ACTA
Vol. VIII .. N. 10
pag. 73-90

TRAVI IN CEMENTO ARMATO AD ELEMENTI IN DIVERSO STATO DI COAZIONE (*)

(Con tre figure)

CARLO CESTELLI GUIDI

SVMMARIVM. — Cum COLONNETTI quaedam animadverterit de computandis sollicitationibus in trabe caementi armati (1), quae, ob antea tensas fulturas, sit in statu coactionis, et externis viribus subdatur, Auctor generatim de trabe disserit, una vel pluribus trabibus constanti, quarum alia sit in alio coactionum statu; artificium quoddam Auctor significat, quo sua computatio ad normalem casum tum etiam referri potest, cum, externis oneribus gravantibus, nisus et contentiones tractionis adsint in conglomerato (2).

Consideriamo dapprima una sola trave in conglomerato con armature preventivamente tese (3).

Le sollecitazioni che si hanno in essa in assenza di forze esterne o sotto carico possono in ogni caso calcolarsi secondo la regola seguente:

« Detta $\overline{N}$ la risultante delle tensioni preventive (anteriori al getto) a cui furono sottoposte le armature (risultante nota in grandezza e posizione) e detto N lo sforzo longitudinale (eventualmente nullo e in-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti il 12 dicembre 1944.

(1) G. COLONNETTI, « Scienza delle Costruzioni », Torino, 1941, pag. 483.

(2) Il procedimento di calcolo indicato in questa nota è stato già applicato dallo scrivente al caso più semplice di un sistema misto costituito da nervatura precompressa e soletta non precompressa (C. CESTELLI GUIDI, *Contributo al calcolo del cemento armato precompresso*, « Annali dei LL. PP. », Dicembre 1932).

(3) Le sollecitazioni nelle armature della trave per forze esterne applicate ad essa prima di eseguire il getto, e quelle che si destano nel conglomerato (e le residue nel ferro) in seguito alla eliminazione di dette forze esterne, le indicheremo, con il COLONNETTI: sollecitazioni preventivamente applicate alle armature, le prime e sollecitazioni dello stato di coazione le seconde. Tuttavia per comodità di esposizione a volte chiameremo, seguendo una consuetudine ormai dif-

finitamente lontano) dovuto alle forze applicate (anch'esse note in grandezza e posizione), si indichi con R la risultante di N (1) e di $-\overline{\mathrm{N}}$, R sarà così nota in grandezza, posizione e segno. Si ha allora che:

a) le tensioni effettive σ_c del calcestruzzo sono uguali a quelle che si avvebbero per la forza eccentrica R;

b) le tensioni effettive σ_f del ferro sono uguali a quelle che si avrebbero, come sopra, per lo sforzo eccentrico R, *aumentate (algebricamente) delle tensioni preventive (note).*

Per rendersi ragione di questo fatto, riportiamoci all'istante in cui venne terminato il getto, prima che la trave venisse lasciata a sè stessa.

In tale istante le armature sono soggette ad uno sforzo assiale di cui $\overline{\mathrm{N}}$ è la risultante, mentre il σ_c è dovunque nullo. Possiamo dire che $\overline{\mathrm{N}}$ è, in questo caso, la risultante relativa a tutte le sezioni della trave. Se dunque dopo aver abbandonato la trave a sè stessa, si applica nuovamente uno sforzo longitudinali pari a $\overline{\mathrm{N}}$ ed ugualmente disposto, si ritornerà alle condizioni di partenza con $\sigma_c = 0$ e $\sigma_f = \overline{\sigma}_f$. Più in generale, se per una qualunque sezione di trave la risultante relativa è $\overline{\mathrm{N}}$ (in grandezza, senso e posizione) si ha per quella sezione:

$$\sigma_c = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_f = \overline{\sigma}_f$$

Se dunque N è l'*effettiva* risultante relativa ad una sezione della trave, possiamo considerarla come composta di due sollecitazioni: la

---

fusa, pretensioni le prime e, per il conglomerato, precompressione le seconde con espressione inesatta, sia perchè lo stato di coazione può portare anche a sforzi di trazione in una zona della sezione, sia perchè esse si destano posteriormente e quindi, caso mai, il prefisso «pre» è da interpretarsi come stato di cose precedente alla applicazione dei carichi utili. Per trave precompressa intenderemo allora una trave in stato di coazione per la eliminazione delle forze esterne preventive.

Riguardo alla simbologia seguita si chiarisce che i simboli lineati ($\overline{\mathrm{N}}$, $\overline{\sigma}$) si riferiscono allo stato preventivo di applicazione delle sollecitazioni esterne alle armature, quelli con asterisco (σ^*) allo stato di coazione prodotto dalla eliminazione delle forze esterne preventivamente applicate alle armature ed infine l'apice (σ') alle travi aggiunte a quella principale (fig. 1).

(1) Il segno delle forze N e $\overline{\mathrm{N}}$, trattandosi di c. a. si assumerà positivo se di compressione. Perciò la pretensione sarà in pratica un numero negativo.

sollecitazione $\overline{\overline{N}}$ e una certa sollecitazione che chiameremo R. Potremo perciò scrivere l'equazione simbolica

$$N = \overline{\overline{N}} + R \qquad [1]$$

Ora, la sollecitazione $\overline{\overline{N}}$ annulla, come s'è detto, tutti i σ_c, mentre rende uguali a $\overline{\sigma}_f$ i vari σ_f. *L'annullarsi dei σ_c per una delle sollecitazioni componenti assicura che si può applicare anche al calcestruzzo la sovrapposizione degli effetti.* Avremo perciò dalla [1]:

$$\sigma_c = \sigma_{cR} \qquad [2]$$

e

$$\sigma_f = \overline{\sigma}_f + \sigma_{fR}. \qquad [3]$$

Siccome poi, per la [1], R si può considerare come risultante dei due sforzi — $\overline{\overline{N}}$ ed N, e cioè:

$$R = -\overline{\overline{N}} + N, \qquad [4]$$

risulta senz'altro giustificata la proposizione sopra enunciata.

Nel caso particolare di $N = 0$ (trave non soggetta a carichi), la [4] dice che, nello stato naturale (cioè a vuoto), i σ_c sono quelli che si avrebbero nella corrispondente trave normale soggetta ad uno sforzo longitudinale eccentrico pari a $-\overline{\overline{N}}$, mentre i σ_f, per la [3] si otterranno aggiungendo alle tensioni prodotte dalla $-$ N quelle preventive.

* * *

Si consideri quindi il sistema complesso costituito da più travi rettilinee precompresse, accostate e saldate fra loro. Per ipotesi, nella posizione reciproca assunta, i rispettivi diagrammi dello stato di coazione, prodotti dalla eliminazione delle forze esterne di pretensione, siano diversi l'uno dall'altro con la sola condizione che risultino paralleli i loro assi neutri, come è indicato nella figura 1 per due sole travi I e II. Avviene allora che le singole travi assumono curvature diverse che debbono però conservare anche dopo collegate fra di lore.

Costruttivamente ciò si ottiene interponendo fra trave e trave un letto di malta che, ove non combacino le superfici di contatto, come avviene ad esempio con travi sovrapposte, le unisce senza provocare reciproca trasmissione di sforzi.

Diversi accorgimenti assicurano invece che ciò avvenga per le sollecitazioni (sforzi di taglio) che si producono in seguito all'applicazione di carichi esterni. L'accoppiamento, che potremmo dire *in parallelo*, delle travi può essere totale o parziale. Comunque qui di seguito ci riferiremo sempre ai tratti in cui le travi risultano effettivamente collegate fra di loro.

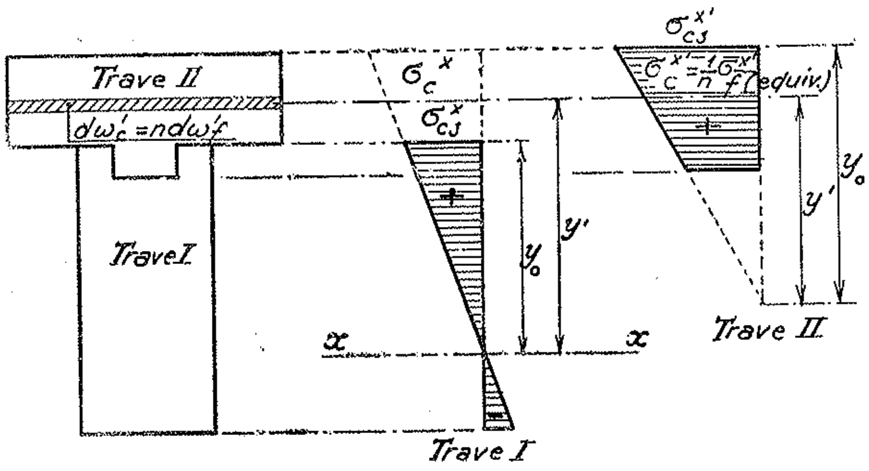


FIG. 1.

Per comodità di esposizione chiameremo una delle travi *trave principale* e le altre *travi aggiunte* pur rilevando fin da ora che tale distinzione non influisce sullo sviluppo della trattazione. In seguito suggeriremo il criterio di scelta della trave principale.

Le tensioni a trave scarica (sola precompressione), che distingueremo con asterisco, nelle travi componenti: principale e aggiunte, essendo per ipotesi indipendenti da quelle delle altre, sono nel ferro:

$$\sigma_f^* = \bar{\sigma}_f + \sigma_{fR} \qquad [5]$$

e nel conglomerato

[6] $$\sigma_c^* = \sigma_{cR},$$

dove si sono indicate con σ_{fR} e σ_{cR} le sollecitazioni prodotte in una trave normale in cemento armato, di sezione uguale a quella di una delle travi componenti (con le relative armature), da uno sforzo longitudinale R, che in questo caso si riduce alla precompressione $-\overline{N}$, sollecitazioni che per quanto precedentemente detto, possono considerarsi note.

Per effetto di una data sollecitazione esterna (caso generale di pressione eccentrica, in particolare flessione o pressione semplice) possono verificarsi per le travi aggiunte tre casi:

a) *le travi sono tutte compresse;*

b) *una, o più travi sono tutte tese e le altre tutte compresse;*

c) *una o più travi sono in parte tese e in parte compresse.*

Esaminiamo successivamente questi tre casi:

Caso *a*) Le travi aggiunte possono considerarsi tutte resistenti e *ad esse può applicarsi il principio della sovrapposizione degli effetti.*

Per effetto anche della sollecitazione esterna reale possono verificarsi due sottocasi: *la trave principale risulta tutta compressa* ovvero *parzialmente compressa.*

Nel primo si può continuare ad applicare la sovrapposizione degli effetti e calcolare le tensioni dovute al carico esterno come se si trattasse di una trave resistente anche a trazione, sommando poi i risultati così ottenuti con quelli di precompressione corrispondenti alla trave scarica. Come controllo deve risultare dovunque il σ_c non minore di zero (1).

Nel secondo sottocaso, ossia con trave principale parzialmente compressa, ove si voglia trascurare, come è d'uso, la zona tesa, il procedimento non è più lecito. Occorre quindi introdurre un artificio che consenta di considerare lo stato di coazione di tutte le travi come derivato da un unico diagramma rettilineo.

(1) In pratica potendosi ammettere piccole sollecitazioni di trazione nel conglomerato rientrano in questo caso anche le travi nelle quali non sia rigorosamente verificata la condizione.

Sia il diagramma prescelto quello della trave principale. Costruttivamente la condizione imposta equivale a supporre che, avvenuta la fase di precompressione delle singole travi componenti, indipendentemente una dall'altra, in seguito alla eliminazione delle forze esterne di pretensione applicate alle rispettive armature, venga prodotto nelle travi aggiunte un ulteriore stato di coazione di valore tale da portare i propri diagrammi di sollecitazione totale a coincidere con quello della trave principale, ovvero con il suo prolungamento, a seconda della posizione reciproca delle travi.

Ciò fatto le travi possono pensarsi rese solidali fra di loro in modo da costituire una unica trave il cui diagramma di sollecitazione risponde alla condizione di essere lineare e continuo.

Con ciò si sono poste le travi aggiunte in uno stato di coazione che è diverso da quello reale, ma, a rendere lecita la posizione fatta, basta pensare che, prima di effettuare il collegamento fra le travi, in quelle aggiunte venga prodotta una sollecitazione preventiva uguale, ma il segno opposto a quella detta, che concorre a produrre le deformazione voluta, e della quale va tenuto conto nel valutare le sollecitazioni finali.

È chiaro allora che l'intensità di questa *coazione preventiva* risulta in ogni punto dalla differenza, cambiata di segno, fra la sollecitazione di precompressione propria della trave principale e quella corrispondente della trave aggiunta, ossia:

$$\sigma_{(\text{prev.})} = -\left(\sigma_{(\text{princ.})} - \sigma_{(\text{agg.})}\right) \tag{7}$$

e analogamente può dirsi per il ferro reale delle travi aggiunte.

Con procedimento più elegante, seppure meno intuitivo, anzichè procedere nel modo detto, sostituiamo al conglomerato delle travi aggiunte una equivalente sezione di ferro. Per fare ciò operiamo sulle loro sezioni trasversali una divisione in striscie orizzontali di area infinitesima $d\omega'_c$ (si indicano con apice i simboli delle travi aggiunte) come indicato in figura 1 dove la trave I è la principale e la II una delle aggiunte. Queste aree divise per n possono intendersi ciascuna come *l'equivalente in ferro* $d\omega'_f$ delle aree infinitesime $d\omega'_c$ e considerate come armatura della trave principale [1] anche se cadono fuori di essa

[1] L'artificio è indicato dal GIANNELLI per il calcolo delle sezioni a T inflesse in cemento armato.

come nel caso della figura poichè in effetti, nella deformazione, agiscono solidalmente alla trave principale.

Analoghe considerazioni a quelle sopra fatte per il conglomerato delle travi aggiunte possono quì ripetersi per il loro ferro equivalente supposto incorporato nella trave principale. Con questa posizione, poichè il conglomerato della trave principale ha una precompressione σ_c^* (a vuoto), il ferro equivalente verrebbe ad assumere una sollecitazione $n\sigma_c^*$ mentre quella effettiva corrispondente al diagramma di precompressione della trave aggiunta è: $n\sigma_c^{*\prime}$.

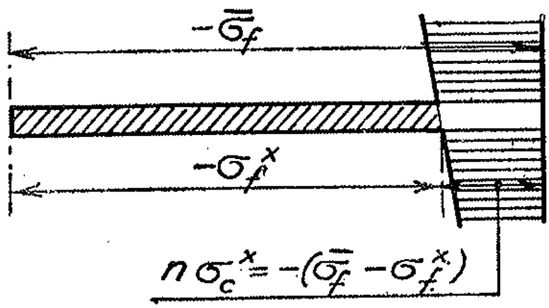


Fig. 2.

Si osservi ora che la carattesistica delle travi precompresse è appunto che la sollecitazione σ_f^* nella armatura non è quella corrispondente alla sollecitazione σ_c^* del conglomerato, come avverrebbe in una normale trave in cemento armato. La differenza è rappresentata dalla pretensione $\bar{\sigma}_f$ (fig. 2) ossia, come si è visto, in virtù della [5]:

[8] $$\bar{\sigma}_f = \sigma_f^* - n\,\sigma_c^* .$$

Inversamente tutte le volte che in una sezione in cemento armato le sollecitazioni nelle armature sono diverse da quelle del conglomerato moltiplicate per n, dobbiamo dedurne che a dette armature sia stato applicato uno sforzo di pretensione. Ciò si può immaginare esteso anche ai ferri equivalenti, supposti incorporati nella trave principale; infatti, come si è detto, in essi la sollecitazione effettiva non è $n\sigma_f^*$ bensì $\sigma_f^{*\prime}{}_{(\mathrm{equiv.})} = n\sigma_c^{*\prime}$ e quindi la tensione preventiva, che chiameremo *fittizia*, risulta, con espressione analoga alla [8]:

[9] $$\bar{\sigma}'_{f\,(\mathrm{fitt.})} = \sigma_f^{*\prime}{}_{(\mathrm{equiv.})} - n\,\sigma_c^* .$$

Si può allora, a tutti gli effetti, considerare la trave principale, come se quelle aggiunte non esistessero ed al loro conglomerato fosse sostituito un sistema di armature soggette alle pretensioni fittizie espresse dalla [9].

Anche per i ferri reali delle travi aggiunte, che sono stati sottoposti alla pretensione effettiva $\bar{\sigma}'_f$, vale una relazione analoga alla [8] ossia:

[10] $$\bar{\sigma}'_f = \sigma_f^{*\prime} - n\sigma_c^{*\prime} .$$

D'altra parte, considerando anche questo ferro reale come facente parte della trave principale, non coincidendo in generale $\sigma_f^{*\prime}$ con $n\sigma_c^{*}$ si potrà trovare una nuova pretensione, che, per distinguerla da quella fittizia, chiameremo *ideale*, definita dalla relazione:

[11] $$\bar{\sigma}'_{f\,(\text{ideale})} = \sigma_f^{*\prime} - n\,\sigma_c^{*}$$

e sostituendo la [10] nella [11], con riguardo alla [9] e tenuto presente che $n\sigma_c^{*\prime} = \sigma^{*\prime}_{f\,(\text{equiv.})}$ si ottiene:

[12] $$\bar{\sigma}'_{f\,(\text{ideale})} = \bar{\sigma}'_f + n\,\sigma_c^{*\prime} - n\,\sigma_c^{*} = \bar{\sigma}'_f + \bar{\sigma}'_{f\,(\text{fitt.})} .$$

La trave composta può perciò calcolarsi col metodo generale aggiungendo (geometricamente) alle tensioni preventive reali delle travi la risultante di quelle fittizie definite dalla [9] applicate ai ferri equivalenti ed a quelli reali delle travi aggiunte, coll'avvertenza di sommare algebricamente le $\sigma'_{f\,(\text{fitt.})}$ alle sollecitazioni che si troveranno per il ferro equivalente e reale.

Con riferimento alla figura 1 si consideri allora il valore (noto) della tensione a vuoto in corrispondenza di un punto della trave principale, che in particolare potra essere quello σ^{*}_{cs} al suo lembo superiore. Il valore σ_c^{*} in una fibra distante di y dall'asse neutro (della trave a vuoto) è allora:

[13] $$\sigma_c^{*} = \frac{y}{y_0}\,\sigma^{*}_{cs}$$

ove y_0 [1] è la distanza del punto prescelto, e nel caso particolare del lembo superiore della sezione, dall'asse neutro (a vuoto).

Analoghe relazioni si trovano per le travi aggiunte e quindi, sempre con riferimento ai simboli della figura 1, risulta nei loro ferri equivalenti la sollecitazione reale:

$$[14] \qquad \sigma_f^{*'}{}_{(\text{equiv.})} = n\,\sigma_c^{*'} = n\,\frac{y'}{y'_0}\,\sigma^{*'}_{cs}\,.$$

Sostituendo allora le [13] e [14] nella [9] si ottiene la sollecitazione di pretensione fittizia:

$$[15] \qquad \bar{\sigma}'_{f\,(\text{fitt.})} = n\left(\frac{y'}{y'_0}\,\sigma^{*'}_{cs} - \frac{y}{y_0}\,\sigma^{*'}_{cs}\right)$$

e posto [2]

$$[16] \qquad k' = \frac{\sigma^{*'}_{cs}}{y'_0}\,; \qquad k = \frac{\sigma^{*}_{cs}}{y_0}\,,$$

a [15] diviene

$$[17] \qquad \bar{\sigma}'_{f\,(\text{fitt.})} = n(k'y' - ky)$$

e quindi la risultante delle pretensioni fittizie da applicarsi ad una trave aggiunta risulta:

$$[18] \qquad \overline{\mathrm{N}}'_{(\text{fitt.})} = \int_{\omega'_f} \bar{\sigma}_{f\,(\text{fitt.})}\,d\omega'_f = n\,k' \int_{\omega'_f} y'\,d\omega'_f - n\,k \int_{\omega'_f} y\,d\omega'_f\,,$$

gli integrali dovendosi intendere estesi ai ferri equivalenti e reali.

Nella [18] il primo termine del terzo membro rappresenta la sollecitazione totale della trave aggiunta, compresi i suoi ferri reali, esistente nella fase di precompressione, sollecitazione la quale coincide, a meno del segno, con la pretensione *effettiva* $\overline{\mathrm{N}}'$ applicata ad essa e l'in-

---

(1) Le y sono positive dalla parte delle σ_c positive rispetto all'asse neutro.

(2) Le k sono sempre positive.

tegrale del secondo termine il momento statico S'_x dell'area del ferro equivalente e reale della trave aggiunta, rispetto all'asse neutro x-x (a vuoto) della trave principale, ossia possiamo scrivere l'equazione simbolica

$$[19] \qquad \overline{N}'_{(\mathrm{fitt.})} = -\overline{N}' - n k S'_x = -\overline{N}' + \overline{N}'_{(\mathrm{agg.})} ,$$

nella quale si è introdotta la *pretensione aggiunta*:

$$[20] \qquad \overline{N}'_{(\mathrm{agg.})} = -n k S'_x .$$

In base alla convenzione adottata il momento statico è positivo dalla parte delle y positive.

Il punto di applicazione della $\overline{N}'_{(\mathrm{fitt.})}$ è conosciuto in quanto è chiaro che la $\overline{N}'_{(\mathrm{agg.})}$ passa per il centro relativo all'asse x-x della trave principale e quindi dista da questa di $y_x = \dfrac{\mathcal{J}'_x}{S'_x}$.

La [20] cade in difetto qualora l'asse neutro della trave principale vada all'infinito (ossia precompressione uniforme). In tale caso infatti $S'_x = \infty$; $k = 0$ e la $\overline{N}'_{(\mathrm{agg.})}$ diviene inderminata.

Ricordando che in questo caso $k y = \sigma_c^* = \text{cost.}$, si ha:

$$n k \int y \, d\omega'_f = n \sigma_c^* \int d\omega'_f = n \sigma_c^* \Omega' ,$$

dove Ω' è l'area complessiva (ferro equivalente e reale) della parte aggiunta e quindi la [20] diviene:

$$[21] \qquad \overline{N}'_{(\mathrm{agg.})} = -n \sigma_c^* \Omega' .$$

Nel caso particolare poi che il baricentro dell'area complessiva della trave aggiunta cada sull'asse neutro del diagramma di precompressione della trave principale, risulta $S'_x = 0$ e quindi $\overline{N}'_{(\mathrm{agg.})} = 0$ e $y' = \infty$ ed infatti un diagramma di sollecitazione con punto di nullo nel baricentro della trave non può essere prodotto altro che da un momento. Allora anzichè una forza di pretensione aggiunta si ha un *momento di pretensione aggiunto* che risulta dalla relazione:

$$[22] \qquad \overline{M}'_{(\mathrm{agg.})} = -n \frac{\sigma_c^* \mathcal{J}'_x}{y} = -n k \mathcal{J}'_x .$$

Per quanto sopra si può, a tutti gli effetti, considerare, come già detto, in luogo della trave composta la sola trave principale, armata, oltre che coi propri ferri, con le armature equivalenti e reali delle travi aggiunte sottoposte, ognuna di queste ultime, complessivamente ad una tensione preventiva di risultante $\overline{\mathrm{N}}' + \overline{\mathrm{N}}'_{(\text{fitt.})}$.

Il calcolo si riconduce così al caso normale poichè, componendo la pretensione reale della trave principale con quelle reali e fittizie delle travi aggiunte, si ottiene una pretensione definita dall'equazione simbolica:

$$[23] \qquad \overline{\mathrm{N}}_m = \overline{\mathrm{N}} + \sum \overline{\mathrm{N}}' + \sum \overline{\mathrm{N}}'_{(\text{fitt.})} = \overline{\mathrm{N}} + \sum \overline{\mathrm{N}}'_{(\text{agg.})} \ ,$$

che si può chiamare *pretensione mista* (1) (fittizia + reale) e che può venire utilizzata per il calcolo della trave principale, solidale alle travi aggiunte, allo stesso modo come verrebbe utilizzata la $\overline{\mathrm{N}}$ per la trave principale isolata.

Ed infatti si può ora essere certi che, applicando alla trave principale, provvista in più del ferro equivalente e reale delle travi aggiunte, lo sforzo longitudinale $\overline{\mathrm{N}}_m$, si annullano in essa trave tutte le σ_c, mentre le σ_f (dei ferri reali ed equivalenti) assumono i corrispondenti valori delle relative pretensioni effettive.

Vale perciò la sovrapposizione degli effetti e quindi, detta R la risultante di N (forza esterna applicata) e di $-\overline{\mathrm{N}}_m$, si ha per il conglomerato ed il ferro della trave principale:

$$[24] \qquad \begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_{cR} \ ; \\ \sigma_f &= \bar{\sigma}_f + \sigma_{fR} \end{aligned}$$

e per il conglomerato delle travi aggiunte:

$$\sigma'_c = \frac{1}{n}\,\sigma'_{f(\text{equiv.})} = \frac{1}{n} \quad (\bar{\sigma}'_{f(\text{fitt.})} + \sigma_{fR})$$

(1) Alla [23] poteva giungersi anche direttamente considerare il ferro, equivalente e reale, delle travi aggiunte scarico, ossia come se non fossero esistite le N, salvo poi a tenerne conto nel valutare le sollecitazioni delle sole travi aggiunte. Allora le pretensioni fittizie necessarie a produrre in esse travi scariche lo stato di coazione definito dal diagramma di precompressione della trave principale, si riducono unicamente a quelle aggiunte ossia si sarebbe pervenuti direttamente alla [23].

La [23] ci dice che tutte le travi aggiunte possono essere considerate come una unica trave sottoposta ad una pretensione aggiunta $\Sigma\,\overline{\mathrm{N}}'_{(\text{agg.})}$.

e tenuto conto della [17]:

[25] $$\sigma'_c = \frac{\sigma_{fR}}{n} + k'y' - ky \,,$$

per il ferro (¹):

[26] $$\sigma'_f = \bar{\sigma}'_f + n(k'y' - ky) + \sigma_{fR} \,.$$

(¹) *Esempio*: Sia la trave indicata in figura 3 composta da quattro elementi I-II-III-IV resi solidali fra di loro. Il I e il II si trovino in stato di coazione per preventiva applicazione di tensione alle rispettive armature mentre il III e il IV siano scarichi a vuoto.

Si vogliano calcolare le sollecitazioni della trave così composta per un momento esterno $M = 80.000$ kg cm. Poichè l'entità della precompressione nella trave superiore è stata determinata in modo che essa risulti tutta compressa per effetto anche dei carichi esterni, ed è da presumere, per il segno del momento, che anche quella inferiore sia tutta compressa, mentre la trave I risulta parzialmente tesa, si sceglie nei calcoli questa ultima come principale e le altre come aggiunte indicando con un apice i simboli della trave II e con due apici quelli delle travi III e IV che possiamo considerare come una unica trave.

Determiniamo innanzi tutto le caratteristiche delle varie travi.

Trave principale (I)

Essendo $n = 8$; $\omega_{fi} = 0{,}75$ cmq; $\omega_{fs} = 0{,}122$ cmq

$\bar{\sigma}_f = -12000$ kg/cmq; $\bar{N} = -12000\,(0{,}75 + 0{,}122) = -10500$ kg

risulta: $\omega_{(\text{totale})} = 142$ cmq; $\mathfrak{J} = 5611$ cm^4.

Poichè la $\bar{N}$ dista dal lembo inferiore di 4,4 cm ed il baricentro della trave di 8,1 cm si ha una eccentricità di 3,7 cm e quindi:

$$\sigma^*_{cs} = 10500\left(\frac{1}{142} - \frac{3{,}7}{5611} \times 12{,}4\right) = -11{,}7 \text{ kg/cmq} \,;$$

$$\sigma^*_{ci} = 130 \text{ kg/cmq} \,; \qquad \sigma^*_{fi} = -11.075 \text{ kg/cmq}$$

risulta allora la distanza dell'asse neutro dal lembo superiore:

$$y_0 = -1{,}7 \text{ cm} \,,$$

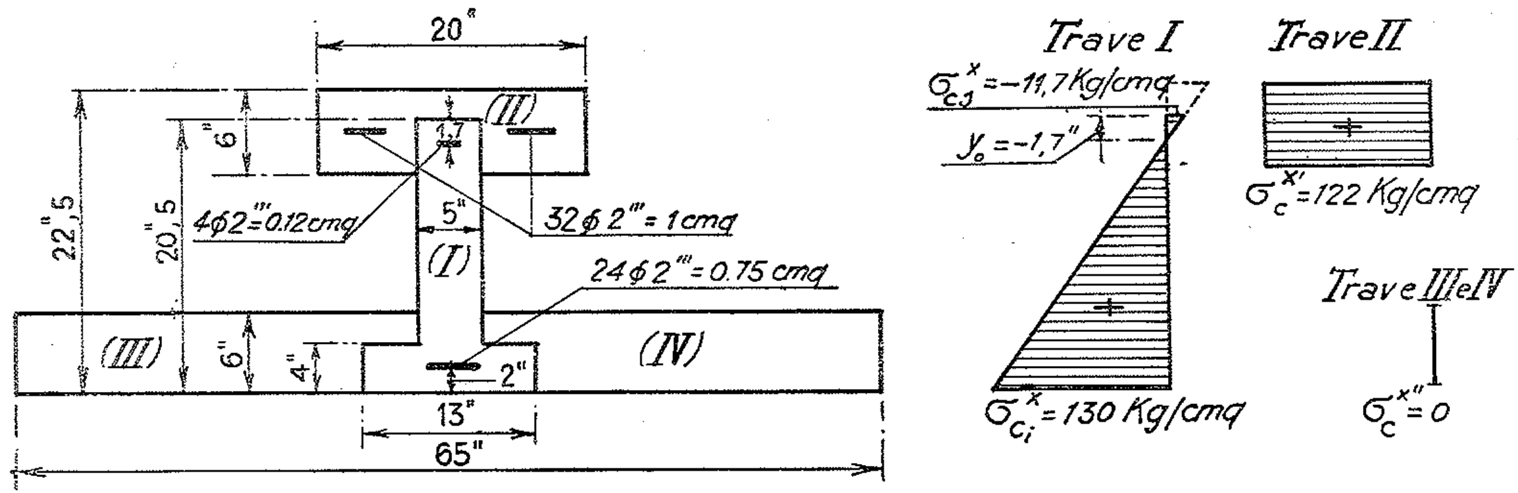
e quindi:

$$k = \frac{-11{,}7}{-1{,}7} = 6{,}9 \text{ kg/cm}^3 \,.$$

Trave aggiunta superiore (II)

$$\omega'_f = 32\,\varnothing\,2 = 1 \text{ cmq}$$

$\bar{\sigma}_f = -12000$ kg/cmq $\qquad \bar{N}' = -12000 \times 1 = -12000$ kg.



20"
22",5
20",5
6"
1,7
(II)
5"
(I)
4φ2'''=0.12cmq
32φ2'''= 1cmq
24φ2'''=0.75 cmq
(III)
6"
4"
2"
(IV)
13"
65"
Trave I
Trave II
σ_{cs}^x = −11,7 Kg/cmq
y_o = −1,7"
σ_c^{x'} = 122 Kg/cmq
Trave III e IV
σ_{ci}^x = 130 Kg/cmq
σ_c^{x''} = 0

Fig. 3.

Come controllo deve aversi ovunque $\sigma'_c \geqslant 0$.

Viene poi da sè che, ove una delle travi aggiunte non fosse precompressa, risulterebbe a vuoto per essa $\sigma_c^{*\prime} = 0$ ed essendo quindi $\overline{N}' = 0$ si avrebbe:

[27] $$\overline{N}'_{(\text{fitt.})} = \overline{N}'_{(\text{agg.})} \quad ,$$

L'area del conglomerato, trascurando il piccolo tratto sovrastante alla trave (1), è:

$$\omega'_c = 2 \times 7{,}5 \times 6 = 90 \text{ cmq}$$

e l'equivalente in ferro

$$\omega'_{f\,(\text{equiv.})} = \frac{90}{8} = 11{,}3 \text{ cmq e la totale } \omega'_f = 11{,}3 + 1 = 12{,}3 \text{ cmq} \ .$$

Le sollecitazioni di precompressione sono allora:

$$\sigma^{*\prime}_{f\,(\text{equiv.})} \frac{12000}{12{,}3} = 976 \text{ kg/cmq}; \qquad \sigma^{*\prime}_c = \frac{976}{8} = 122 \text{ kg/cmq} \ ;$$

$$\sigma^{*\prime}_f = -12000 + 976 = -11024 \text{ kg/cmq} \ ;$$

$$S'_x = -12{,}3 \times 0{,}7 = -8{,}61 \text{ cm}^3$$

e per la [20] la pretensione aggiunta risulta:

$$\overline{N}'_{(\text{agg.})} = -8 \times 6{,}9\,(-8{,}61) = 475 \text{ kg} \ ,$$

ed essendo:

$$\mathcal{J}'_x = -8{,}61\,(-0{,}7) + \frac{15 \times 6^3}{8 \times 12} = 39{,}8 \text{ cm}^4 \ ,$$

la sua distanza dall'asse neutro della trave principale è:

$$y'_x = -\frac{39{,}8}{8{,}61} = -4{,}6 \text{ cm} \ .$$

Trave aggiunta inferiore (III e IV)

$$\omega''_c = (65 - 13)\,6 + (13 - 5)\,2 = 328 \text{ cmq} \ ; \qquad \omega''_f = 0$$

$$S''_x = \frac{1}{8}\,(312 \times 15{,}8 + 16 \times 13{,}8) = 643 \text{ cm}^3 \ ;$$

$$\mathcal{J}''_x = \frac{1}{8}\left(4930 \times 15{,}8 + 221 \times 13{,}8 + \frac{52 \times 6^3}{12}\right) = 10235 \text{ cm}^4$$

$$\overline{N}''_{(\text{agg.})} = -8 \times 6,\ 9 \times 643 = -35494 \text{ kg} \ ;$$

$$y''_x = \frac{10235}{643} = 15{,}9 \text{ cm} \ .$$

Calcolo della trave composta

La pretensione mista da considerarsi sulla trave composta diviene per la [23]:

$$\overline{N}_m = -10500 + 475 - 35494 = -45519\ kg$$

e la sollecitazione nel conglomerato:

[28] $$\sigma'_c = \frac{\sigma_{fR}}{n} - k\,y\,.$$

Qualora il diagramma dello stato di coazione di una o più travi aggiunte coincidesse con quello della trave principale si avrebbe $k = k'$; $y = y'$ e quindi $\overline{N}'_{(agg.)} = \overline{N}'$. La pretensione fittizia $\overline{N}'_{(fitt.)}$ di dette travi, espressa dalla [19], risulterebbe allora nulla.

* * *

Caso *b*) Il procedimento è lo stesso del « Caso *a*) ». Il ferro aggiunto delle travi tutte tese risulta costituito unicamente dal ferro reale.

* * *

Essendo nulla la forza esterna applicata (solo momento), le sollecitazioni nella trave si ottengono componendo la risultante $R = -N_m = 45519$ kg con il momento $M = -80000$ kg cm. La R deve quindi intendersi applicata ad una distanza dal bordo inferiore della trave:

$$u = \frac{-475 \times 23{,}4 + 10500 \times 4{,}4 + 35494 \times 2{,}9 - 80000}{45519} = 1{,}3 \text{ cm}\,.$$

Essendo i coefficienti dell'equazione dell'asse neutro:

$$p = \frac{6 \times 8}{65}\left(0{,}875 \times 3{,}1 + 12{,}3 \times 18{,}2 - \frac{65 \times 1{,}3^2}{2 \times 8}\right) = 162 \text{ cm}^2\,;$$

$$q = \frac{6 \times 8}{65}\left(0{,}75 \times 0{,}7^2 + 0{,}122 \times 17{,}5^2 + 12{,}3 \times 18{,}2^2 + \frac{65 \times 1{,}3^3}{3 \times 8} + \frac{15 \times 6^3}{8 \times 12} + \frac{65 \times 1{,}3^3}{8 \times 12}\right) = $$
$$= 3070 \text{ cm}^3\,,$$

l'equazione stessa risulta:

$$y^3_x + 162\, y_x = 3070\,,$$

da cui

$$y_x = 10{,}9 \text{ cm}\,; \qquad y_i = 12{,}2 \text{ cm}\,,$$

e quindi

$$S_x = \frac{1}{2}(65 \times 12{,}2^2 - 60 \times 6{,}2^2) - 8\,(12{,}3 \times 7{,}3 - 0{,}875 \times 7{,}8) = 3035 \text{ cm}^3\,.$$

Le sollecitazioni nella trave I sono allora:

$$\sigma_{ci} = \frac{45519}{3035}\, 12{,}2 = 184 \text{ kg/cmq}\,;$$

$$\sigma_{fs} = -12000 - \frac{45519}{3035} \times 6{,}6 \times 8 = -12790 \text{ kg/cmq}\,;$$

Caso c) Il calcolo si può condurre per successive approssimazioni nel modo seguente:

Supposto dapprima di trovarsi nel caso a) si calcolino mediante la [25] le tensioni σ'_c ai lembi superiore ed inferiore delle travi aggiunte. Trovandosi per una trave che una delle due tensioni è negativa si determini per proporzionalità la posizione dell'asse neutro (che non coinciderà in generale, con quello della trave principale). Ciò fatto si consideri della trave aggiunta, oltre il ferro reale, la sola parte di ferro fittizio (da un lato dell'asse neutro) ove le tensioni risultano positive (compressione) e si calcoli nuovamente come nel caso a). Si trova allora un nuovo asse neutro e così si continua finchè lo spostamento ulteriore dell'asse neutro diviene trascurabile pervenendo allora rapidamente alle tensioni definitive, poichè in generale possono ammettersi anche piccoli sforzi di trazione nel conglomerato.

---

e nella trave aggiunta superiore essendo:

$$k' y' = \text{costante} = \sigma_c^{*\prime} = \frac{\sigma^{*\prime}_{f(\text{equiv.})}}{n} ,$$

per la [25] risulta:

$$\sigma'_{cs} = -\frac{45519}{3035} 10{,}3 + \frac{976}{8} - 6{,}9\,(-3{,}7) = -6 \text{ kg/cmq} ;$$

$$\sigma'_{ci} = -\frac{45519}{3035}\ 4{,}3 + \frac{976}{8} - 6{,}9 \times 2{,}3 = 42 \text{ kg/cmq} ,$$

e per la [26] la sollecitazione media nel ferro:

$$\sigma'_f = -12000 + 976 + 8 \times 6{,}9 \times 0{,}7 - \frac{45519}{3070} 7{,}3 \times 8 = -11850 \text{ kg/cmq} .$$

Nella trave aggiunta inferiore per la [25] (essendo $k'' = 0$):

$$\sigma''_{ci} = 186 - 130 = 56 \text{ kg/cmq} ;$$

$$\sigma''_{cs} = \frac{45519}{2972} 6{,}1 - 6{,}9 \times 12{,}8 = 5 \text{ kg/cmq} .$$

Dai risultati conseguiti si rileva che la trave I è parzialmente tesa, la II è quasi integralmente compressa avendosi al lembo superiore una trazione di soli 6 kg/cmq ed a quello inferiore una compressione di 42 kg/cmq e le travi III e IV sono completamente compresse.

Sono pertanto verificate le ipotesi di calcolo salvo che per la trave II. Si potrebbe allora ripetere il procedimento come indicato nel caso c) ossia trascurando la zona tesa dalla trave II, ma poichè la piccola trazione trovata può essere ammessa per il conglomerato, sono praticamente accettabili i risultati ottenuti.

Agli effetti dei risultati del calcolo è indifferente considerare l'una o l'altra delle travi come principale, però ove è possibile prevedere che delle travi risultino, per effetto anche delle sollecitazioni esterne, tutte compresse, o tutte tese, conviene scegliere queste come travi aggiunte.

* * *

È il caso di rilevare, in fine, che l'accoppiamento in parallelo di elementi prismatici in conglomerato diversamente precompressi, a parte la difficoltà di pratica attuazione, presenta un effettivo interesse consentendo la realizzazione di travi con diagrammi di precompressione variabili lungo di esse. Soluzione tecnica questa, che, se lascia intravedere la possibilità di realizzare in casi speciali di particolare importanza travi ad uniforme resistenza, si impone per le travi normali quando si abbia inversione del segno dei diagrammi dei momenti per incastri agli estremi.

In particolare il caso di trave precompressa abbinata ad altra non precompressa si trova tutte le volte che un elemento precompresso viene incorporato in un getto normale di conglomerato.