ACTA
Vol. VII - N. 3
pag. 7-12

SU ALCUNI CONTRIBUTI ALLA CONOSCENZA DELLA STRUTTURA TOPOLOGICA DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE, DATI DAL METODO DELLO SPEZZAMENTO IN SISTEMI DI PIANI (*)

GUIDO ZAPPA

SVMMARIVM. — Auctor, reiectis ad aliam Commentationem demonstrationibus, exponit quid ipse, methodum qua plana in systemata dividuntur secutus, nuper invenerit de topologica algebricarum superficierum structura, praesertim quod attinet ad topologicam geometrici generis significationem.

1. – Scopo della presente Nota è di esporre brevemente alcuni risultati circa la struttura topologica delle superficie algebriche, cui son recentemente pervenuto mediante il metodo dello spezzamento delle medesime in sistemi di piani [1], risultati che compariranno, pienamente dimostrati, in una Memoria di prossima pubblicazione.

Sia F una superficie algebrica suscettibile di tendere, variando con continuità, ad un sistema di piani distinti L. Alcune delle rette d'intersezione dei piani di L costituiscono il limite della linea doppia di F: le diremo *rette doppie* della superficie spezzata L, o *rette d*. Le altre compaiono ex-novo al limite, e servono per stabilire la connes-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 6 maggio 1943.

(1) In una lezione di Seminario del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica SEVERI pose il problema di studiare le proprietà algebriche e topologiche delle superficie facendole degenerare in sistemi di piani (cfr. la questione n. 15 della rubrica «Problemi, discussioni, risultati» nei «Rendiconti di Matematica e sue Applicazioni», serie V, vol. 1, pag. 102). Tale metodo fu da me applicato allo studio di vari problemi. Si tenga presente, in particolare, la mia Memoria: *Sulla degenerazione dalle superficie algebriche in sistemi di piani distinti, con applicazioni allo studio di rigate*. Memorie della Reale Accademia d'Italia, vol. XIII, pag. 989-1023.

sione tra i vari piani di L: le diremo *rette di connessione* della superficie, o *rette* c. I punti d'incontro di terne di piani di L, intersecantisi a due a due secondo rette d, sono limiti di punti tripli di F e verran detti *punti* T o *punti tripli* della superficie spezzata. I punti d'incontri di terne di piani L, due dei quali siano connessi tra loro da una retta c e incontrino il terzo secondo rette d, costituiscono i punti di connessione della linea spezzata formata dalle rette d, e verranno detti *punti di connessione della linea doppia* di L, o *punti* D. I punti d'incontro di terne di piani di L, due dei quali si seghino secondo una retta d e incontrino il terzo secondo rette c, sono ciascuno limite di due punti cuspidali di F, e si chiameranno *punti cuspidali* di L, o *punti* X. Infine i punti in cui convergono tre piani di L, a due a due connessi secondo rette c verran detti *punti* Θ o *punti di connessione tripla* della superficie.

Per L si posson definire, come ho fatto nella Memoria citata in [1], il genere geometrico p_g e il genere aritmetico p_a, in modo del tutto analogo a quello che si segue per le superficie irriducibili; si dimostra che $p_g \gtrless p_a$, e si introduce, per L, il concetto di irregolarità.

2. – Definisco ora come *circuito unidimensionale* di un sistema di piani L un gruppo Δ di rette di connessione appartenenti ad L, le quali si possono disporre in una successione ciclica in modo che ciascuna retta sia connessa alla successiva mediante un punto di connessione tripla o un punto cuspidale. Introdotto poi opportunamente il concetto di *somma* di più circuiti unidimensionali, di circuiti circondanti (che convenzionalmente si possono chiamare *riducibile a zero*) e di circuiti *indipendenti* e *dipendenti*, giungo a dimostrare che *il numero dei circuiti unidimensionali indipendenti di un sistema di piani è uguale alla sua irregolarità*. Benchè io non abbia ancora affrontato la cosa, ritengo sia facile, partendo da questo risultato, ridimostrare che la connessione lineare (della L e) della F è uguale al doppio dell'irregolarità.

Dimostro anche che, se non vi sono punti cuspidali, la L (e quindi la F) è regolare, ritrovando in tal modo un noto risultato di SEVERI [1].

---

[1] *Scritti matematici offerti ad E. Ovidio*. Torino, Bocca, 1918, pag. 199.

Definisco inoltre come *circuito bidimensionale* di un sistema di piani L, un gruppo Γ di piani di L su cui sia dato un certo gruppo Δ di rette di connessione, con le seguenti proprietà: 1) Ogni piano di Γ è connesso da rette di Δ ad almeno altri tre piani di Γ; 2) I piani di Γ connessi con un dato piano α di Γ mediante rette di Δ si posson disporre in una successione ciclica, di modo che due piani consecutivi in detta successione risultino connessi tra loro da una retta di Δ. Definita poi *la somma* di più circuiti bidimensionali, e la loro *indipendenza* o *dipendenza* in modo opportuno, dimostro che *il numero dei circuiti bidimensionali indipendenti di* L *è eguale al suo genere geometrico.*

La dimostrazione dei fatti sopra esposti ha la seguente direttiva. Considerando via via alcune rette di connessione di L come rette doppie, riduco L ad un sistema di piani per cui $p_g = p_a = 0$; e faccio vedere che ogni volta che il considerare come retta doppia una data retta di connessione fa diminuire di una unità l'irregolarità (o rispettivamente il genere geometrico) diminuisce di una unità il numero dei circuiti unidimensionali (rispettivamente, bidimensionali) di L. Ho condotto la dimostrazione sotto le seguenti ipotesi restrittive, dalle quali spero tuttavia di potermi liberare: ogni piano di L contiene al più quattro rette di connessione; per un punto dello spazio passano al più tre piani di L.

3. – I circuiti unidimensionali e bidimensionali introdotti nel numero precedente, sono stati sin qui considerati *dal punto di vista complesso*: sarebbe in realtà più esatto chiamarli circuiti ad una dimensione complessa, o rispettivamente, a due dimensioni complesse; ma, non essendovi ambiguità, abbiamo preferito la denominazione più concisa dianzi introdotta. Ad essi corrispondono, sulla riemanniana di L, varietà topologiche a due, e rispettivamente a quattro dimensioni reali.

Supponiamo ora che la F sia una superficie reale, suscettibile di tendere ad un sistema L di piani reali. In tal caso possiamo anche prendere in considerazione la totalità dei punti *reali* di L che appartengono ad un suo circuito unidimensionale: la diremo *circuito unidimensionale reale* o circuito ad una dimensione reale. Ad ogni circuito

unidimensionale reale corrisponde sulla riemanniana di L una varietà ad una dimensione reale, limite di un ciclo unidimensionale tracciato sulla riemanniana di F.

Si viene in tal modo a dimostrare l'esistenza, sulla riemanniana di L, di $p_g - p_a$ cicli unidimensionali, limiti di altrettanti cicli unidimensionali indipendenti tracciati sopra la riemanniana di F. Non deve essere difficile, per questa via, provare l'esistenza, sopra le suddette riemanniane, di altri $p_g - p_a$ cicli unidimensionali, associati in qualche modo ai precedenti (anzi eventualmente coincidenti con questi), ed arrivare, sempre nell'ipotesi che la L sia costituita di piani reali, a ridimostrare che il numero dei cicli unidimensionali della riemanniana della F eguaglia il doppio della sua irregolarità. In modo analogo si posson considerare *cicli bidimensionali reali.*

4. - Ho inoltre, nel corso della dimostrazione di cui al n. 2, trovato pel genere aritmetico di L la seguente formula, assai più espressiva di quella che avevo dato nella Memoria citata in [1]:

$$p_a = n - \gamma + \tau - 1 ,$$

dove n è l'ordine, γ il numero delle rette di connessione, τ il numero dei punti di connessione tripla di L. Di qui si deduce, detto c_1 il numero dei circuiti unidimensionali e c_2 quello dei circuiti bidimensionali di L, la relazione

$$n - \gamma + \tau = c_2 - c_1 + 1 .$$

Questa formula è, in un certo senso, analoga a quella di EULERO-POINCARÉ. Infatti c_2 e c_1 dànno un certo tipo di connessione superficiale e lineare.

5. - Ho successivamente cercato di dedurre dai risultati sopra esposti un significato topologico pel genere geometrico delle super-

---

[1] *The geometric genus of a surface as a topological invariant.* « Journal of the London Mathematical Society », 8 (1933), pagg. 312-319.

ficie. HODGE (1) ha dimostrato che se M è la riemanniana della superficie F, se $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varrho+\varrho^0}$ è una base dei cicli bidimensionali della M, e se è $a_{ij} = [\Gamma_i, \Gamma_j]$, il numero dei termini positivi nella segnatura (1) della matrice simmetrica $|a_{ij}|$ è uguale a $2p_g + 1$. In una ulteriore precisazione di questo risultato, lo stesso HODGE (2) ha provato che, se $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\varrho$ è una base pei cicli algebrici della M, e se è $b_{ij} = [\Gamma_i, \Gamma_j]$ $(i, j = 1, \ldots \rho)$, il numero dei termini positivi nella segnatura della matrice $|b_{ij}|$ è uguale ad 1; e che quindi, se $\Gamma_{\varrho+1}, \ldots, \Gamma_{\varrho+\varrho^0}$ è una base dei cicli bidimensionali trascendenti di M, ciascuno dei quali abbia intersezione nulla con ciascun ciclo algebrico, e se si ha $c_{ij} = [\Gamma_{\varrho+i}, \Gamma_{\varrho+j}]$, il numero dei termini positivi nella segnatura della matrice $|c_{ij}|$ è $2p_g$.

Viene osservato dallo stesso HODGE che può costruirsi una base, $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots, \Gamma_{\varrho+\varrho^0}$, dei cicli bidimensionali di M, per cui Γ_1 è un ciclo algebrico soddisfacente alle relazioni $[\Gamma_1, \Gamma_1] > 0, [\Gamma_1, \Gamma_j] = 0\,(i = 2, \ldots, \rho + \rho_0)$. Dai risultati di HODGE discende allora subito che il numero dei termini positivi della segnatura della matrice delle intersezioni dei cicli $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varrho+\varrho^0}$, vale $2p_g$.

Esaminiamo a tal punto se è possibile passare, nella totalità dei cicli dipendenti da $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varrho+\varrho}$, ad una nuova base $\Gamma_2^*, \ldots, \Gamma^*_{\varrho+\varrho^0}$, per cui è $[\Gamma^*_i, \Gamma^*_i] = 0$, $(i = 2, \ldots, \rho + \rho_0)$, ed inoltre si posson dividere i cicli $\Gamma^*_2, \ldots, \Gamma^*_{\varrho+\varrho^0}$ in un certo numero k di gruppi, in modo che cicli appartenenti a gruppi diversi si intersechino in zero punti. In altri termini, si vuole che la matrice delle intersezioni dei Γ_i^* $(i = 2, \ldots, \rho + \rho_0)$ abbia la forma

$$\begin{vmatrix} H_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H_2 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & H_k \end{vmatrix}$$

(1) Ricordiamo che, se $|a_{ij}|$ è una matrice simmetrica ad elementi reali, e si riduce la forma quadratica $\Sigma\, a_{ij} x_i x_j$, mediante sostituzioni lineari a coefficienti reali sulle variabili $x_1, x_2, \ldots$, ad un'espressione del tipo $\Sigma\, c_i y_i^2$, il numero dei termini positivi, o negativi che compaiono tra i c_i, non dipende dalle sostituzioni eseguite. Dicesi *segnatura* la successione dei c_i, considerata a meno dell'ordine.

(2) *Note on the theory of the base for curves on an algebraic surface.* « Journal of the London Mathematical Society », 12 (1937), pagg. 58-63.

ove $H_1, H_2, \ldots, H_k$ sono a lor volta matrici aventi gli elementi della diagonale principale tutti nulli. Dai risultati di Hodge ho dedotto che, se si può trovare una simile base, è necessariamente $k \leq 2p_g$.

Resta allora da vedere se per ogni superficie algebrica si può trovare una base per cui il massimo valore, $2p_g$, di k è raggiunto. Ho preso a tal uopo in esame la connessione bidimensionale della riemanniana di un sistema di piani L, limite della F (riemanniana che chiamerò ancora, per semplicità, L). Ho ritrovato anzitutto la nota diseguaglianza $\rho_0 \geq 2p_g$. Poi ho mostrato che la base dei cicli bidimensionali di L può esser costituita da una sezione piana di L e da cicli ciascuno dei quali appartiene ad un solo circuito di piani di L, ed incontra in zero punti la sezione piana di L. In tal modo mi sono ridotto a dimostrare che tale base può scegliersi inoltre in modo che i cicli di essa appartenenti ad un dato circuito di piani intersechino ciascuno sè stesso in zero punti, e si possano dividere in due gruppi, tali che ciascun ciclo di un gruppo incontri ciascun ciclo dell'altro gruppo in zero punti. Sino ad ora non ho condotto completamente a termine la dimostrazione di questo fatto, ma ne ho raggiunto i punti principali. Per la base che si è venuta in tal modo a costruire si ha $k = 2p_g$. Se ne dedurrebbe inoltre $\rho + \rho_0 \geq 4p_g + 1$.

Allo scopo di mettere in luce il valore di questa interpretazione topologica del genere geometrico, faccio notare che i k gruppi in cui si distribuiscono i cicli Γ_i^* $(i = 2, \ldots, \rho + \rho_0)$ si comportano in modo analogo alle retrosezioni sulla riemanniana di una curva algebrica. Infatti in ambedue i casi ogni ciclo incontra sè stesso in zero punti; non è possibile suddividere un gruppo in due sottogruppi che godano della stessa proprietà.