ACTA
Vol. VIII - N. 6
pag. 39-48

DETERMINAZIONI DIFFERENZIALI RELATIVE ALLE SUPERFICIE DI VERONESE (*)

E. BOMPIANI

SVMMARIVM. — Auctor, adhibens doctrinam contactus duarum algebricarum varietatum cuiusdam praefiniti typi, extruit superficies Veronesianae, quibus commune sit aut superficiei elementum secundi vel tertii ordinis (quod nequit esse generale elementum ex S_5), aut bina superficiei elementa secundi ordinis.

1. – Il problema del contatto d'ordine superiore al primo fra due superficie in un iperspazio (o di due V_k in S_n, con $k < n$-1) non è del tutto semplice data l'arbitrarietà delle rappresentazioni analitiche di esse (che non sono determinate dall'ente geometrico). Questo inconveniente non si presenta per il contatto del 1° ordine, bastando in questo caso esprimere che coincidono due piani (o due spazi lineari): in esso, anche se non si faccia intervenire esplicitamente, gioca in modo essenziale la identità che si pone fra i fasci (o stelle) di tangenti, dal punto comune e che permette di scegliere, *fino all'intorno del 1° ordine*, gli *stessi* parametri delle due superficie (o varietà).

Il problema si complica ancora se la superficie (o varietà) essendo algebriche devono appartenere ad un medesimo *tipo* (p. es. essere superficie di VERONESE): perchè, scelti su una di esse parametri che facilmente ne assicurano l'appartenenza a quel tipo, si possono bensì scegliere sulla seconda parametri che fino all'intorno d'ordine assegnato del punto in esame coincidano con quelli; ma non avviene in generale che con questi parametri si possano dare alle equazioni parametriche della seconda superficie forma tale che ne assicurino l'appartenenza a quel tipo.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 15-IX-1944.

Esemplifico come si possano superare queste difficoltà nel caso delle F_2^4 di Veronese (e così potrà farsi poi per altre superficie o varietà). E determino: 1) le superficie di VERONESE aventi in comune una calotta di 2° ordine (o intorno del 2° ordine di un punto) e in particolare quelle aventi inoltre in comune tre coniche per il punto; 2) le superficie di VERONESE aventi in comune una calotta del 3° ordine (che non è una calotta generica di S_5 ma deve soddisfare a 6 condizioni; 3) le superficie di Veronese aventi in comune due calotte del 2° ordine.

2. – Data la superficie di Veronese F

$$x_1 = u^2\,,\; x_2 = uv\,,\; x_3 = v^2\,,\; x_4 = uw\,,\; x_5 = vw\,,\; x_6 = w^2 \tag{1}$$

ci proponiamo di considerare le sue calotte del 2° e del 3° ordine, σ_2 e σ_3, aventi per *centro* il punto O ($u = v = 0\,,\; w \neq 0$) e le superficie di Veronese $\overline{F}$ che le posseggono.

Sia $\overline{F}$ una di queste superficie. Con lo stesso riferimento rispetto all'ambiente S_5, siano $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ parametri omogenei su $\overline{F}$ tali che in O sia $\bar{u} = \bar{v} = 0$, $\bar{w} \neq 0$. Se $\overline{F}$ ed F si toccano in O si potrà far sì che le direzioni $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$, $\bar{u} = \bar{v}$ coincidano rispettivamente con le direzioni $u = 0$, $v = 0$, $u = v$ (si rappresenta così l'identità fra i fasci di tangenti sovrapposti); le equazioni di $\overline{F}$ saranno del tipo

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = A_2\,,\; \bar{x}_2 = B_2\,,\; \bar{x}_3 = C_2\,,\; \bar{x}_4 = D_2 + \bar{u}\bar{w}\,, \\ \bar{x}_5 = E_2 + \bar{v}\bar{w}\,,\; \bar{x}_6 = F_2 + F_1\bar{w} + \bar{w}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

essendo $A_2\,, B_2\,, \ldots\,, F_2$ *forme* di 2° grado ed F_1 forma di 1° grado in $\bar{u}\,, \bar{v}$.

Imponiamo ora che F ed $\overline{F}$ abbiano in comune la calotta σ_2.

Poichè su F (e quindi nell'intorno di O per cui $w \neq 0$) è

$$x_1 x_6 = x_4^2\,,\; x_2 x_6 = x_4 x_5\,,\; x_3 x_6 = x_5^2 \tag{3}$$

queste equazioni dovranno essere soddisfatte *a meno di termini del 3° ordine in* $\bar{u}, \bar{v}$ anche dalle coordinate $\bar{x}_2$. Ciò dà

$$A_2 = \bar{u}^2\,,\; B_2 = \bar{u}\bar{v}\,,\; C_2 = \bar{v}^2 \tag{4}$$

quindi le [2] si riscrivono

$$[5] \qquad \begin{aligned} &\bar{x}_1 = \bar{u}^2 , \ \bar{x}_2 = \bar{u}\bar{v} , \ \bar{x}_3 = \bar{v}^2 , \ \bar{x}_4 = D_2 + \bar{u}\bar{v} , \\ &\bar{x}_5 = E_2 + \bar{v}\bar{w} , \ \bar{x}_6 = F_2 + F_1 \bar{w} + \bar{w}^2 \end{aligned}$$

Finora $\bar{w}$ è vincolata alla sola condizione di essere $\neq 0$ in O; $\bar{w} = 0$ può rappresentare su $\bar{F}$ una qualsiasi conica non passante per O.

Disponendo quindi di una sostituzione del tipo $\bar{w} = W + \alpha \bar{u} + \beta \bar{v}$ possiamo determinare α e β in modo che nelle equazioni trasformate delle precedenti vengano a mancare in $\bar{x}_6$ i termini in $\bar{u}^2$ e $\bar{v}^2$.

Ciò fatto, indicate $\bar{u}$ e $\bar{v}$ con U e V, senza stare a cambiare i simboli per le forme in U, V che restano arbitrarie, si hanno le equazioni di $\bar{F}$

$$[6] \qquad \begin{aligned} &\bar{x}_1 = U^2 , \ \bar{x}_2 = UV , \ \bar{x}_3 = V^2 , \ \bar{x}_4 = D_2 + VW , \\ &\bar{x}_5 = E_2 + VW , \ \bar{x}_6 = fUV + F_1 W + W^2 \end{aligned}$$

Poichè il sistema dei parametri U, V, W (omogenei) è ora completamente determinato a partire dalle coniche $u = 0$, $v = 0$, $u = v$, $w = 0$ di F, non sono possibili ulteriori riduzioni nelle equazioni di $\bar{F}$, quindi i 9 coefficienti che vi figurano sono essenziali. Perciò:

Vi sono ∞^9 superficie di Veronese $\bar{F}$ determinate da una calotta del 2° ordine: se questa è quella di F *con centro in* O *si può dare alle equazioni delle $\bar{F}$ la forma* [6].

3. – La dimensione del sistema delle $\bar{F}$ aventi una data calotta σ_2 può trovarsi come segue.

I piani osculatori agli E_2 (elementi di curva del 2° ordine) di σ_2 aventi tangente assegnata stanno in S_3, 2-osculatore secondo quella tangente che s'indica con S (1,2); questi S_3 descrivono il cono quadrico di Del Pezzo (avente per vertice il piano tangente) e il loro sistema è riferito proiettivamente al fascio delle tangenti in O centro di σ_2.

Il passaggio di una $\bar{F}$ per O impone 3 condizioni e la tangenza a σ_2 ne impone altre 6. La coincidenza del cono di Del Pezzo di $\bar{F}$ (in O) con quello di σ_2 impone 5 condizioni e la coincidenza delle proiettività detta altre 3. Si hanno finora 17 condinioni. Ma vi sono

∞^1 calotte con lo stesso cono di Del Pezzo; sicchè infine affinchè $\bar{F}$ possegga σ_2 devono essere soddisfatte 18 condizioni (indipendenti per il loro significato geometrico). E poichè le superficie di Veronese sono ∞^{27} ve ne sono appunto ∞^9 per σ_2 assegnata. Ancora alla stessa dimensione 9 si arriva in altro modo. Affinchè due calotte σ_2 e $\bar{\sigma}_2$ del 2° ordine coincidano, occorre e basta che tre F_2 dell'una coincidano con 3 E_2 dell'altra. Si scelgano ad arbitrio tre E_2 di σ_2 con tangenti distinte: per la coincidenza desiderata bisognerà anzitutto che i tre $S_2 \equiv S(1,2)$ ad esse relativi coincidano per le due calotte e si hanno così, oltre le condizioni di tangenza, $2.3 = 6$ condizioni. Ora il piano di ciascun E_2 dato contiene pure un $\bar{E}_2$ della calotta $\bar{\sigma}_2$; per la coincidenza di E_2 con $\bar{E}_2$ occorre un'altra condizione; quindi complessivamente 3. Si hanno così in tutto $3 + 6 + 6 + 3 = 18$ condizioni.

Occorre avere ben chiaro che il contatto di 2° ordine in O fra F ed $\bar{F}$ (cioè la coincidenza dei loro elementi del 2° ordine E_2) *non* porta di conseguenza che gli E_2 delle coniche di F coincidano con gli $\bar{E}_2$ delle coniche di $\bar{F}$. Ciò si vede subito anche analiticamente; due coniche di F e di $\bar{F}$ con la stessa tangente, $\lambda v = \mu u$ e $\lambda V = \mu U$, hanno piani generalmente diversi: $\lambda x_2 = \mu x_1$, $\lambda^2 x_3 = \mu^2 x$, $\lambda x_5 = \mu x_4$ per la prima e

$$\lambda x_2 = \mu x_1 \ , \quad \lambda^2 x_3 = \mu^2 x_1 \ , \quad \lambda x_5 - \mu x_4 = \\ = \{\lambda E_2(\lambda, \mu) - \mu D_2(\lambda, \mu)\} \frac{x^3}{\mu^2}$$

per la seconda. Queste coincidono in generale per *tre* sole direzioni definite da

$$\lambda (e_{11} \lambda^2 + 2 e_{12} \lambda \mu + e_{22} \mu^2) = \mu (d_{11} \lambda^2 + 2 d_{12} \lambda \mu + d_{22} \mu^2)$$

Fissata una $\bar{F}$ se quelle tre direzioni sono (reali e) distinte si possono assumere come $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = \mu$ così si fissano tre coniche per O su F e in conseguenza

$$e_{11} = 0 \ , \quad d_{22} = 0 \ , \quad 2 e_{12} - d_{11} = 2 d_{12} - e_{22} \ .$$

Posta quest'ultima differenza $= h$, e $d_{11} = d$, $e_{22} = e$ si ha quindi per $\bar{F}$

$$\bar{x}_1 = U^2 \ , \quad \bar{x}_2 = UV \ , \quad \bar{x}_3 = V^2 \ , \quad \bar{x}_4 = U \{dU + (e + h) V + W\} \ , \\ \bar{x}_5 = V \{(d + h) U + e V + W\} \ , \quad \bar{x}_6 = fUV + (f_1 U + f_2 V + W) W \ .$$

Queste sono le equazioni delle ∞^6 $\bar{\mathrm{F}}$ che hanno in comune con F la calotta σ_2 e i piani di tre sue coniche assegnate.

Se questi piani comuni alle coniche di F ed $\bar{\mathrm{F}}$ sono effettivamente tre (reali e distinti) e non iufiniti ($h \neq 0$) possiamo scegliere il punto comune alle due coniche $\mu = 0$ come $(1, 0, 0, 0, 0)$ e quello comune alle due coniche $\lambda = 0$ come $(0, 0, 1, 0, 0)$: ciò importa una scelta definita della conica $w = 0$ su F (quella passante per i due punti detti), e per i coefficienti le condizioni $f_1 = d$, $f_2 = e$.

Con ciò rimane individuata *una* proiettività fra F ed $\bar{\mathrm{F}}$ che conserva la calotta σ_2 di centro O e inoltre i tre punti d'intersezione delle tre coppie di coniche giacenti negli stessi piani. Essa ha le equazioni ($h \neq 1$);

$$\rho \mathrm{U} = u \;,\quad \rho \mathrm{V} = v \;,\quad \rho \mathrm{W} = (h-1)\, w + (1 - h - d)\, u + (1 - h - e)\, v\,;$$

facendo uso di esse le equazioni della $\bar{\mathrm{F}}$ si riscrivono

$$\bar{x}_1 = u^2 \;,\quad \bar{x}_2 = u\,v \;,\quad \bar{x}_3 = v^2 \;,\quad \bar{x}_4 = \{(h-1)\;(w-u) + v\}\;,$$
$$\bar{x}_5 = v\;\{(h-1)\;(w-v) + u\}\;,\quad \bar{x}_6 = (h-1)^2\;(w^2 - u^2 - v^2) +$$
$$+ (h-1)\; d\,u\;\;(u+w) + (h-1)\;\; e\,v\,(v-w) + (h^2 - 2h + 2)\;\; u\,v\;.$$

In conclusione:

Date le due superficie di Veronese F, $\bar{\mathrm{F}}$ aventi in un punto contatto del 2° ordine e tali che non tutti i piani delle loro coniche per il punto coincidano, rimane fra esse determinata una proiettività e le loro equazioni si riducono al tipo ora trovato (con una scelta conveniente dei riferimenti su quelle).

Non staremo ad esaminare casi più particolari (quando non tutti i piani della terna considerata siano distinti). Aggiungeremo invece che se $h = 0$, cioè se coincidono i piani delle coniche per O di F e di $\bar{\mathrm{F}}$ quel riferimento non è più determinato (ve ne sono ∞^3). In questo caso (e supposto che non tutte le coppie di coniche situate negli stessi piani abbiano in O contatto del 3° ordine, eventualità che discuteremo nel numero seguente) vi è *una* coppia di coniche (una su F, l'altra su $\bar{\mathrm{F}}$) aventi in O contatto del 3° ordine; il luogo degli ulteriori punti d'intersezione di coppie di coniche situate negli stessi

piani è una quartica sghemba tangente in O alle due coniche a contatto del 3° ordine (l'E_2 di queste con l'E_2 della quartica in O, appartengono a σ_2 ma hanno piani diversi).

4. – Passiamo ora a determinare la superficie di Veronese $\overline{\overline{F}}$ che hanno in comune con la F la calotta del 3° ordine σ_3 di centro O ($u = v = 0$, $w \neq 0$). Riprendiamo perciò le [6]: esse dovranno soddisfare alle [3] *a meno di termini del 4° ordine* in U, V (essendo in O, $U = V = 0$, $W \neq 0$). Ciò porta di conseguenza $2 D_2 = F_1 U$, $2 E_2 = F_1 V$. Dopo ciò è naturale porre $\overline{W} = W + \frac{1}{2} F_1$.

Le equazioni [6], tenuto conto di queste relazioni (e riscrivendo W invece di $\overline{W}$) divengono:

$$\bar{x}_1 = U^2 \, . \; \bar{x}_2 = U V \, , \; \bar{x}_3 = V^2 \, , \; \bar{x}_4 = U W \, , \; \bar{x}_5 = V W \, , \; \bar{x}_6 = F_2 + W^2$$

ove F_2 è una forma quadratica in U, V.

Queste equazioni rappresentano le ∞^3 $\overline{\overline{F}}$ *che hanno comune con* F *la calotta* σ_3. *Risulta da esse che una qualsiasi* $\overline{\overline{F}}$ *e la* F *hanno in comune due coniche.*

D'altra parte affinchè due calotte σ_3 e $\bar{\sigma}_3$ aventi in comune una σ_2 coincidano è necessasio e basta che 4 elementi generici E_3 (del 3° ordine) dell'una appartengano anche all'altra.

Ciò impone in generale 12 condizioni (3 per ogni E_3, essendo già gli E_2 coincidenti) nel passaggio della calotta σ_2 alla calotta σ_3. Siccome le $\overline{\overline{F}}$ contenenti σ_2 sono ∞^9 e quelle contenenti σ_3 sono ∞^3 risulta che 6 di quelle condizioni *non* sono indipendenti dalle altre. Ciò mette in evidenza che:

Mentre una calotta σ_2 *di una superficie di Veronese è una generica calotta superficiale di* S_5 *(cioè una superficie generica di* S_n , $n \geqslant 0$, *può essere approssimata fino all'intorno di 2° ordine di un suo punto mediante* ∞^9 *superficie di Veronese), una calotta del 3° ordine* σ_3 *di una superficie di Veronese* non *è una generica calotta superficiale di* S_5 *: essa deve soddisfare a* sei *relazioni particolari. Una generica superficie di* S_5 non *è approssimabile fino al 3° ordine con superficie di Veronese; ma se lo è in un modo lo è pure con* ∞^3 *tali superficie.*

Allo stesso risultato sulla dimensione del sistema della $\overline{F}$ con assegnata σ_3 (e quindi sul numero delle condizioni cui questa deve soddisfare per appartenere ad una superficie di Veronese) si giunge pure così.

È evidente che due superficie di Veronese aventi in comune una calotta del 4° ordine σ_4 coincidono (avendo comuni tutte le coniche per O). Vediamo quante condizioni bisogna dare affinchè due superficie di Veronese, aventi già in comune una σ_3 coincidano. Due calotte del 4° ordine coincidono se e solo se 5 elementi E_4 dell'una appartengono anche all'altra. Le due superficie supposte F ed $\overline{F}$ per avere in comune σ_3 hanno già due coniche comuni: basterà imporre che tre coniche dell'una e tre dell'altra (aventi già un contatto del 3° ordine in O) coincidano; e ciò impone tre condizioni che assicurano la coincidenza di F ed $\overline{F}$. Ciò prova che le $\overline{F}$ per σ_3 erano ∞^3 (e quindi l'esistenza di 6 relazioni per una σ_3 di Veronese).

Del resto alle 6 relazioni cui deve soddisfare una σ_3 per appartenere ad una superficie di Veronese può darsi forma esplicita.

Una calotta superficiale σ_3 di S_5 (con spazio osculatore $S[2] \equiv S_5$) può rappresentarsi con le equazioni:

$$x_1 = u^2 + A_3 + [4] \ , \quad x_2 = uv + B_3 + [4] \ , \quad x_3 = v^2 + c_3 + [4]$$

essendo u, v, x_1, x_2, x_3 coordinate proiettive non omogenee in S_5 nulle nel centro della calotta che ha piano tangente $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ed A_3, B_3, C_3 *forme* di 3° grado in u, v.

Se esiste una superficie di Veronese contenente σ_3 su di essa dovranno potersi scegliere tali parametri $\bar{u}$, $\bar{v}$

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + \lambda_{11}\,\bar{u}^2 + 2\,\lambda_{12}\,\bar{u}\,\bar{v} + \lambda_{22}\,\bar{v}^2 + [3] \\ v &= \bar{v} + \mu_{11}\,\bar{u}^2 + 2\,\mu_{12}\,\bar{u}\,\bar{v} + \mu_{22}\,\bar{v}^2 + [3] \end{aligned}$$

che sostituiti nelle precedenti diano alle x_i $(i = 1, 2, 3)$ espressioni della forma

$$x_1 = \bar{u}^2 + [4] \ , \quad x_2 = \bar{u}\,\bar{v} + [4] \ , \quad x_3 = \bar{v}^2 + [4] \ ,$$

ove [4] indica termini d'ordine $\geqslant 4$ in $\bar{u}$ $\bar{v}$. Ciò porta 12 relazioni (che è facile scrivere) fra i dodici coefficienti di A_3 , B_3 , C_3 e le

sei λ_{rs}, μ_{rs} ($r, s = 1, 2$). Eliminando queste ultime si hanno le 6 relazioni cercate fra i coefficienti di A_3, B_3. C_3.

5. – Determiniamo infine le ruperficie di Veronese $\overline{\overline{F}}$ che hanno in comune con una data di esse F due calotte del 2° ordine (a centri distinti). Per la F assumiamo la rappresentazione già adottata: i centri delle due calotte siano sulla conica $w = 0$ i punti O_1 ($u \neq 0$, $v = w = 0$) e O_2 ($v \neq 0$, $u = w = 0$). Una $\overline{\overline{F}}$ che passi per essi ed abbia ivi le stesse calotte del 2° ordine contiene la conica $w = 0$: potranno scegliersi i parametri $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ su $\overline{\overline{F}}$ in modo che la stessa conica sia rappresentata da $\bar{w} = 0$ e inoltre O_1 ($\bar{u} \neq 0$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$, O_2 ($\bar{v} \neq 0$, $\bar{u} = \bar{w} = 0$).

Sicchè le equazioni di $\overline{\overline{F}}$ possono scriversi nella forma

$$\bar{x}_1 = \bar{u}^2 + \bar{w}\, A_1 \;, \quad \bar{x}_2 = \bar{u}\,\bar{v} + \bar{w}\, B_1 \;, \quad \bar{x}_3 = \bar{v}^2 + \bar{w}\, C_1$$
$$\bar{x}_4 = \bar{w}\, D_1 \;, \quad \bar{x}_5 = \bar{w}\, E_1 \;, \quad \bar{x}_6 = \bar{w}\, F_1$$

ove $A_1 \equiv a_1 \bar{u} + a_2\, \bar{v} + a_3\, \bar{w}, \ldots,$ E_1 sono *forme* di 1° grado in $\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}$.

Le condizioni di tangenza in O_1 e O_2 portano subito

$$c_1 = e_1 = f_1 = a_2 = d_2 = f_2 = 0$$

Perchè $\overline{\overline{F}}$ contenga la calotta σ_2 di centro O_1 bisogna che le equazioni

$$x_1\, x_6 = x_4^{\,2} \;, \quad x_1\, x_5 = x_4\, x_2 \;, \quad x_1\, x_3 = x_2^{\,2}$$

siano soddisfatte dalle $\bar{x}_i$ *a meno di termini del 3° ordine* in $\bar{v}$, $\bar{w}$ ($\bar{u} \neq 0$ in O_1). Ciò porta (posto $f_3 = f$)

$$f = d_1^{\,2} \;, \quad e_2 = d_1 \;, \quad e_3 = b_1\, d_1 \;, \quad c_2 = 2\, b_1 \;, \quad c_3 = b_1^{\,2} \;;$$

analogamente per la calotta di centro O_2 si trova

$$f = e_2^{\,2} \;, \quad d_1 = e_2 \;, \quad d_3 = b_2\, e_3 \;, \quad a_1 = 2\, b_2 \;, \quad a_3 = b_2^{\,2}$$

Posto ora $U = \bar{u} + b_2 \overline{w}$, $V = \bar{v} + b_1 \overline{w}$, $W = d_1 w$ (ciò che non altera le posizioni fatte per O_1, O_2) si ha per la $\overline{\overline{F}}$

$$\bar{x}_1 = U^2 , \quad \bar{x}_2 = U V + \beta W^2 , \quad \bar{x}_3 = V^2 ,$$
$$\bar{x}_4 = U W , \quad \bar{x}_5 = V W , \quad \bar{x}_6 = W^2 .$$

Queste equazioni con β arbitrario, rappresentano le ∞^1 superficie $\overline{\overline{F}}$ aventi comuni con F le due calotte assegnate del 2° ordine. Tutte le F si toccano in ciascun punto della conica comune per i due centri.

Se e solo $\overline{\overline{F}}$ ed F hanno contatto di 2° ordine in un altro punto della conica passante per i centri delle due calotte (risulta $\beta = 0$, quindi) le due superficie coincidono.