ACTA
Vol. VIII - N. 4
pag. 19-28.

CONTRIBUTO ALLO STUDIO LOCALE DELLE TRASFORMAZIONI PUNTUALI FRA DUE PIANI (*)

LAURA FARINA

SVMMARIVM. — Perpenduntur punctuales transformationes inter proximas infinitesimas regiones duorum earum punctorum correspondentium, cum duo vel tres inflexionales dimensiones inter se simul incidant; hae transformationes investigantur usque ad determinationem alicuius relationis intrinsecae localis.

PREMESSA

1. – Le trasformazioni puntuali fra due piani proiettivi sono state studiate dal VILLA e dal BOMPIANI (1) secondo differenti punti di vista.

È noto che una trasformazione puntuale determina una proiettività fra le direzioni uscenti da due punti corrispondenti O ed $\overline{O}$ e che, in generale, esistono tre direzioni per O tali che ad elementi di flesso ad esse tangenti corrispondono elementi di flesso per O; queste direzioni sono dette *caratteristiche* od anche *inflessionali*.

Il BOMPIANI ed il VILLA (2) hanno dimostrato che *solo lungo tali direzioni* supposte distinte la trasformazione è approssimabile fino all'intorno del 2° ordine da proiettività, che vengono dette *caratteristiche*, mentre l'approssimazione fino all'intorno del second'ordine secondo

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 15 settembre 1944.

(1) E. BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, («Atti R. Acc. d'Italia», (6), 13, 1942, 837-848).

(2) M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi* («Rend. R. Acc. d'Italia», (7), 3, 1942).

direzioni qualunque è possibile mediante trasformazioni quadratiche, che vengono dette per questa loro proprietà, *osculatrici*: e ne esistono ∞^2. Il BOMPIANI poi, esaminando il comportamento di esse fino all'intorno del 3° ordine, ha posto in evidenza per ciascuna quattro *direzioni d'iperosculazione*, mediante le quali si riesce a dare un riferimento proiettivo intrinseco e una forma canonica della trasformazione.

In questa Nota ci proponiamo di esporre i risultati analoghi a quelli ricordati relativi al caso in cui le direzioni inflessionali non sono tutte distinte.

STUDIO LOCALE DELLA CORRISPONDENZA NEL CASO DI DUE DIREZIONI INFLESSIONALI COINCIDENTI

2. - Siano

$$[2.1] \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x + a_{20} x^2 + 2a_{11} xy + a_{02} y^2 + \cdots \\ \bar{y} = \alpha y + b_{20} x^2 + 2b_{11} xy + b_{02} y^2 + \cdots \end{cases}$$

le equazioni, in coordinate non omogenee, di una trasformazione puntuale fra due piani proiettivi π e $\bar{\pi}$, regolare negli intorni di due punti corrispondenti O ed $\bar{\mathrm{O}}$ di coordinate (001), in relazione ad un riferimento in cui gli assi e le rette $x = y$, $\bar{x} = \bar{y}$ si suppongono corrispondenti nelle proiettività subordinate dalla trasformazione fra i fasci di centro O, $\bar{\mathrm{O}}$.

Ad un $\bar{\mathrm{E}}_2$ di flesso $\bar{y} = \bar{m}\,\bar{x} + [3]$ corrisponde un E_2 $y = mx + [3]$ pure di flesso se, e solo se,

$$[2.2] \qquad a_{02} m^3 + (2a_{11} - b_{02}) m^2 + (a_{20} - 2b_{11}) m - b_{20} = 0$$

Questa equazione, supposta non identica, è l'equazione delle direzioni inflessionali associate ad O. Supposto che essa abbia una radice doppia e fatte coincidere le due rette inflessionali che le corrispondono con $y = 0$ e la terza con $x = 0$ risulta $a_{02} = 0$, $a_{20} = 2b_{11}$, $b_{20} = 0$ e le [2.1] divengono

$$[2.3] \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x + a_{20} x^2 + 2a_{11} xy + \cdots \\ \bar{y} = \alpha y + a_{20} xy + b_{02} y^2 \quad + \cdots \end{cases}$$

La proiettività caratteristica sulla direzione inflessionale semplice ha l'equazione $\bar{y} = \dfrac{\alpha y}{1 - \dfrac{b_{02}}{\alpha} y}$. Analoga proiettività di equazione $\bar{x} = \dfrac{\alpha x}{1 - \dfrac{a_{20}}{\alpha} x}$ sussiste per la direzione inflessionale doppia. Poichè le direzioni inflessionali relative ad un punto O di una trasformazione quadratica sono le congiungenti O con i punti fondamentali, se esistono trasformazioni quadratiche osculatrici in O alla trasformazione puntuale esse non devono avere alcun punto base al di fuori delle direzioni inflessionali; anzi due di essi dovranno essere infinitamente vicini ad un punto della retta inflessionale doppia $y = 0$ ed il terzo sulla direzione inflessionale semplice $x = 0$. Se indichiamo con $l \equiv 1 - ux - vy = 0$ la retta per i due punti base distinti e $l - \sigma y = 0$ la tangente alle coniche della rete omaloidica nel primo di essi, di coordinate omogenee $(10u)$, tre coniche della rete sono

$$[2.4] \qquad x \{ l - \sigma y \} = 0 \,, \quad yl = 0 \,, \quad l^2 = 0$$

Le equazioni di una trasformazione quadratica determinata dalla rete di coniche individuata dalle [2.4] e che approssimi la [2.3] fino all'intorno del 1° ordine sono necessariamente del tipo:

$$[2.5] \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha x (l - \sigma y) \\ \bar{y} &= \alpha y l \\ \bar{z} &= l^2 - \beta x (l - \sigma y) - \gamma y l \end{aligned} \right.$$

cioè, in coordinate non omogenee,

$$[2.6] \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha x \{ 1 - (u + \beta) x + (v + \gamma - \sigma) y \} + [3] \\ \bar{y} &= \alpha y \{ 1 + (u + \beta) x + (v + \gamma) \qquad y \} + [3] \end{aligned} \right.$$

Affinchè questa trasformazione quadratica coincida con la data fino all'intorno del 2° ordine deve essere

$$[2.7] \qquad \alpha(u + \beta) = a_{20} \qquad \alpha(v + \gamma - \sigma) = 2a_{11} \qquad \alpha(v + \gamma) = b_{02}$$

Scelti u e v ad arbitrio e ricavati in conseguenza β, γ, σ da queste relazioni, le [2.6] sono le equazioni di una determinata trasformazione quadratica osculatrice. Esistono quindi ∞^2 trasformazioni quadratiche che approssimano la data fino all'intorno del 2° ordine. Le [2.5] s'invertono nelle

$$[2.8] \qquad \begin{cases} x = \bar{x}\,\bar{l} \\ y = \bar{y}(\bar{l} - \sigma\bar{y}) \\ \bar{z} = \bar{l}(l - \sigma y) + u\bar{x}\bar{l} + v\bar{y}(l - \sigma y) \end{cases}$$

ove $\bar{l} \equiv \beta\bar{x} + \gamma\bar{y} + \alpha\bar{z}$.

Se assumiamo come $\overline{P}_1(100), \overline{P}_2(010)$ in $\bar{\pi}$ gli omologhi nelle proiettività caratteristiche dei punti $P_1(100)$, $P_2(010)$ scelti ad arbitrio in π si ha $a_{20} = b_{02} = 0$. Dovrà allora essere $\beta = -u, \gamma = -v$, per cui le [2.5], [2.8] si riscrivono

$$[2.5'] \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x(l - \sigma y) \\ \bar{y} = \alpha y l \\ \bar{z} = l^2 + ux(l - \sigma y) + vyl \end{cases}$$

e, posto $\bar{l} \equiv \alpha\bar{z} - u\bar{x} - v\bar{y}$

$$[2.8'] \qquad \begin{cases} x = \bar{x}\bar{l} \\ y = \bar{y}(\bar{l} - \sigma\bar{y}) \\ \bar{z} = \bar{l}(\bar{l} - \sigma\bar{y}) + u\bar{x}\bar{l} + v\bar{y}(\bar{l} - \sigma\bar{y}) \end{cases}$$

Notiamo che per la rete omaloidica in $\bar{\pi}$ è $\bar{l} - \sigma\bar{y} = 0$ la congiungente i due punti fondamentali, mentre $\bar{l} = 0$ è la tangente in $(\alpha 0 u)$ a tutte le coniche della rete. Poichè i punti fondamentali in π sono $S_1(10u), S_2(01v)$ e la tangente in S_1 incontra OS_2 in $T(0, 1, v+\sigma)$ e in $\bar{\pi}$ gli analoghi punti sono $\overline{S}_1(\alpha 0 u)$, $\overline{S}_2(0, \alpha, v + \sigma)$, $\overline{T}(0\alpha v)$ si vede che la proiettività caratteristica su $y = 0$ fa corrispondere S_1 ed $\overline{S}_1$, mentre la proiettività caratteristica su $x = 0$ fa corrispondere ad S_2 il punto $\overline{T}$ e a T il punto $\overline{S}_2$. Se si fissano a piacere S_1, S_2 resta determinato T, quindi la configurazione analoga in $\bar{\pi}$; ma con ciò, a differenza del caso generale, non resta determinato *un* riferimento fra i due piani.

3. – Le [2.5] in coordinate non omogenee e fino all'intorno del 3° ordine si scrivono

$$[3.1] \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x(1 - \sigma y - v\sigma y^2) + [4] \\ \bar{y} = \alpha y(1 + u\sigma x y) \qquad + [4] \end{cases}$$

Confrontiamo questa con la trasformazione data cioè con

$$[3.2] \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x(1 - \sigma y) + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ \bar{y} = \alpha y \qquad\qquad + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{cases}$$

Dove, per le [2.7], abbiamo posto $-\alpha\sigma$ al posto di $2a_{11}$.

Se si cercano le direzioni di iperosculazione, ossia le direzioni lungo le quali le [3.1], [3.2] operano allo stesso modo fino all'intorno del 3° ordine, si trova per esse l'equazione

$$a_{03}m^4 + (3a_{12} - b_{03} + \alpha v\sigma)m^3 + (3a_{21} - 3b_{12} + \alpha u\sigma)m^2 + (a_{30} - 3b_{21})m - b_{30} = 0$$

Vediamo ora se esistono trasformazioni osculatrici tali che una delle direzioni di iperosculazione sia tripla, cioè tali che l'equazione precedente sia equivalente a

$$(m - \lambda)^3(m - \mu) = 0$$

Dev'essere

$$[3.3] \qquad \begin{cases} 3\lambda + \mu = -\dfrac{3a_{12} - b_{03} + \alpha v\sigma}{a_{03}} & 3\lambda(\lambda + \mu) = \dfrac{3a_{21} - 3b_{12} + \alpha u\sigma}{a_{03}} \\ \lambda^2(3\mu + \lambda) = -\dfrac{a_{30} - 3b_{21}}{a_{03}} = -A & \lambda^3\mu = -\dfrac{b_{30}}{a_{03}} = B \end{cases}$$

Le ultime due relazioni determinano λ e μ in funzione di A e B, che sono noti non appena siano date le [3.2]. Se si elimina μ fra esse si ha per la direzione tripla l'equazione del 4° grado

$$[3.4] \qquad \lambda^4 + A\lambda + 3B = 0$$

Esistono quindi quattro coppie λ, μ del tipo cercato poichè per ogni radice di questa equazione si ha un valore di μ. Poichè inoltre le [3.3] determinano u e v una volta assegnato λ, e quindi *una* trasformazione quadratica, possiamo, in relazione alla scelta di λ, fissare il riferimento nei due piani π e $\bar{\pi}$. Assumiamo in π: la congiungente i punti fondamentali della trasformazione quadratica, determinata dalle [3.3] in conseguenza di λ, come retta impropria $z=0\,(u=v=0)$ e il punto unità nel punto comune alla tangente fissa alle coniche della rete ed alla direzione di iperosculazione tripla scelta: si ha $\sigma=1, \lambda=1$ per cui $A+3B+1=0$, che esplicitamente si scrive

$$a_{30}-3b_{21}-3b_{30}+a_{03}=0 \tag{3.5}$$

Su $\bar{\pi}$ risulta « retta impropria » cioè $\bar{z}=0$, la congiungente i punti fondamentali $\bar{S}_1, \bar{T}$ e si può assumere il punto unità sulla tangente e nella direzione di iperosculazione tripla anch'essa rappresentata da $\lambda=1$ con che $\alpha=\sigma$ e quindi $\alpha=1$. Assieme alla [3.5] tenendo presente che $\mu=-\dfrac{b_{30}}{a_{03}}$ si scrivono dopo ciò le seguenti relazioni fra i coefficienti della trasformazione

$$\left\{\begin{aligned} &-b_{30}+3a_{12}-b_{03}+3a_{03}=0\\ &-a_{21}+b_{12}\;-b_{30}+\;a_{03}=0\end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

Assegnati ad arbitrio $a_{30}, a_{12}, a_{21}, a_{03}, b_{30}$ le [3.5], [3.6] determinano b_{12}, b_{21}, b_{03}. Abbiamo così cinque invarianti del 3° ordine e la forma canonica

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x}&=x(1-y)+a_{30}x^3+3a_{21}x^2y+3a_{12}xy^2+a_{03}y^3+[4]\\ \bar{y}&=y+b_{30}x^3+(a_{30}-3b_{30}+a_{03})x^2y+\\ &\quad+3(b_{30}-a_{03}+a_{21})xy^2+(3a_{03}+3a_{12}-b_{30})y^3+[4]\end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

per le equazioni della trasformazione.

Significato geometrico degli invarianti

4. – Vogliamo ora costruire geometricamente un sistema di invarianti equivalenti ai cinque trovati e dare quindi mediante essi un significato geometrico ai cinque coefficienti relativi al 3° ordine. Si ricavano subito a_{03}, b_{30} come invarianti di contatto fra gli E_3 $x=-a_{03}y^3$, $y=-b_{30}x^3$ corrispondenti ad $\bar{x}=0, \bar{y}=0$ con $x=-y^3$, $y=-x^3$ rispettivamente (si noti che $x=-y^3$, $y=-x^3$ hanno, rispetto al fissato riferimento, un ben preciso significato geometrico). Osserviamo che $-\dfrac{b_{30}}{a_{03}}$ si presenta anche nel birapporto relativo alle direzioni inflessionali e a quelle di iperosculazione per $\lambda=1$. Niente di nuovo si ricava dall'esame di altre direzioni di iperosculazione relative alle [3.4] e da trasformati di elementi E_3. Per determinare a_{21} osserviamo che $\left(0, \dfrac{-1}{6a_{21}}\right)$ è la posizione limite $\neq 0$ su $x=0$ dell'intersezione di $x=0$ e della direzione inflessionale associata ad un punto P ed avente $x=0$ come posizione limite quando P tende ad O su di una curva tangente ad $y=0$ (le intersezioni rimanenti delle direzioni inflessionali in P sia su $x=0$ che su $y=0$ hanno per limite O).

Un procedimento analogo a quello seguito dal Bompiani (*loc. cit.* pag. 847-848) permette di ricavare il significato geometrico di a_{30}, a_{12}. Ecco come si procede. Proiettiamo su $y=0$ l'elemento $y=-b_{30}x^3$ corrispondente ad $\bar{y}=[4]$ da un punto di $x=0$. Si ha la corrispondenza $x'=x+[4]$ fra le ascisse x dei punti dell'elemento e quelle x' delle proiezioni dei medesimi. Per la corrispondenza [3.7] è poi $\bar{x}=x+a_{30}x^3+[4]$ e il prodotto delle due corrispondenze, posto x al posto di x', è approssimata fino al 3° ordine da

$$a_{30}\bar{x}x^2+x-\bar{x}=0 \qquad [4.1]$$

che rappresenta una proiettività fra i punti di $\bar{y}=0$ e le coppie di un'involuzione su $y=0$. Alla coppia passante per $x=1$ corrisponde in $\bar{y}=0$ il punto $\left(\dfrac{1}{1-a_{30}}, 0\right)$ che permette di ricavare a_{30} come birapporto in relazione ai punti (001), (100), (101).

Se si considera il trasformato dell'elemento $\bar{x}=[4]$ e si procede in modo analogo si ottiene una corrispondenza analoga alla [4.1] fra i punti di $y=0, \bar{y}=0$ e si ricava quindi a_{12}. Dopo ciò i cinque coefficienti della trasformazione [3.7] sono tutti geometricamente noti.

Il caso delle tre direzioni inflessionali coincidenti

5. – Riprendiamo le equazioni [1.1] della trasformazione puntuale e l'equazione [1.2] delle direzioni inflessionali. Le equazioni [1.1] divengono

$$[5.1] \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x + 2a_{11} xy + a_{02} y^2 + \varphi_3(xy) + [4] \\ \bar{y} = \alpha y + 2a_{11} y^2 + \psi_3(xy) + [4] \end{cases}$$

quando ci si ponga nell'ipotesi che le direzioni inflessionali per O siano tutte coincidenti nella $y=0$ e si assumano corrispondenti nella proiettività caratteristica $\left[\bar{x} = \dfrac{\alpha x}{1 - \dfrac{a_{20} x}{\alpha}}\right]$ che sussiste tuttora per la direzione inflessionale tripla, i punti $P_1(100)$, $\bar{P}_1(100)$.

In questo caso una trasformazione quadratica osculatrice dovrà essere determinata da una rete di coniche aventi a comune un E_2 con centro sulla retta inflessionale tripla $y=0$, giacchè non deve esserci alcun punto fondamentale al di fuori della retta stessa.

La rete di coniche definita dalle

$$(z-ux-vy)+\rho y^2=0\,,\quad (z-ux-vy)y=0\,,\quad (z-ux-vy)^2=0$$

ha appunto un E_2 base, di centro $(10u)$ e con tangente $z-ux-vy=0$ definito da ρ. La trasformazione quadratica osculatrice determinata da questa rete se coincide con la data fino all'intorno del 1° ordine ha le equazioni

$$[5.2] \begin{cases} \bar{x} = \alpha \left\{(z-ux-vy)x+\rho y^2\right\} \\ \bar{y} = \alpha \ (z-ux-vy)y \\ \bar{z} = \quad (z-ux-vy)^2+\beta\left\{(z-ux-vy)x+\rho y^2\right\}+\gamma(z-ux-vy)y \end{cases}$$

le quali, in coordinate non omogenee e fino all'intorno del 3° ordine, posto per brevità $A \equiv ux + vy$, $B \equiv \beta x + \gamma y$, si scrivono

$$[5.3] \begin{cases} \bar{x} = \alpha \{ x - (A - B)x + \rho y^2 + (A - B)^2 x + \rho(2A - 2B + \gamma y) y^2 \} + [4] \\ \bar{y} = \alpha \{ y - (A - B) y + (A - B)^2 y - \rho \beta y^3 \} + [4] \end{cases}$$

Perchè questa trasformazione quadratica coincida con la data fino al 2° ordine incluso occorre e basta che sia $\beta = u$, $\alpha(v - \gamma) = 2a_{11}$, $\alpha\rho = a_{02}$. Si hanno quindi ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici. Le [5.3] si riscrivono ora

$$[5.4] \begin{cases} \bar{x} = \alpha \{ x + (v - \gamma) xy + \rho y^2 + (v - \gamma)^2 xy^2 + \rho(2v - \gamma) y^3 \} + [4] \\ \bar{y} = \alpha \{ y + (v - \gamma) y^2 + [(v - \gamma)^2 - \rho u] y^3 \} + [4] \end{cases}$$

6. – Le direzioni di iperosculazione per questa trasformazione alla [5.1] hanno l'equazione

$$[a_{03} - \alpha\rho(2v - \gamma)] m^4 + [3a_{12} - b_{03} - \alpha\rho u] m^3 + \\ + [3a_{21} - 3b_{12}] m^2 + [a_{30} - 3b_{21}] m - b_{30} = 0$$

Vediamo se, come nel caso precedente si possono far coincidere tre direzioni d'iperosculazione. Scritte le analoghe delle [3.3] si ottiene l'equazione di 2° grado

$$[6.1] \qquad (a_{21} - b_{12}) \lambda^2 - (3b_{21} - a_{30}) \lambda = 2b_{30}$$

analoga alla [3.4]. Si hanno cioè due trasformazioni quadratiche osculatrici con una retta d'iperosculazione tripla ed una semplice. In relazione ad una di esse, presa la retta tripla come asse $x = 0$ e la semplice come retta $x = y$ e inoltre: la tangente al suo E_2 base come retta $z = 0$ ($u = v = 0$), si hanno per i coefficienti le condizioni

$$[6.2] \quad b_{12} = a_{21}, \quad a_{30} - 3b_{21} - b_{30} = 0, \quad 3a_{12} = b_{03}, \quad \alpha a_{03} = 2a_{11}$$

Con ciò le [5.2] divengono

$$[6.3] \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha xz + a_{02} y^2 \\ \bar{y} = \alpha yz \\ \bar{z} = z^2 - a_{03} yz \end{cases}$$

Completiamo il riferimento nel piano π prendendo come punto unità l'intersezione di $x=y$ e della conica $\alpha xz + a_{02}y^2 = 0$ corrispondente ad $\bar{x}=0$ ossia appartenente alla rete omaloidica e tangente ad $x=0$ $(\alpha = -a_{02})$.

Su $\bar{\pi}$ prendiamo l'asse $\bar{z}=0$ in modo che la conica $z^2 - a_{03}yz = 0$ corrispondente in π si riduca a $z^2=0$ $(a_{03}=0)$ e il punto unità su $\bar{x}=0$ nel corrispondente del punto unità (111) su π, nella trasformazione quadratica $(\alpha=1)$. Così completati i riferimenti nei due piani si ha per la trasformazione puntuale la forma canonica

$$[6.4]\quad \begin{cases} \bar{x} = x - y^2 + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + [4] \\ \bar{y} = \quad y + (a_{30} - 3b_{21})x^3 + 3b_{21}x^2y + 3a_{21}xy^2 + 3a_{12}y^3 + [4] \end{cases}$$

e i quattro coefficienti $a_{30}, a_{21}, a_{12}, b_{21}$ sono i suoi invarianti proiettivi fino al 3° ordine incluso.

Significato geometrico degli invarianti

Costruiamo ora, come al n. 4, un sistema di invarianti equivalenti ai quattro trovati. La considerazione di elementi trasformati di elementi differenziali noti permette solo di determinare $a_{30}-3b_{21}$ come invariante di contatto di $\bar{y}=(a_{30}-3b_{21})\bar{x}^3$, omologo nelle [6.4] di $y=0$, con $\bar{y}=\bar{x}^3$ e b_{21} come funzione dell'invariante relativo a $\bar{x}=\bar{y}+3b_{21}\bar{y}^3$, corrispondente di $x=y+y^2$ insieme a $\bar{x}=\bar{y}+\bar{y}^3$. Per gli invarianti rimanenti procediamo come al n. 4. All'elemento $\bar{x}=[4]$ corrisponde, per le [6.4] l'E_2 $x=y^2+[4]$ che, proiettato da (010) su $x=0$, dà luogo alla corrispondenza $y'=y+[4]$. Il prodotto di essa e dell'altra $\bar{y}=y+3a_{12}y^3+[4]$, determinata dalle [6.4] dà origine ad una corrispondenza fra gli assi $x=0$, $\bar{x}=0$ approssimata fino al 3° ordine dalla

$$[7.1]\qquad 3a_{12}\bar{y}y^2 + y - \bar{y} = 0$$

analoga della [4.1]: per essa valgono considerazioni analoghe a quelle già fatte. Per ricavare infine un invariante che permetta di determinare a_{21} si consideri l'elemento $x=y+[4]$ e la corrispondenza $\bar{y}=y+(a_{30}+3a_{21}+3a_{12})y^3+[4]$ che viene in conseguenza determinata dalle [6.4] ecc.