ACTA
Vol. VII - N. 8
pag. 33-38

APPLICAZIONE DELLA TEORIA DELLE MATRICI DI VEBLEN E DI POINCARÉ ALLO STUDIO DELLE SUPERFICIE SPEZZATE IN SISTEMI DI PIANI (*)

GUIDO ZAPPA

SVMMARIVM. — Auctor demonstrat doctrinam de matricibus a VEBLEN et POINCARÉ propositam, ad inspiciendam structuram superficierum fractarum in planorum systemata valere posse; ex quo horum topologicae notae quaedam conficiuntur.

In alcuni lavori precedenti (1) ho mostrato come il metodo dello spezzamento delle superficie algebriche in sistemi di piani conduca a notevoli risultati nello studio della struttura topologica delle superficie algebriche. Infatti, lo spezzamento in sistemi di piani riduce le superficie algebriche a combinazioni di enti della stessa semplice struttura topologica (i piani) tra loro opportunamente connessi; si viene così a seguire un procedimento analogo a quello della reticolazione d'una varietà. Una varietà reticolata viene considerata come insieme di celle di varie dimensioni, tra cui passano talune relazioni di incidenza; analogamente, una superficie spezzata in un sistema di piani vien considerata come insieme dei piani medesimi, delle rette di connessione,

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 21 novembre 1943.

(1) *Sulla degenerazione delle superficie algebriche in sistemi di piani distinti, con applicazioni allo studio delle rigate*, « Memorie della Reale Accademia d'Italia », vol. XIII, pagg. 989-1023; *Su alcuni contributi alla conoscenza della struttura topologica delle superficie algebriche, dati dal metodo dello spezzamento in sistemi di piani*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. VII, pagg. 4-8.

Circa l'idea del metodo, dovuto a SEVERI, cfr. la questione n. 15 della rubrica *Problemi, risultati e discussioni* nei « Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni », serie V, vol. I, pag. 102.

e dei punti di connessione tripla ([1]), tra cui si stabiliscono relazioni di incidenza, considerandosi incidenti un piano e una retta, oppure una retta ed un punto, se si appartengono. Nel caso delle superficie spezzate in sistemi di piani si hanno, rispetto al caso della reticolazione della riemanniana di una superficie algebrica, due vantaggi: da un lato, si resta più aderenti al modello algebrico, e dall'altro, si ha a che fare solo con tre categorie di enti (punti, rette, piani) anzichè con cinque (celle a quattro, tre, due, una, zero dimensioni). Per procedere però ad uno studio della struttura dei sistemi di piani è necessario impiantare un algoritmo, sul tipo di quello della matrici di VEBLEN e di POINCARÉ per i complessi topologici, cosa che a prima vista appare tutt'altro che facile.

Nella presente Nota mostro come si possa, sotto ipotesi generali, assimilare un sistema di piani ad un complesso topologico bidimensionale, e in tal modo applicare senz'altro ai sistemi di piani la teoria delle matrici di VEBLEN e di POINCARÉ: basta riguardare i punti di connessione come celle unidimensionali, i piani del sistema come celle zerodimensionali. Indi, sulla base di risultati da me precedentemente raggiunti ([2]) dimostro che, se **A** è il complesso bimensionale assimilato al sistema di piani L, il genere geometrico e l'irregolarità di L eguagliano rispettivamente la connessione bidimensionale e unidimensionale di **A**. Ne deduco la formula, già da me enunciata altrove ([3]).

$$\tau - \gamma + n = p_a + 1$$

in cui τ, γ, n sono rispettivamente il numero dei punti di connessione tripla, delle rette di connessione e dei piani di L, mentre p_a è il suo genere aritmetico. Tale formula vien dedotta da quella di EULERO-POINCARÉ applicata a **A**; in tal modo son venuto a determinare con precisione il legame tra le due formule, che avevo già intravisto pur senza rendermene pienamente ragione.

1. - Sia L un sistema di piani distinti, limite di una superficie algebrica irriducibile F. È presumibile che, data F, si possa ottenere L

([1]) Cfr. la seconda Nota citata in ([1]), pag. 5.
([2]) Cfr. la seconda Nota citata in ([1]), pagg. 5 e 6.
([3]) Nella seconda Nota citata ([1]), pag. 7.

in modo che per nessuna retta dello spazio ambiente passino più di due piani di L. Supponiamo, ad ogni modo, che L goda di questa proprietà. Sappiamo che le rette intersezioni di piani di L si dividono in due categorie: quelle della prima categoria sono limite della linea doppia di L, mentre quelle della seconda categoria compaiono ex-novo al limite, e servono a stabilire la connessione tra i piani di L. Fissiamo l'attenzione su queste ultime, che chiameremo, come al solito, *rette di connessione* o *rette c*.

Consideriamo i punti in cui convergono due o più rette di connessione, e pei quali, di conseguenza, passano almeno tre piani di L. Diremo che più piani $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{r_1}$ passanti per un tal punto, formano un ciclo, quando due piani consecutivi $\alpha_i, \alpha_{i+1} (i = 1, \dots, r-1)$, e parimenti α_r ed α_1 sono connessi da una retta c e mentre due piani non consecutivi non lo sono.

Ritengo che, data F, si possa scegliere L in modo che i piani per un punto o costituiscano un unico ciclo, oppure non dian luogo a cicli di sorta. Supponiamo, ad ogni modo, che ciò si verifichi. Ciò avviene, evidentemente, nell'ipotesi che mai più di tre piani L passino per un punto dello spazio ambiente, ed avviene del pari quando F è rigata, perchè in tal caso mai i piani di L per un punto possono dar luogo a cicli [1].

Fissiamo l'attenzione sui punti in cui convergono tre o più piani di L costituenti un ciclo. Essi, nel caso che i piani ivi convergenti sian tre, sono stati da noi chiamati *punti di connessione tripla* o *punti* Θ. Conserveremo la denominazione anche nel caso che i piani passanti per un tal punto sian più di tre.

Il sistema L verrà considerato come costituito dai suoi piani, dalle rette c e dai suoi punti Θ. Le rette c servono per connettere due piani, i punti Θ per connettere tre o più piani.

2. – Chiamiamo celle a zero dimensioni i piani di L, celle unidimensionali le rette c di L, celle bidimensionali i punti Θ di L; e

(1) Cfr. la prima delle Memorie citate in (1) e la mia nota: *Caratterizzazione delle curve di diramazione delle rigate e spezzamento di queste in sistemi di piani*, «Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova», vol. XIII.

diciamo che una cella bidimensionale ed una cella unidimensionale (o analogamente, che una cella unidimensionale e una cella a zero dimensioni) sono incidenti, quando essi costituiscono un punto Θ e una retta c (o, analogamente, una retta c e un piano di L) appartenentisi.

Si ricordi che, per ipotesi per ogni retta c di L passano due e due soli piani di L; di conseguenza la totalità delle rette c e dei piani di L si può assimilare ad un insieme di celle a una e a zero dimensioni, Δ, tale che ogni cella a una dimensione è incidente a due e due sole celle a zero dimensioni. L'insieme Δ è pertanto un complesso unidimensionale (1).

Consideriamo le rette c passanti per un punto Θ, P, di L; esse, per ipotesi, possono disporsi in una successione ciclica, in modo che rette consecutive siano congiunte da un piano di L, rette non consecutive non lo siano. Esse dan luogo in Δ ad un insieme di Γ di celle unidimensionali, disposte in una successione ciclica, in modo che celle consecutive seno incidenti ad una medesima cella a zero dimensioni, celle non consecutive non lo siano. L'insieme Γ è pertanto un ciclo unidimensionale di Δ.

La totalità dei punti Θ, delle rette c e dei piani di L si può pertanto assimilare ed un insieme Λ di celle a zero, una, due dimensioni, costituito da un complesso Δ unidimensionale, e da un certo numero di celle bidimensionali ciascuna delle quali è incidente a un certo numero di celle unidimensionali di Λ costituenti un ciclo. L'insieme Λ è quindi un complesso bidimensionale, eventualmente impuro.

Al complesso Λ può applicarsi in pieno la teoria delle matrici di Veblen e di Poincaré. Lo scopo propostoci è quindi raggiunto.

3. – Nella seconda Nota citata in (2) ho enunciato diversi risultati sulle proprietà topologiche dei sistemi di piani, che verranno pienamente dimostrati in una prossima Memoria. In questa si farà uso sistematico delle matrici di Veblen e di Poincaré. Vogliamo però mostrare sin da ora come alcuni caratteri topologici di L si rispecchiano

(1) Qui e nel seguito, intendiamo riferirci alla definizione astratta di complesso, ciclo, ecc., come insiemi di elementi, detti celle, soddisfacenti a certe relazioni d'incidenza, e prescindiamo quindi dalla natura degli elementi stessi.

(2) Nella seconda Nota citata in (1).

in caratteri topologici del complesso bidimensionale Λ a cui esso è stato assimilato, cosicchè si possa comprendere come il metodo qui indicato conduca effettivamente alla conoscenza della struttura topologica di L.

Poniamoci nell'ipotesi semplificatrice che per nessun punto passino più di tre piani di L. Ho definito [1] come *circuito bidimensionale* di un sistema di piani L, un gruppo Γ di piani di L su cui sia dato un gruppo Δ di rette di connessione, con le seguenti proprietà: 1) Ogni piano di Γ è connesso da rette di Δ ad almeno altri tre piani di Γ; 2) I piani di Γ connessi con un dato piano α di Γ mediante rette di Δ si posson disporre in una sucessione ciclica, di modo che due piani consecutivi di detta successione risultino connessi tra loro da una retta di Δ.

Ora, è facile vedere che ad ogni circuito bidimensionale Γ di L corrisponde in Λ un complesso bidimensionale chiuso. Sia infatti P un punto Θ di Γ, sia d una retta di connessione di Γ uscende da P, e siano π_1 e π_2 i due piani di L che si connettono tra loro mediante d. In base alla proprietà 1) deve esistere in Γ almeno un piano di L connesso con π_1 e non passante per P; e in base alla proprietà 2) uno di di tali piani, π_3, deve essere connesso anche con π_2. Ma allora il punto comune a π_1, π_2, π_3 è un ulterioto punto Θ appartenente a d. Allo stesso modo si prova che, se d possedesse un terzo punto Θ, ne possederebbe anche un quarto, e così via. In conclusione, ogni retta di connessione di Γ contiene un numero pari di punti Θ, e pertanto a Γ corrisponde in Λ un complesso, in cui ogni cella unidimensionale è incidente ad un numero pari di celle bidimensionali, cioè un complesso chiuso. Non si ottengono in tal modo tutti i complessi chiusi di Λ, ma si ottengono però tutti i cicli, perchè, come si vede facilmente, un ciclo di Δ dà luogo ad un circuito bidimensionale di L. Nella seconda Nota citata in [1] ho enunciato un teorema in base al quale, definiti in modo opportuno circuiti bidimensionali indipendenti di L, il numero di questi eguaglia il genere geometrico di L. Orbene la definizione di indipendenza cui mi riferivo dà luogo in Λ all'ordinaria definizione di indipendenza di complessi chiusi, in particolare di cicli,

[1] Nella seconda Nota citata in [1].

di Λ. Ne discende che *il genere geometrico di* L *eguaglia il rango di connessione superficiale di* Λ.

Ho inoltre definito come *circuito unidimensionale* di un sistema di piani L un gruppo Δ di rette di connessione, le quali si possono disporre in una successione ciclica, in modo che rette consecutive appartengono ad uno stesso piano di L (1). Si vede subito che ai circuiti unidimensionali di L corrispondono in Λ particolari complessi unidimensianali chiusi, tra cui tutti i cicli. Ragionando come sopra, dalla proprietà (da me enunciata nella seconda Nota citata in (1)), in base alla quale il numero dei circuiti unidimensionali indipendenti di L eguaglia la sua irregolarità, si deduce che l'*irregolarità di* L *eguaglia il rango di connessione lineare di* Λ.

Se indichiamo con p_g, p_a, q, n, γ, τ rispettivamente il genere geometrico, il genere aritmetico, l'irregolarità, il numero dei piani, delle rette c e dei punti Θ di L, la formula di Eulero-Poincaré applicata a Λ porge:

$$\tau - \gamma + n = p_g - q + 1 = p_a + 1.$$

Si ritrova così una formula, già da me enunciata nella seconda Nota citata in (1), la quale fornisce il genere aritmetico di L, e se ne vede l'intimo legame con la formula di Eulero-Poincaré.

---

(1) Tale definizione è, nella forma, leggermente diversa da quella data nella seconda Nota citata in (1), ma nella sostanza, come si vede subito, identica ad essa.