionale mediante rette, si ottiene una rigata del sesto ordine, segata da β secondo la sestica E, e da α secondo la quartica C e la curva D costituita dalle due generatrici di F che congiungono rispettivamente P_3 e P_4 con P'_3 e P'_4.

2. - Poniamo $G = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$, $H = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$. Si ha, su F,

$$E \equiv C + D$$

donde, su C,

$$(C, C) \equiv (C, E) - (C, D)$$

od anche tenuto conto del fatto che $(C, E) = H, (C, D) = P_3 + P_4$,

$$(C, C) \equiv H - P_3 - P_4 .$$

Ma essendo, su C, $G \equiv H$, si ha anche

$$(C, C) \equiv G - P_3 - P_4 = P_1 + P_2 = K$$

onde *la serie caratteristica di* C *è costituita da gruppi canonici.*

3. – Da ciascuno dei punti doppi di E escono due generatrici di F, le quali devono esser distinte perchè passano per punti distinti di C. Dal generico punto A della linea doppia escon pertanto due generatrici di F individuanti un piano σ bitangente ad F. Quando A, muovendosi sulla linea doppia, tende al punto doppio P di C, σ tende ad α, le due generatrici di F giacenti in σ, tendono alle due generatrici che formano la curva D, mentre l'ulteriore intersezione C_1 di σ con F tende a C. Onde $\}C\{$ è almeno ∞^1.

Ne può $\}C\{$ avere dimensione >1, perchè la curva generica di $\}C\{$ deve essese una quartina di genere 2, quindi deve giacere in un piano che sega ulteriormente F secondo due generatrici. Se pertanto $\}C\{$ fosse ∞^2, F avrebbe ∞^2 coppie di generatrici incidenti, cioè le generatrici di F sarebbero a due a due incidenti, e la F stessa sarebbe un cono, il che evidentemente non è.

In conclusione, $\}C\{$ è ∞^1, e quindi la sua serie caratteristica è ∞^0; questa, d'altra parte, in base al n. 2, è cortituita da gruppi della g_2^1 canonica, quindi è incompleta. Vale a dire C *è una curva, appartenente ad un sistema* ∞^1, *a serie caratteristica non completa.*

4. – Passiamo ora a dimostrare che la C soddisfa alla condizione necessaria, trovata da Severi e più sopra riportata, perchè una curva appartenente ad un sistema algebrico infinito abbia serie caratteristica non completa.

Se M è un generico punto di F, le curve di $\}C\{$ passanti per F sono segate da piani bitangenti ad F passanti per M non contenenti la generatrice R di F cui appartiene M. Basterà pertanto dimostrare che quando M tende ad un punto generico $\overline{M}$ di C, due almeno dei piani bitangenti ad F passanti per M e non contenenti R tendono ad α.

Consideriamo il cono Λ dei piani tangenti ad F uscenti da M, non contenenti R, e definiamo in esso una corrispondenza ω nel modo seguente. Detto β un piano generico di Λ, l'intersezione di ρ con F consterà di una generatrice S e di una quintica, la quale incontrerà la S nel punto di tangenza di ρ con F e in quattro punti della linea doppia, M_1, M_2, M_3, M_4. Da ciascuno dei punti $M_i (i = 1, 2, 3, 4)$ esce, oltra S, un'altra generatrice S'_i, che vien proiettata da M secondo un piano β'_i di Λ. Siano $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ gli omologhi ρ in ω.

Il piano ρ sarà corrispondente di sè stesso, o quando la S passa per un punto cuspidale della superficie, o quando una delle rette S'_i è in ρ, cioè quando ρ è bitangente ad F.

Vediamo ora cosa avviene quando M viene a cadere in un punto generico $\overline{M}$ di C, e determiniamo in tal caso gli omologhi di α per effetto di ω.

Evidentemente il piano α, considerato come proiettante da $\overline{M}$ una T_1, delle generatrici che costituiscono la curva D, ha due delle quattro intersezioni con la linea doppia di F e che cadono sopra T_1, coincidenti nel punto P, mentre le altre due intersezioni vanno nelle ulteriori due intersezioni di T_1 con C.

Risulta da ciò che l'altra T_2, delle generatrici che costituiscono D, conta per due tra le generatrici di F appoggiate ad S_1. È infatti da escludersi che P sia un punto cuspidale di F, perchè quando un punto della linea doppia tende a P, le due generatrici uscenti da esso tendono alle due generatrici distinte S_1 ed S_2. Quindi il piano α, considerato come proiettante S_2 da $\overline{M}$, conta per due tra gli omologhi di α in ω. Ciò basta per concludere che dei due piani bitangenti ad F uscenti da M e non contenenti la generatrice R per M, vengono a coincidere in α quando M viene a cadere in $\overline{M}$.

Appare quindi soddisfatta la condizione necessaria di Severi sopra citata.