ACTA
Vol. VIII - N. 13
pag. 107-118

SUL CALCOLO DEL ROLLIO DI UN GALLEGGIANTE TENENDO CONTO DELL' INERZIA DEL FLUIDO (*)

(Con tre figure)

GIULIO KRALL

SVMMARIVM. — Auctor celebrem Kirchhoffianam (1) investigationem de motu rigidi corporis in fluido, ad determinandam periodum iactationis subaquaneis vel fluitantis navigii vult applicare.

I. — PERMESSA.

È notissimo il calcolo del periodo di rollio di un galleggiante, uno scafo per navi ad esempio. Si ammette che le rotazioni abbiano luogo attorno ad un asse passante per il baricentro delle masse e si procede pressapoco nei termini seguenti: detto Θ *l'angolo di rollio,* I_p il momento polare di inerzia attorno all'asse suddetto, l'energia cinetica $\mathfrak{T}$ è

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} I_p \dot{\Theta}^2 \; ; \tag{1}$$

al crescere di Θ si oppone, nelle condizioni di stabilità qui sottintese, la *coppia di richiamo, Peso* $\mathcal{P}$ *e Spinta,* non coincidenti se $\Theta \neq 0$.

Tale coppia è data da

$$M = -\mathcal{P} \cdot \delta_{M_t} \cdot \sin \Theta$$

essendo δ_{M_t} la *distanza metacentrica trasversale* (cioè la distanza del *metacentro trasversale* M_t dal *baricentro* G *dei pesi*).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 5 aprile 1945.

(1) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mechanik.* XIX Vorlesung. Teubner, Lipsia, 1897.

Non occorre ricordare che se il corpo è totalmente immerso, il metacentro stà nel *centro di carena* con che δ_{M_t} viene ad indicare la distanza δ_c di questo dal baricentro.

Avendosi per l'unica equazione lagrangiana in Θ,

$$[2] \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \Theta} = \mathrm{M}$$

segue immediatamente, attesa l'espressione [1] di $\mathfrak{T}$,

$$[2\,a] \qquad \mathrm{I}_p \ddot{\Theta} + \mathcal{P}\delta_{M_t} \sin\Theta = 0\,.$$

Da questa, per angoli tali per cui si possa confondere Θ con $\sin\Theta$ si ha per il periodo T, la formula nota

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{I}_p}{\mathcal{P}\cdot\delta_{M_t}}}\,.$$

Dopo questi richiami, passiamo allo specifico problema che interessa.

II. — SI CONSIDERA L'INERZIA DEL LIQUIDO.

È noto, ed è intuitivo, che se un corpo rigido si muove in un liquido si genéra in questo un moto ben determinato.

Si può pensare quindi ad una specie di catena cinematica che lega in modo univoco il moto delle masse fluide diffuse al moto del corpo.

Per studiare tale movimento secondo il metodo di LAGRANGE occorre valutare l'energia cinetica $\Delta\mathfrak{T}$ del fluido, espressa nei 6 parametri del corpo rigido, parametri che nella schematizzazione attuale riduciamo ad uno, l'angolo di rollio Θ.

Per conseguire l'intento cominciamo con l'enunciare un classico teorema di KIRCHHOFF (1); il quale consente di affrontare anche sotto aspetti più generali dell'attuale (*rollio e beccheggio* combinati) l'importante questione di cui si tratta.

Se un corpo rigido, che ammettiamo totalmente immerso, si muove in un fluido indefinito: u, v, w; p, q, r sono le 6 caratteristiche della

velocità rispetto a 3 assi ortogonali, solidali, x, y, z; il moto del fluido è retto da un potenziale di velocità Φ, *uniforme e continuo*, soddisfacente in tutte il campo all'equazione

$$\Delta\Phi = 0; \tag{4}$$

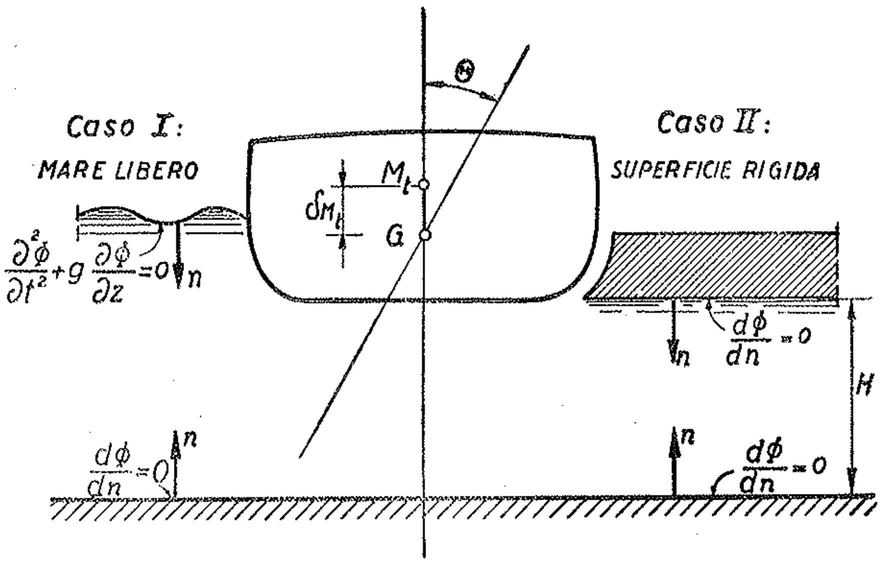

FIG. 1.

sul *contorno* Ω del corpo, alla condizione ovvia di velocità relativa nulla,

$$\frac{d\Phi}{dn} = (u + zq - yr)\cos\widehat{nx} + (v + xr - zp)\cos\widehat{ny} + \\ + (w + yp - xq)\cos\widehat{nz}; \tag{5}$$

ed avente infine, derivate nulle all'infinito.

Il KIRCHHOFF ha dato per Φ una espressione estremamente elegante, precisamente:

$$\Phi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6, \tag{6}$$

i 6 potenziali $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_6$; soddisfacendo in tutto il campo alla [4]; su Ω, alle condizioni

$$[6\,a] \qquad \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dn} &= \cos\widehat{nx}\,, & \frac{d\varphi_4}{dn} &= y\cos\widehat{nz} - z\cos\widehat{ny}\,, \\ \frac{d\varphi_2}{dn} &= \cos\widehat{ny}\,, & \frac{d\varphi_5}{dn} &= z\cos\widehat{nx} - x\cos\widehat{nz}\,, \\ \frac{d\varphi_3}{dn} &= \cos\widehat{nz}\,, & \frac{d\varphi_6}{dn} &= x\cos\widehat{ny} - y\cos\widehat{nx}\,; \end{aligned}$$

all'infinito alla condizione di avere prime derivate nulle. Da tutto ciò appare che i potenziali $\varphi_1, \varphi_2 \dots, \varphi_6$; *non dipendono dal moto specifico ma solo dalla particolare forma del corpo*: questo è un risultato di manifesta importanza.

Noto Φ, l'energia cinetica additiva $\Delta\mathfrak{G}$ si calcola con la relazione

$$[7] \qquad \Delta\mathfrak{G} = \frac{\gamma_a}{2}\int_S \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] dS = -\frac{\gamma_a}{2}\int_\Omega \Phi\frac{d\Phi}{dn}\,d\Omega$$

γ_a essendo la densità specifica del fluido.

In particolare, se $u = v = w = 0$, $q = r = 0$, $p = \dot{\Theta}$, come avviene per uno scafo in rollio, almeno secondo la più semplice schematizzazione,

$$[7\,a] \qquad \Delta\mathfrak{G} = -\frac{\gamma_a\dot{\Theta}^2}{2}\int_\Omega \varphi_6(x\cos\widehat{ny} - y\cos\widehat{nx})\,d\Omega\,.$$

Da qui segue la formola annunciata per il periodo T,

$$[8] \qquad T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{I_\rho - \gamma_a\int_\Omega \varphi_6(x\cos\widehat{ny} - y\cos\widehat{nx})\,d\Omega}{\delta_c\cdot\mathfrak{P}}}$$

con δ_c distanza del *centro di carena* dal *baricentro*, trattandosi, come abbiamo dichiarato, di un corpo totalmente immerso in un fluido infinitamente esteso. Sul calcolo dei potenziali φ per alcuni contorni tipici cfr. KIRCHHOFF, *op. cit.*, XIX Vorl.

III. — CASO DI UN GALLEGGIANTE.

Consideriamo il corpo non più totalmente immerso ma galleggiante. Il campo è allora il cosidetto *semispazio*. Sia $z=0$ il piano limite (*pelo libero*). La condizione per Φ su $z=0$, nel campo esterno alla proiezione ω di Ω, è, come si desume (1) ritenendo piccole le onde superficiali,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0. \tag{9}$$

Al fondo $z=\mathrm{H}$, ove l'altezza H non si possa ritenere praticamente infinita, sicchè al semispazio si sostituisce lo strato indefinito, si avrà infine

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0. \tag{10}$$

Ma qui vogliamo considerare qualche semplificazione. Ammetteremo $\mathrm{H}=\infty$ e, in $z=0$, in luogo della [9], la condizione

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0.$$

Ciò corrisponde al caso del semispazio limitato da un piano rigido, dunque, in superfice ad esempio da un lastrone di ghiaccio indefinito con un foro dove si trova il galleggiante. La condizione sembra alquanto restrittiva, ma intuitivamente vien fatto di pensare – ciò che del resto si può sperimentalmente controllare – che, se in superfice il liquido è solidificato, il rollio non debba molto variare quando una tale circostanza non si verifica. Avendosi dunque, poichè z coincide con la normale n,

$$\frac{d\Phi}{dn}=0$$

su tutto il piano, rimane immutata l'espressione [7] di $\Delta\mathfrak{T}$.

---

(1) Cfr. ad es. G. Krall, «Mecc. tecn. vibrazioni», Vol. II, Cap. IX, § 3. Zanichelli, Bologna, 1940.

Ciò posto, con qualche ulteriore ipotesi semplificativa, il calcolo di Φ riesce molto facilitato. Consideriamo infatti il galleggiante a *fondo piatto* che è tipico per le attuali *carene* e trascuriamo nella definizione di Ω il contributo delle *murate*; identificandola semplicemente con *l'area di galleggiamento* ω. Allora, se pensiamo ω facente parte del piano rigido, per il calcolo di φ_6 siamo condotti a risolvere il *il problema di Neumann* per il semispazio.

Manifestamente per le [6 *a*], le condizioni all'∞ e la condizione esterna ad ω su $z=0$; $\dfrac{d\Phi}{dn}=0$, è $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_4=\varphi_5=0$; per φ_3 e φ_6 invece, si ha

[11] $$\frac{d\varphi_3}{dn}=1\,, \qquad \frac{d\varphi_6}{dn}=\left| x\cos\widehat{ny}-y\cos\widehat{nx}\right|_{z=0}=-y\,.$$

La funzione di Neumann, (cosidetta seconda funzione di Green) per il semispazio S è(1)

$$\Gamma(\mathrm{P},\mathrm{P}')=\frac{1}{r(\mathrm{P\,P'})} \quad \text{essendo} \quad r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

con P′ punto di ω, P punto generico di S. Segue per φ_6,

[12] $$\varphi_6(\mathrm{P})=\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{y(\mathrm{P}')\,d\omega(\mathrm{P}')}{r(\mathrm{P},\mathrm{P}')}$$

e quindi, poichè per essere $w=0$ è nullo il contributo di φ_3, per $\Delta\mathfrak{T}$, calcolato secondo la [7],

[13]
$$\Delta\mathfrak{T}=-\frac{\gamma_a\dot{\Theta}^2}{4\pi}\int_\omega \varphi_6\frac{d\varphi_6}{dn}\,d\omega=+\frac{\gamma_a\dot{\Theta}^2}{4\pi}\iint_\omega \frac{y(\mathrm{P})\,y(\mathrm{P}')\,d\omega(\mathrm{P}')\,d\omega(\mathrm{P})}{r(\mathrm{P},\mathrm{P}')}\,.$$

In conformità con la [8], posto

[14] $$\Delta\mathrm{I}_p=\frac{\gamma_a}{2\pi}\int_\omega\int_\omega \frac{y(\mathrm{P})\,y(\mathrm{P}')\,d\omega(\mathrm{P}')\,d\omega(\mathrm{P})}{r(\mathrm{P},\mathrm{P}')}$$

---

(1) Lord Rayleigh, *Theorie of Sound*, Vol. II, n. 278. London, 1894-1896; M. Picone, *Analisi superiore*, Cap. V, Napoli, 1940.

si ha per T,

[15] $$\mathrm{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(\mathrm{I}_p+\Delta\mathrm{I}_p)}{\mathscr{G}\cdot\delta_{\mathrm{M}_t}}} \; .$$

Le [14] e [15] risolvono il problema proposto.

Si rilevi che $\Delta\mathrm{I}_p$ viene caratterizzato come *autopotenziale* di una distribuzione su un area piana ω di masse proporzionali alla ordinata y, contata normalmente all'*asse del rollio*.

IV. — CALCOLO DELL'INTEGRALE [14] PER UNA SEZIONE DI GALLEGGIAMENTO CIRCOLARE.

Sia R il raggio e $\overline{zz}$ l'asse di rotazione.

Avendosi con riguardo alla figura 2,

$$y(\mathrm{P}') = c\sin\varphi - r\sin(\varphi-\alpha)\,,\quad y = c\sin\varphi$$

segue

[16]
$$\Delta\mathrm{I}_p = \frac{\gamma_a}{2\pi}\int_0^{\mathrm{R}}\int_0^{2\pi} c^2\sin\varphi\, d\varphi\, dc\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha\int_0^{2c\cos\alpha}\big(c\sin\varphi - r\sin(\varphi-\alpha)\big)\,dr = \frac{2}{15}\mathrm{R}^5\gamma_a \; .$$

Il momento di inerzia di una sfera omogenea di densità γ_a, raggio R è notoriamente

$$\mathrm{I} = \frac{8\pi}{15}\mathrm{R}^5\gamma_a \; .$$

Pertanto, l'incremento, dovuto al liquido, dell'inerzia dello scafo risulta $\frac{\pi}{4}$ volte il momento di inerzia della sfera omogenea di raggio R e densità γ_a. Naturalmente, le navi circolari non sono frequenti (sembra ne siano state costruite due sole, da guerra, su progetto dell'Amm. Popoff, in Russia) e tale calcolo va quindi inteso come preliminare.

Occorre dunque saper valutare l'integrale [14] con riguardo alle forme allungate, il menisco, l'ellisse, il rettangolo ecc. Ma per ora

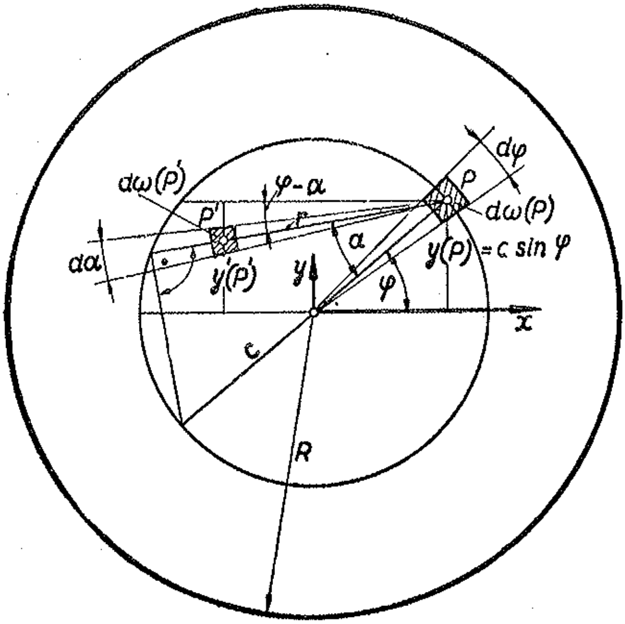

FIG. 2.

lascio aperta la questione limitandomi a suggerire, in mancanza di meglio, una espressione approssimata più che sufficente, che sfrutta il risultato ottenuto per la circonferenza.

Con riguardo alla figura 3 ed alla leggenda corrispondente si ha:

$$\Delta I_p = \frac{2 L^5 \gamma_a}{15} \left(\Sigma_i \rho_i^5 + \frac{15 \pi^2}{2} \Sigma_{kl} \eta_k \eta_l \frac{\rho_k^2 \rho_l^2}{\rho_{kl}} \right), \tag{17}$$

con l'osservazione che ogni coppia (k, l) va considerata una sola volta e, naturalmente con riguardo al segno del prodotto $\eta_k \cdot \eta_l$.

Consideriamo a titolo illustrativo uno scafo di cui la sezione di galleggiamento è riportata in figura 3. Sia $L = 60{,}00\ m$, $2b = 12{,}90\ m$.

Si determinano i cerchi di centro I-II-III-IV-V, che, sommati, danno un'area equivalente.

Assunta come unità la distanza L tra le *perpendicolari*, si esprimono le altre lunghezze in rapporto a questa.

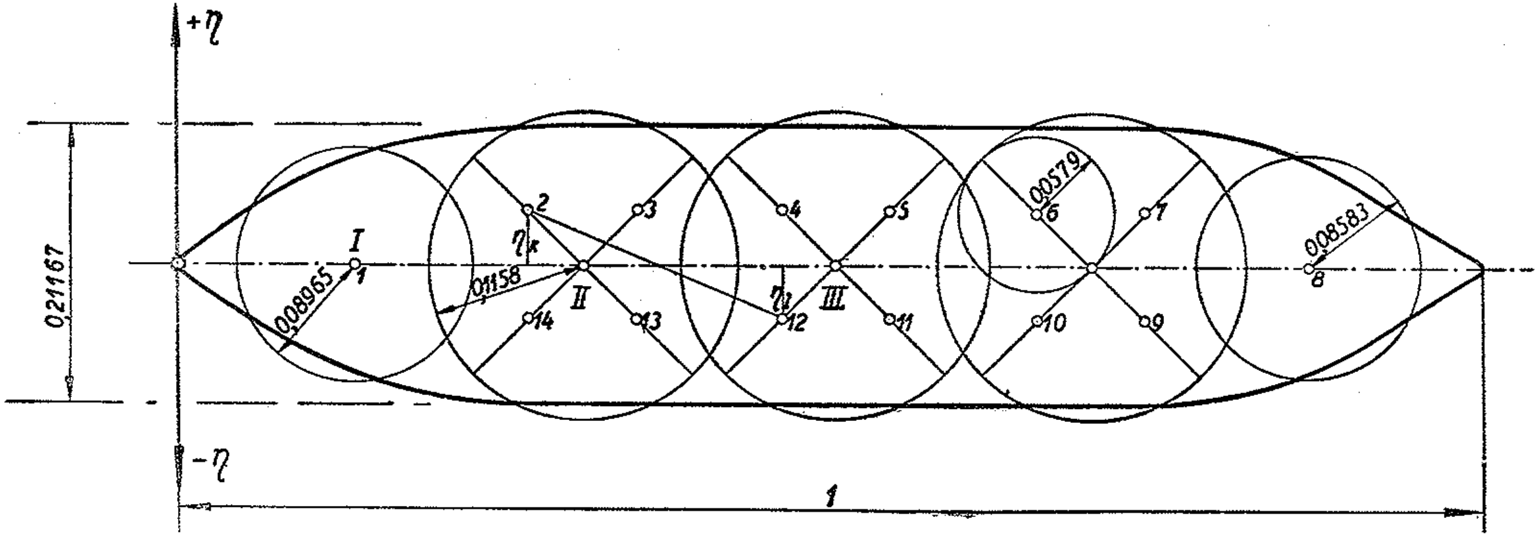

FIG. 3.

L'indice i si riferisce ai centri I, II, III etc. Gli indici k, l si riferiscono ai centri 1, 2, 3 ..... etc. Vale l'osservazione che una coppia (k, l) deve esser formata con 2 numeri non appartenenti allo stesso cerchio di centro i e che, assunta la combinazione (k, l) va esclusa la (l, k). Nel caso specifico infine, attesa la simmetria, si annulla la somma delle combinazioni di 1 ed 8 con gli altri numeri e va considerata la somma dei contributi delle sole combinazioni indicate a pag. 116.

Risulta

$$\rho_I = 0{,}08965$$
$$\rho_{II} = \rho_{III} = \rho_{IV} = 0{,}1158$$
$$\rho_V = 0{,}08583$$
$$\rho_k = \rho_l = {}^1/_2\, \rho_{II} = 0{,}0579$$

e quindi

$$\Sigma_i\, \rho_i^5 = 0{,}08965^5 + 3 \cdot 0{,}1158^5 + 0{,}08583^5 = 72{,}937 \cdot 10^{-6}\ .$$

Nel secondo termine entro parentesi, essendo

$$|\eta_k| = |\eta_l| = 0{,}04094$$

il prodotto $|\eta_k| \cdot |\eta_l|\, \rho_k^2\, \rho_l^2$ è costante e può esser posto a fattor comune nella sommatoria *salvo a contare* $\dfrac{1}{\rho_{kl}}$ *con il segno di* $\eta_k \eta_l$.

Si ha per questo, per qualunque k od l,

$$|\eta_k\, \eta_l|\, \rho_k^2\, \rho_l^2 = 18{,}843 \cdot 10^{-9}\ .$$

Quindi l'espressione di ΔI_p si semplifica come segue:

$$\Delta I_p = \frac{2 L^5 \gamma_a}{15} \left(\Sigma_i\, \rho_i^5 + \frac{15 \pi^2}{2}\, |\eta_k\, \eta_l|\, \rho_k^2\, \rho_l^2\, \Sigma_{kl} \frac{1}{\rho_{k_l}} \right)\ .$$

Per le distanze ρ_{kl} sono state considerate le seguenti combinazioni

2 (4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12)	;	3 (4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12)
4 (6, 7, 9, 10, 13, 14)	;	5 (6, 7, 9, 10, 13, 14)
6 (11, 12, 13, 14)	;	7 (11, 12, 13, 14)
9 (11, 12, 13, 14)	;	10 (11, 12, 13, 14)
11 (13, 14)	,	13 (13, 14) .

Risulta, tenendo riguardo al segno di $\eta_k \cdot \eta_l$,

$$\Sigma_{kl} \frac{1}{\rho_{kl}} = 11{,}3306$$

e quindi:

$$\frac{15\pi^2}{2}\, |\eta_k\, \eta_l|\, \rho_k^2\, \rho_l^2\, \Sigma \frac{1}{\rho_{kl}} = 73{,}947 \cdot 18{,}843 \cdot 10^{-9} \cdot 11{,}3306 = 16{,}904 \cdot 10^{-6}\ .$$

Essendo inoltre per l'acqua di mare, $g\gamma_a = 1{,}027\ to\ m^{-3}$,

$$\frac{5\,L^5\gamma_a}{15} = \frac{2\cdot 60^5\cdot 1{,}027}{15\cdot g} = 10647{,}94\cdot 10^4\cdot\frac{1}{g}$$

si ricava quindi

$$g\cdot\Delta I_p = 10{,}65\cdot 10^7\cdot(72{,}937+15{,}789)\cdot 10^{-6} =$$
$$= 10{,}65\cdot 88{,}73\cdot 10 = 9450\ to\ m^2\ .$$

Per la nave allestita e in pieno carico si hanno i seguenti dati di progetto

$$I_p\cdot g = 24500\ to\cdot m^2 \qquad \mathcal{S} = 1623\ to$$
$$\delta_{M_t} = 1{,}20\ m\ .$$

Si ha in conformità

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_p}{\mathcal{S}\cdot\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{24500}{9{,}81}}{1623\cdot 1{,}20}} = 7{,}11\ \text{sec.}\ .$$

Tenendo conto dell'inerzia del liquido

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_p+\Delta I_p}{\mathcal{S}\cdot\delta_{M_t}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{24500+9450}{9{,}81}}{1623\cdot 1{,}20}} = 8{,}38\ \text{sec.}\ .$$

In una memoria seguente si studia con questi concetti il fondamentale problema delle vibrazioni elastiche di uno scafo per navi.