

IL SIGNIFICATO TELEOLOGICO DELLA LEGGE DI RIFRAZIONE DEL FLUSSO TERMICO (*)

MARIO GRENNÀ

SUMMARIVM. — *Principio minimae actionis*, a Maupertuis reperto, et *principio minimi temporis*, a Fermat, expositis, Auctor quaerit quam lege refrangatur caloris fluxus inter duo metalla diversa, mutuo applicata; cum autem hanc legem simili principio regi eviderit, quod *principium maximi fluxus* dici potest, constituit omnes naturae leges miris rationibus, in eundem finem conspirantibus, inniti.

Consideriamo due lastre metalliche sottilissime rettangolari ed uguali formate con due conduttori omogenei isotropi, dotati di differenti conducibilità termiche (per esempio rame e ferro) di cui indichiamo con k_1 e k_2 le rispettive conducibilità. Si riuniscano le due lastre rettangolari lungo un lato uguale in modo da ottenere un'unica lastra rettangolare, formata con i due metalli; è noto che facendo pervenire del calore dall'un metallo all'altro (per esempio dal rame al ferro) lungo una direzione inclinata rispetto alla linea di separazione dei due metalli, avviene la rifrazione delle linee di flusso (nel passaggio da un metallo all'altro) ossia ne risulta mutata la direzione, secondo la seguente legge, invero assai elegante: *per due dati conduttori il rapporto fra la tangente dell'angolo di incidenza e la tangente dell'angolo di rifrazione ha un valore costante:*

$$\left(\text{con } K = \text{costante} = \frac{k_1}{k_2} \right) \quad [1] \quad \frac{\tan i}{\tan r} = K$$

Vogliamo esporre il significato finalistico della predetta legge; il quale costituisce anche una dimostrazione *a posteriori* della medesima. Come è notissimo le equazioni della dinamica del punto materiale, nel

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini il 12 marzo 1944.

campo di forza derivante da un potenziale (indipendente dal tempo), si possono dedurre dal *principio della minima azione* del Maupertuis; in ottica vige il *principio del minimo tempo* di Fermat ed è noto che « per molto tempo è apparso impossibile di considerare l'analogia di questi due principii come qualcosa di più che un'analogia formale, non avente alcuna base fisica profonda. Pareva anzi che vi fosse una

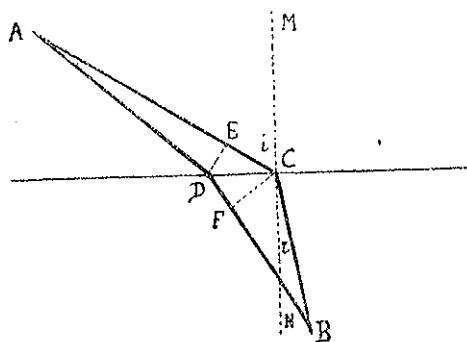


FIG. 1.

decisa opposizione tra i due principi dal punto di vista fisico, poichè, essendo la quantità di moto proporzionale alla velocità, l'integrale del Maupertuis contiene la velocità a numeratore, mentre l'integrale di Fermat la contiene a denominatore » [1]. Ora apparisce estremamente interessante il fatto che la legge di rifrazione delle linee di flusso termico traduca un *nuovo principio*, che è quello del *massimo flusso*, come vogliamo ora dimostrare. Ci proponiamo infatti il seguente quesito: *Dati due punti A e B appartenenti a due conduttori diversi, fra di loro in contatto (di conducibilità k_1 e k_2 rispettivamente) quale è il cammino che deve seguire il flusso termico partente da A per giungere in B con il massimo valore possibile?*

Supponiamo che sia ACB il cammino richiesto, essendo C punto comune ai due conduttori; per la condizione di massimo, avverrà che per ogni altro cammino, compreso fra A e B, e infinitamente vicino ad esso, la quantità di calore che perviene in B, nell'unità di tempo, dovrà risultare la stessa.

Sia ADB un cammino infinitamente vicino ad ACB, essendo D punto comune ai due conduttori; conducendo da D la DE perpendicolare ad AC e da C la CF perpendicolare a DB risulterà:

$$[2] \quad CE = CD \cdot \cos \widehat{ACD} = CD \cdot \sin i$$

$$[3] \quad DF = CD \cdot \sin \widehat{DCF} = CD \cdot \sin r$$

dove i ed r indicano gli angoli d'incidenza e di rifrazione come nella figura al lato.

Per il flusso termico sussiste, ovviamente, la *legge del coseno* valida anche per il flusso luminoso e cioè: la quantità di calore che, partendo da un punto, perviene (nell'unità di tempo) ad un elemento di una data linea (o superficie) è proporzionale al coseno dell'angolo di incidenza. La quantità di calore che, partendo da A, perviene in C sarà adunque proporzionale (a parità delle rimanenti condizioni) al coseno dell'angolo i e si avrà quindi:

$$[4] \quad q = a \cos i$$

essendo q la quantità di calore ed a una costante. Per le condizioni di massimo imposta dal problema dovrà adunque avvenire che il flusso termico relativo al percorso EC (che per il cammino ACB, in rapporto a quello infinitamente vicino ADB, rappresenta uno svantaggio) risulti uguale a quello relativo al percorso DF (che per il cammino ACB rappresenta un vantaggio). Il tempo impiegato dal calore a percorrere il tratto EC sarà espresso da:

$$[5] \quad t_1 = \frac{EC}{v_1} = \frac{EC}{bk_1} = \frac{CD \sin i}{bk_1}$$

dove v_1 rappresenta la velocità del calore nel primo mezzo (di conducibilità k_1) la quale è evidentemente proporzionale alla conducibilità ($v_1 = bk_1$ con $b =$ costante e si è fatto uso della [2]). Analogamente il tempo impiegato dal calore a percorrere il tratto DF sarà (facendo uso della [3]):

$$[6] \quad t_2 = \frac{DF}{v_2} = \frac{DF}{bk_2} = \frac{CD \sin r}{bk_2}$$

Il flusso unitario relativo al percorso EC sarà:

$$\frac{q_1}{t_1} = a \cos i : \frac{CD \sin i}{bk_1}$$

mentre quello relativo al percorso DF sarà:

$$\frac{q_2}{t_2} = a \cos r : \frac{CD \sin r}{bk_2}$$

Dovrà dunque risultare:

$$\frac{bk_1 a \cos i}{CD \sin i} = \frac{bk_2 a \cos r}{CD \sin r}$$

da cui:

$$k_1 \cotang i = k_2 \cotang r$$

ossia:

$$\frac{\tan i}{\tan r} = \frac{k_1}{k_2}$$

che coincide con la [1]. Resta quindi dimostrato che la legge di propagazione del flusso termico esprime che il passaggio di calore da un punto all'altro avviene sempre in modo tale che, fra tutti i cammini possibili, quello effettivamente seguito è il percorso di massimo rendimento termico: per cui cioè ad ogni punto perviene la massima quantità di calore, nell'unità di tempo.

Se si tiene presente che anche in termochimica il calore interviene nei fenomeni secondo il principio della *massima quantità di calore* ⁽¹⁾, non è possibile non attribuire a questo principio un significato profondo nell'interpretazione dei fenomeni termici. « BERTHELOT a énoncé en 1867 une loi, qui a formé longtemps la base de la termochimie et en général de la mécanique chimique et qui est connue sous le nom de *principe du travail maximum*. D'après cette loi, tout changement chimique tend vers la production du corps, ou du système de corps, qui dégage le plus de chaleur. BERTHELOT a ajouté dans la suite la condition que le changement chimique doit être accompli sans l'intervention d'aucune énergie étrangère... Le principe simplifié du travail maximum doit donc toujours être considéré comme le seul fil conducteur que nous possédions actuellement pour prévoir les réactions chimiques » ⁽²⁾. Il risultato conseguito rivela, ancora una volta, come al fondo di tutte le leggi naturali giaccia un eccelso e mirabile motivo teleologico che tutt'ora, in gran parte, si cela; ma che quando riesce a svelarsi, fornisce una visione di incomparabile bellezza alla contemplazione estatica dello spirito umano.

(1) DE BROGLIE LOUIS, *I quanti e la fisica moderna*, 1933, Einaudi, Torino, pag. 38-39.

(2) CHWOLSON O. D., *Traité de physique*, Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande; Tome Troisième, Premier Fascicule, Thermométrie, 1909, Hermann, Paris, pag. 298-99.