ACTA
Vol. VIII - N. 8
pag. 61-66

METODI APPROSSIMATI PER LO STUDIO DELLE SORGENTI SONORE (*)

(Con una figura)

PIERO GIORGIO BORDONI

SVMMARIVM. — Auctor praebet exactam expressionem campi sonori, qui e superficie sphaerica emissus sit, aliis circuitus condicionibus atque illa quae, ad velocitatem attinens, solet dispici. Significat praeterea quasdam supputandi rationes, quibus, simplici quodam interpolationis processu adhibito, perpendi possint superficies emittentes non sphaericae, quarum circuitus condiciones magis implexae sint. Postremo quaedam exponit de illis supputandi rationibus ad sonoros quosdam fontes artibus adhibitos applicandis.

1. PREMESSA. – Le onde irradiate dalle sorgenti sonore sono generalmente considerate come l'effetto di un *moto prescritto* che ha luogo sulla loro superficie esterna: si ha cioè una condizione al contorno relativa alla velocità od allo spostamento. La determinazione dell'integrale che soddisfa a questa condizione è particolarmente semplice quando:

a) la superficie sia sferica;

b) la velocità abbia ovunque la stessa fase, e sia simmetrica intorno all'asse polare.

In questo caso il potenziale di velocità è dato (a meno del fattore $e^{j\omega t}$) dalla espressione ben nota (1):

$$\Phi = \frac{a^2}{r} e^{j\beta(a-r)} \sum_{0}^{\infty}{}_n \mathrm{U}_n \frac{f_n(j\beta r)}{\mathrm{F}_n(j\beta a)} \tag{1}$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi il 1° gennaio 1945.

(1) Vedi ad esempio: RAYLEIGH, *The theory of sound.*; Macmillan Ed. London, 1929, 2ª ediz., vol. II, pag. 239 con l'avvertenza che il raggio a è indicato con c, la costante di fase β con k, e il potenziale di velocità Φ ha segno opposto a ψ.

dove: Φ = potenziale di velocità ($m^2 \sec^{-1}$)

a = raggio della sfera (m)

r = distanza dal centro (m)

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ = costante di fase (m^{-1})

U_n = termine n^{simo} dello sviluppo della velocità: $U = \sum_{n\,\infty}^{0} U_n$

f_n, F_n = funzioni di Stokes di 1ª e 2ª specie, di ordine n.

Nel presente lavoro si indicano alcuni procedimenti per ricavare soluzioni, analoghe alla [1] ma relative a condizioni al contorno diverse. Si considerano i casi seguenti:

1°) velocità assegnata con fase variabile;

2°) pressione assegnata con fase variabile;

3°) condizioni miste su di una sfera: velocità assegnata su di una parte della superficie e pressione sulla rimanente; oppure velocità e impedenza ecc.;

Nei casi 1°) e 2°) la determinazione della soluzione è fatta in maniera esatta, negli altri in maniera approssimata, ma con un procedimento che permette di ridurre indefinitamente l'errore. Si considerano soltanto condizioni al contorno aventi *simmetria di rotazione* intorno ad un asse: è questo il caso fisicamente più importante, e d'altronde l'estensione dei risultati a casi asimmetrici è immediata.

Le espressioni ottenute si prestano facilmente a calcoli numerici, e permettono di trattare sorgenti sonore largamente usate nella tecnica.

2. Velocità e pressione con fase variabile. – Una velocità di vibrazione la cui fase vari da punto a punto può essere considerata come la risultante di due velocità in quadratura, aventi fase costante e ampiezza variabile. Ciò equivale a dire che nello sviluppo in serie di Legendre della velocità stessa i coefficienti vanno considerati come complessi.

Sostituendo nella [1] $U_n + jV_n$ al posto di U_n si ha la soluzione cercata:

$$\Phi = \frac{a^2}{r} e^{j\beta(a-r)} \sum_{0\,n}^{\infty} (U_n + jV_n) \frac{f_n(j\beta r)}{F_n(j\beta a)} \tag{2}$$

dove: $U_n + jV_n$ = termine n^{simo} dello sviluppo della velocità:

$$U = \sum_{0\,n}^{\infty} U_n + jV_n$$

La soluzione relativa ad una pressione assegnata si ottiene con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per ricavare la [1]. Si sviluppa in serie di LEGENDRE (a coefficienti complessi) la pressione P' assegnata sulla sfera:

[3] $$P' = \sum_0^\infty {}_n (A_n + jB_n)\, P_n(\cos \vartheta)$$

dove: P_n = funzione di LEGENDRE di ordine n.
ϑ = colatitudine (radianti)

e si eguaglia termine a termine la serie [3] con l'espressione della pressione P di una generica onda divergente, dopo aver posto: $r = a$. La P è data da:

[4] $$P = j\omega\rho_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sum_0^\infty {}_n (x_n + jy_n)\, P_n(\cos \vartheta)\, f_n(j\beta r)$$

dove: ρ_0 = densità dell'aria (kg. m^{-3})
$x_n + jy_n$ = costante arbitraria (m^3 sec^{-1})

e la soluzione cercata è quindi:

[5] $$\Phi = -j \frac{1}{\omega\rho_0} \frac{a}{r} e^{j\beta(a-r)} \sum_0^\infty {}_n (A_n + jB_n) \frac{f_n(j\beta r)}{f_n(j\beta a)} P_n(\cos \vartheta) \; .$$

3. CONDIZIONI AL CONTORNO MISTE. – I procedimenti seguiti per la [1], la [2] e la [5] non sono più applicabili quando la velocità sia assegnata soltanto su di una parte della sfera, e la pressione sul resto.

Se ci si limita a considerare le prime armoniche di LEGENDRE dello sviluppo è possibile determinare approssimatamente i coefficienti $(x_n + jy_n)$ con un comune procedimento di interpolazione: si divide l'intervallo $\overline{0\;\pi}$ della ϑ in $(n-1)$ parti (per esempio uguali) e si pone la condizione che la pressione e la velocità assumano all'estremo di ogni intervallo i valori rispettivamente assegnati. Si ottengono così $2n$ equazioni lineari (reali) che permettono di determinare i $2n$ coefficienti incogniti x_n, y_n (reali). Il procedimento è applicabile a diversi

tipi di condizioni miste; velocità-pressione; velocità-impedenza; pressione-impedenza ecc.

Quando la velocità sia assegnata su quasi tutta la sfera e la impedenza soltanto su di una piccola calotta si può seguire un procedimento di calcolo meno laborioso. Supponendo per un momento che la velocità di vibrazione sia nulla sulla calotta, si determina in *maniera esatta* l'espressione dell'onda irradiata, e si calcola il valore medio sulla calotta della pressione acustica. Dividendo questo valore per l'impedenza media assegnata si ottiene, per il teorema THEVENIN, la velocità media di vibrazione della calotta.

Si conosce quindi in maniera approssimata la distribuzione di velocità su tutta la sfera e si può senz'altro applicare la [2].

Nel caso che la superficie esterna della sorgente sonora non sia sferica, si può considerare la sua velocità normale di vibrazione come dovuta ad un'onda irradiata da una superficie sferica tutta interna alla sorgente.

La distribuzione della velocità alla superficie di questa sorgente fittizia può essere determinata con lo stesso procedimento di approssimazione indicato: si divide una linea meridiana della sorgente $(n-1)$ parti e si pone la condizione che la componente della velocità irradiata normale alla sorgente, coincida con la velocità assegnata (oppure che coincidano le pressioni ecc.; si ottengono, come al solito, $2n$ equazioni che determinano le x_n, y_n.

Rispetto al procedimento relativo alle condizioni miste *su di una sfera* si notano due differenze:

1°) nel calcolo dei coefficienti x_n, y_n non va posto: $r = a$, ma vanno introdotti i valori che r assume alla superficie della sorgente considerata;

2°) la velocità normale alla superficie non coincide con la velocità radiale dell'onda, ma è la somma delle proiezioni di questa e della componente trasversale.

Il raggio della sorgente sferica fittizia e la posizione del suo centro sono arbitrari. Per rendere più semplici i calcoli e migliore l'approssimazione conviene sceglierli in modo da rendere minima la differenza tra la sorgente fittizia e quella assegnata. È importante osservare che nelle condizioni al contorno miste e in quelle su di una superficie sferica, le x_n, y_n sono *funzioni della frequenza.*

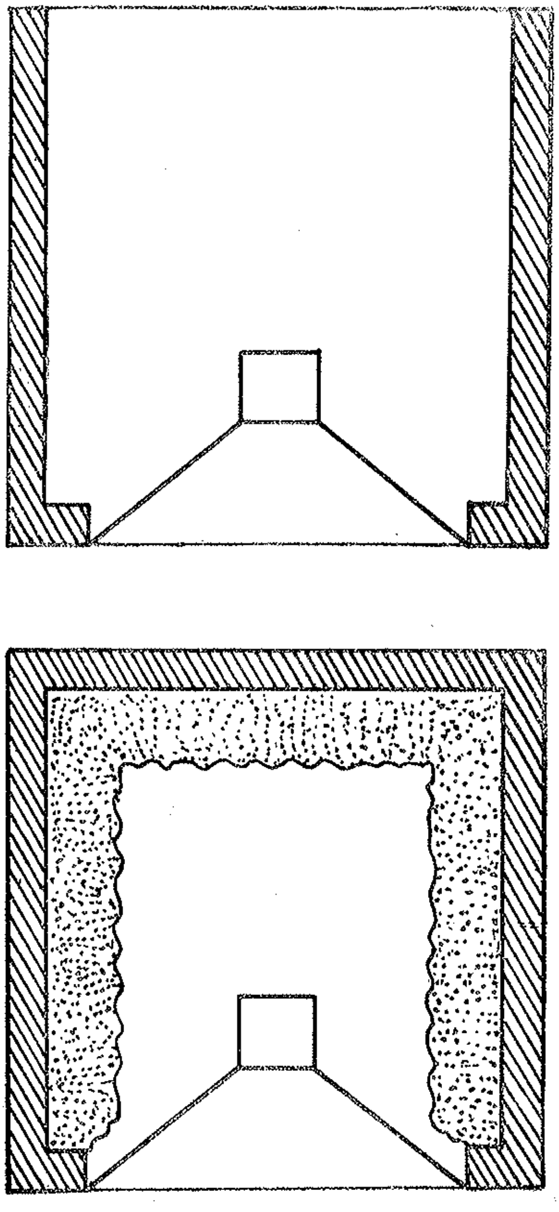

Fig. 1.

Altoparlante elettrodinamico con schermo acustico aperto o chiuso posteriormente.

4. Considerazioni fisiche. – Mediante la [2] si può tenere conto della differenza di fase che si produce nella velocità in punti diversi di una superficie vibrante, a causa della dissipazione di energia.

La [5] è applicabile a quelle sorgenti sonore la cui impedenza interna sia minore di quella di radiazione (alcuni generatori subacquei, risuonatori accordati ecc.).

I procedimenti di approssimazione relativi alle condizioni miste consentono di studiare la radiazione di un altoparlante elettrodinamico applicato ad uno schermo acustico in forma di scatola, chiusa o aperta posteriormente, come in figura 1 (si tenga presente il caso degli apparecchi radioriceventi). La velocità è assegnata alla superficie del cono e sulle pareti esterne della scatola (dove è nulla). In corrispondenza all'apertura posteriore è assegnata l'impedenza, la cui determinazione approssimata non offre grandi difficoltà; naturalmente quando lo schermo è aperto, si deve tener conto anche del suono irradiato dalla faccia interna dell'altoparlante.

L'Autore ringrazia il prof. A. Giacomini, direttore dell'Istituto Nazionale di Elettroacustica « O. M. Corbino », per i consigli da lui ricevuti nella elaborazione di questo lavoro.