ACTA
Vol. VIII - N. 17
pag. 141-148

ALCUNE OSSERVAZIONI SU UN PARTICOLARE TIPO DI OSCILLAZIONE ARMONICA PERMANENTE (*)

(Con una figura)

ANTONIO BENINI

SVMMARIVM. — Auctor, perpendens motum harmonicum, qui extinctioni sit obnoxius, quique stabiliter foveatur actione excitanti sinusoidali, cuius amplitudo mutet pro frequentiae quadrato, novas invenit expressiones quibus parametri motus ex nonnullarum magnitudinum mensura deduci possint.

Si consideri la nota equazione differenziale non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti e positivi

$$a\,\frac{d^2y}{dt^2} + b\,\frac{dy}{dt} + cy = k\,\omega^2 \sin \omega t\,;$$

indicando con t la variabile tempo e purchè sia dimensionalmente $[k]=[ay]$ essa interpreta nel campo fisico una oscillazione (della grandezza y) armonica, dissipativa, forzata per effetto di una azione eccitatrice sinusoidale avente pulsazione ω ed ampiezza variabile con ω^2; la corrispondente equazione in termini finiti è

$$y = y_s + y_p = \vartheta e^{-\mu t} \sin(\omega_n t + \psi) + \frac{\omega^2\,\omega_0{}^2}{[(\omega^2-\omega_0{}^2)^2 + 4\,\mu^2\,\omega^2]^{1/2}}\,\frac{k}{c}\,\sin(\omega t - \varphi)\,,$$

nella quale si è posto:

$$\mu = \frac{b}{2\,a}\,,\quad \omega_0{}^2 = \frac{c}{a}\,,\quad \omega^2{}_n = \omega_0{}^2 - \mu^2 > 0\,,\quad \varphi = \operatorname{arctang}\frac{2\,\mu\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}\,.$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gaetano Arturo Crocco il 15 dicembre 1944.

Per l'intervento delle azioni dissipative, la componente smorzata y_s dopo un conveniente tempo Δt finito non supera in valore assoluto un valore $|\delta|$ prestabilito comunque piccolo; ritenendo pertanto, in vista di quanto si vuole osservare, $y_s = 0$, posto ancora

$$[1] \qquad \alpha = \frac{\mu}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

e $\quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}, \ \lambda = 2(1 - 2\alpha^2), \quad$ resta la componente

$$y_p = \frac{\beta^2}{(1 + \beta^4 - \lambda\beta^2)^{1/2}} \frac{k}{a} \sin(\omega t - \varphi)$$

che rappresenta l'oscillazione armonica permanente di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e di ampiezza

$$[2] \qquad Y = \frac{\beta^2}{(1 + \beta^4 - \lambda\beta^2)^{1/2}} \frac{k}{a}.$$

La potenza dissipata media in un periodo, data da

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T b \left(\frac{dy_p}{dt}\right)^2 dt = \frac{1}{2} bY^2\omega^2,$$

può esprimersi nella forma

$$[3] \qquad W = \frac{\alpha\beta^6}{1 + \beta^4 - \lambda\beta^2} \frac{k^2 \omega_0^3}{a}.$$

Le Y, W per ogni definito sistema fisico oscillante, cui competa il parametro caratteristico α secondo la [1], risultano funzioni della sola β variabile a nostra disposizione entro il campo reale e positivo; le $Y(\alpha, \beta)$ e $W(\alpha, \beta)$ vengono perciò solitamente analizzate secondo tale criterio e rappresentate graficamente con una famiglia di curve (curve di risonanza) ciascuna affetta da un particolare α.

Per $\beta = 1$ (risonanza) è

$$[4] \qquad Y = Y_0 = \frac{1}{2\alpha} \frac{k}{a} = \frac{k\omega_0}{b}$$

$$[5] \qquad W = W_0 = \frac{1}{4\alpha} \frac{k^2 \omega_0^3}{a} = \frac{k^2 \omega_0^4}{2b}.$$

Si ottiene $\frac{dY}{d\beta} = 2\alpha Y_0 \frac{\beta(2-\lambda\beta^2)}{(1+\beta^4-\lambda\beta^2)^{3/2}}$; si consideri quindi la retta tangente alla curva $Y(\beta)$ nel punto P_0 ($\beta = 1$, $Y = Y_0$), la cui equazione $\frac{Y - Y_0}{\beta - 1} = \left[\frac{dY}{d\beta}\right]_{\beta=1}$ diviene $Y = \beta Y_0$: si osserva perciò che tale retta passa sempre per l'origine indipendentemente da α; ciò può consentire di determinare assai rapidamente il punto P_0 sulla curva (condizione di risonanza) per qualunque valore di α.

Dalla $\frac{dY}{d\beta} = 0$, per α e β finiti e non nulli, segue come è noto, che la Y ammette un massimo relativo in corrispondenza di $\beta = \beta_c = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{1/2}$, reale solo se $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ed assume il valore

$$Y_c = Y_{max} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha^2)^{1/2}} \frac{k}{a}.$$

Analogamente la $\frac{dW}{d\beta} = 8\alpha^2 W_0 \frac{\beta^5(\beta^4 - 2\lambda\beta^2 + 3)}{(1+\beta^4-\lambda\beta^2)^2}$ eguagliata a zero fornisce in β_1, $\beta_2 = [\lambda \pm (\lambda^2 - 3)^{1/2}]^{1/2}$, uniche radici positive della $\beta^4 - 2\lambda\beta^2 + 3 = 0$, i valori per cui si verificano rispettivamente un minimo ed un massimo relativi di W; tali radici sono reali e distinte per $\alpha < \alpha^* = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ed inoltre è $\beta_1^2\beta_2^2 = 3$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 2\lambda$.

A β_1 e β_2 corrispondono

$$Y_1,\ Y_2 = \frac{\lambda \pm (\lambda^2-3)^{1/2}}{[(\lambda^2-2) \pm \lambda(\lambda^2-3)^{1/2}]^{1/2}} \frac{k}{a}$$

$$W_1,\ W_2 = W_{min},\ W_{max} = \frac{\alpha[\lambda(4\lambda^2-9) \pm (4\lambda^2-3)(\lambda^2-3)^{1/2}]}{(\lambda^2-2) \pm \lambda(\lambda^2-3)^{1/2}} \frac{k^2\omega_0^3}{a}.$$

Pertanto si nota con successive rapide trasformazioni che valgono le seguenti:

$$[6] \qquad Y_1 Y_2 = \frac{3\alpha}{(1-\alpha^2)^{1/2}} Y_0^2 = \frac{3}{2} Y_c \frac{k}{a} = 3\alpha Y_c Y_0$$

$$[7] \qquad W_1 W_2 = \frac{27\alpha^2}{1-\alpha^2} W_0^2 = \frac{27}{16(1-\alpha^2)} \frac{k^4\omega_0^6}{a^2}.$$

Le relazioni stabilite si prestano egregiamente nella soluzione del notevole problema, inverso, di determinare il valore dei coefficienti della equazione differenziale ($a\,b\,c$ ovvero $a\ \alpha\ \omega_0$, a causa del loro significato fisico) partendo da alcuni valori delle grandezze Y o W; naturalmente tre qualsiasi relazioni indipendenti del tipo [2] o [3] sono sufficienti, ma è noto come spesso un aspetto anche solo formalmente più semplice delle espressioni rispecchia per motivi diversi una maggiore esattezza conseguibile.

Si deduce infatti dalle [6]

$$a = \frac{3}{2}\, k\, \frac{Y_c}{Y_1 Y_2} \tag{8}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\, \frac{Y_1 Y_2}{Y_c Y_0} \tag{9}$$

$$\alpha = \frac{1}{\left[1 + 9\left(\dfrac{Y_0^2}{Y_1 Y_2}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{10}$$

e dalle [7]

$$\alpha = \frac{1}{\left[1 + 27\, \dfrac{W_0^2}{W_1 W_2}\right]^{1/2}} \tag{11}$$

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4}\, \frac{k^2 \omega_0^3}{(1-\alpha^2)^{1/2}}\, \frac{1}{(W_1 W_2)^{1/2}} \tag{12}$$

Senza qui ripetere le note determinazioni di ω_0, ricordiamo che almeno le più dirette di esse in genere sono poco esatte per valori elevati di α: l'osservazione dianzi esposta sulla tangente in P_0 si riferisce appunto a questo lato del problema. Per quanto riguarda gli altri parametri incogniti è altresì noto il cosidetto metodo della risonanza basato sulle [4] e [5]: esso però non è sufficiente mediante misure di una sola grandezza, ed è perciò allora necessario ricorrere ad altre espressioni dedotte con criteri diversi, le quali presentano per lo più alcuni inconvenienti dovuti alla mutua di pendenza dei parametri deducibili ed alla sensibilità delle relazioni stesse agli inevitabili errori di misura.

Le formule [8] a [12] (per questa si dirà in appresso) insieme con le semplificate seguenti, costituiscono un complesso, che potrebbe dirsi della minima potenza dissipata, in cui i parametri a e α sono espressi fra loro in modo indipendente e in cui figurano, come rapporti, grandezze facilmente misurabili; inoltre possono bastare determinazioni di un solo tipo di grandezza (Y o W) ed infine le α risultano indipendenti anche dal coefficiente k che può più agevolmente passare fra le incognite determinabili. Per contro invero dette formule esatte sono legate alla conoscenza dei valori β_1, β_2 calcolabili solo se noto α ovvero valutabili in base alla condizione di minimo o massimo di W; esse sono quindi applicabili solo se $\alpha \leqslant \alpha^*$.

Queste limitazioni vengono in gran parte eliminate attraverso alcune ulteriori semplificazioni approssimative, giustificate dal fatto che il problema tecnico inverso di cui si tratta è di natura essenzialmente applicativo. Nel dominio della Elasticità e della Elettrotecnica per esempio sono frequentissimi, ed in linea di massima i più interessanti, i sistemi oscillanti aventi il parametro α (numero di smorzamento o grado di attenuazione) molto piccolo ($\alpha \ll \alpha^*$), ma la cui influenza non è trascurabile in prossimità della risonanza; a titolo di orientamento per quanto segue si indica in $0{,}01 \div 0{,}1$ l'ordine di grandezza di α in tali casi.

Poichè $\lim\limits_{\alpha\to 0} Y_1 = \frac{3}{2}\frac{k}{a}$, indicando con $\overline{\overline{Y}} = [Y_1]_{\alpha=0} = \frac{3}{2(1+3\alpha^2)^{1/2}}\frac{k}{a}$ il valore di Y corrispondente a $\bar{\beta} = [\beta_1]_{\alpha=0} = \sqrt{3}$ si ottiene

$$\bar{a} = \frac{3}{2}\frac{k}{\overline{\overline{Y}}} \tag{13}$$

la quale, in un conveniente intorno di $\alpha = 0$, approssima assai bene la [8] assumendo $a = \bar{a}$ entro tutto l'intorno; l'errore relativo $\varepsilon = \frac{\bar{a}}{a} - 1$ risulta positivo

$$\varepsilon = \sqrt{1+3\alpha^2} - 1 \tag{14}$$

e per α piccolo $\varepsilon \cong \frac{3}{2}\alpha^2$; tale $\varepsilon(\alpha)$ può stabilire l'ampiezza dell'intorno di α in base ad un prefissato errore massimo ammissibile (v. grafico). Alla [13] si giunge in via intuitiva, analiticamente meno diretta

anche dalla [8]: quando ($\alpha \cong 0$) possa ritenersi $Y_c \cong Y_2$ essa diviene $\alpha' = \frac{3}{2}\frac{k}{Y_1}$ il cui errore, negativo, è però in valore assoluto maggiore di quello espresso dalla [14]; la lenta variabilità di Y_1 rispetto ad α intorno ad $\alpha = 0$, verificandosi $\left[\frac{d\,Y_1}{d\,\alpha}\right]_{\alpha=0} = 0$, suggerisce poi di sostituire $\overline{\overline{Y}}$ ad Y_1, ottenendosi con ciò altresì un compenso negli errori.

La [13] peraltro supera le posizioni di partenza essendo formalmente e concettualmente non legata ad α^* e β_1: solo per valori notevoli di α essa dà errori in genere inaccettabili, ma potrebbe venire corretta mediante la [14], eventualmente con rapide iterazioni se α è incognito, e ciò può riuscire in effetti utile figurando in essa soltanto $\overline{\overline{Y}}$; anche di maggiore interesse è il fatto che non occorrono misure di W per la conoscenza del β_1.

Per approssimare la [9], osservando che $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\overline{\overline{Y}}}{Y_c} = \lim\limits_{\alpha \to 0} 3\alpha$, si ponga

[15] $$\overline{\alpha}' = \frac{1}{3}\frac{\overline{\overline{Y}}}{Y_{max}}$$

il cui errore relativo è

$$\varepsilon = -\left(1 - \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1+3\alpha^2}}\right),$$

e per α sufficientemente piccolo $\varepsilon \cong -2\alpha^2$; l'altra espressione deducibile $\overline{\alpha}'' = \frac{1}{3}\frac{\overline{\overline{Y}}}{Y_0}$ presenta un errore alquanto inferiore

$$\varepsilon = -\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+3\alpha^2}}\right) \cong -\frac{3}{2}\alpha^2$$

ma in genere la [15] è di applicazione più agevole contenendo il valore massimo di Y, e comunque il valore di $\overline{\alpha}''$ non si differenzia sensibilmente da $\overline{\alpha}'$ intorno ad $\alpha = 0$. Con criteri ed osservazioni analoghe a quanto già esposto, dalla [9] segue anche $\alpha' = \frac{1}{3}\frac{Y_1}{Y_c}$ e $\alpha'' = \frac{1}{3}\frac{Y_1}{Y_0}$ entrambe più approssimate, in eccesso, ma dipendenti da β_1.

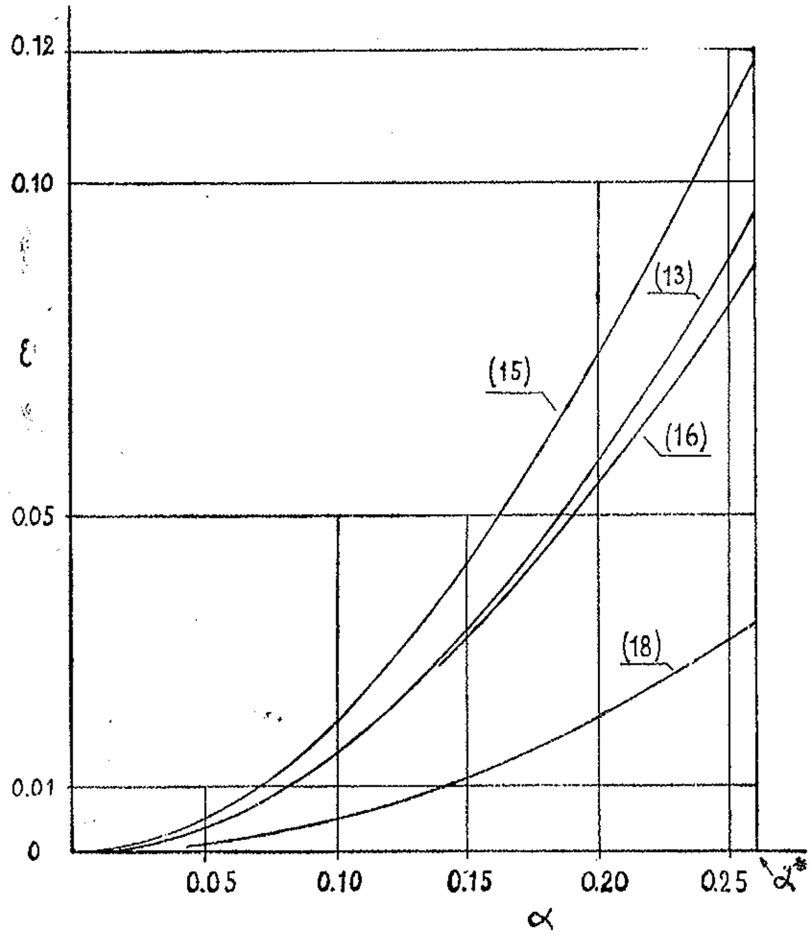

Fig. 1.

La formula [10], che potrebbe acquistare interesse in quanto non vi appare Y_c, non conduce a espressioni semplificate nuove od utili.

Indicando con $\overline{W} = [W_{min}]_{\alpha=0} = \frac{27\,\alpha}{4(1+3\alpha^2)} \; \frac{k^2\,\omega_0{}^3}{a}$ il valore di W in corrispondenza di $\bar{\beta} = [\beta_1]_{\alpha=0} = \sqrt{3}$, in base a $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\overline{W}}{W_0} = \lim\limits_{\alpha\to 0} 27\,\alpha^2$, si approssimi la [11] con

[16] $$\bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{27}} \sqrt{\frac{\overline{W}}{W_0}}$$

avente l'errore relativo $\varepsilon = -\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+3\alpha^2}}\right) \cong -\frac{3}{2}\alpha^2$; la [16] è applicabile anche per $\alpha > \alpha^*$, tenuto però conto che l'errore in tal caso non sarebbe trascurabile. Dalla [11] parimenti:

[17] $$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{27}} \sqrt{\frac{W_{min}}{W_{max}}}$$

meno approssimata della [16] ma praticamente coincidente per i più bassi valori di α. Ha ora meno importanza l'indipendenza delle formule da β_1 e β_2, e la lenta variabilità di W rispetto a β intorno a β_1 consente relativamente minor precisione nel realizzare β_1.

Infine la [12], trascurando α^2 rispetto all'unità, si semplifica in

[18] $$a' = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{k^2 \omega_0^3}{\sqrt{W_{min} W_{max}}}$$

che, essendo $\varepsilon = -\left(1 - \sqrt{1-\alpha^2}\right) \cong -\frac{1}{2}\alpha^2$ assai ridotto, può ritenersi praticamente esatta e indipendente da α; la presenza in essa di k ed ω_0, supposti noti o altrimenti determinabili, è compensata dall'utilità di esprimere anche il parametro a direttamente in funzione $W_{\substack{min\\max}}$.

Se $\alpha > \alpha^*$ può impiegarsi l'analoga $\bar{a} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{k^2 \omega_0^3}{\sqrt{W_0 \overline{W}}}$ purchè con la correzione $\varepsilon = \sqrt{1+3\alpha^2} - 1$.

In figura sono dati, sotto forma grafica fino ad $\alpha = \alpha^* = 0{,}2588$, per le formule [13], [15], [16], [18], i valori assoluti delle $\varepsilon(\alpha)$, che ne dimostrano il campo di applicabilità in base alla precisione conseguibile nelle misure.

A conclusione si vuol notare che quando all'oscillazione in esame corrisponda una equazione alquanto diversa da quella assunta (ad es. coefficienti non costanti almeno rispetto ad y o β) ma che possa beninteso con essa approssimarsi nelle consuete ipotesi che si soglion fare al riguardo, le espressioni proposte non soffrono di maggiore convenzionalità di altre e dello stesso metodo di risonanza, rispetto al quale anzi fanno intervenire il comportamento del sistema anche in ulteriori ben precisati rapporti di frequenze sufficientemente discosti dal particolare $\beta = 1$.