ACTA
Vol. VIII - N. 14
pag. 119-130

SOPRA ALCUNI SISTEMI DIFFERENZIALI A SOLUZIONI SENSIBILMENTE COSTANTI (*)

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Peculiaria quaedam systemata aequationum differentialium perpenduntur, quarum coefficientia sint parametra adiabatica, vel functiones temporis quibusdam condicionibus obnoxiae. Ostendit Auctor solutiones nutantes esse, easque plerumque posse libere adhiberi, quovis tempore, primigeniis quantitatibus proximas.

§ 1. POSIZIONE DEL PROBLEMA. – Nello studio dei fenomeni giroscopici (1) mi è avvenuto di ricavare, per le soluzioni di particolari sistemi differenziali alcune proprietà, attraverso ragionamenti piuttosto intuitivi il cui filo conduttore veniva fornito da suggerimenti di natura fisica. Mi è sembrato opportuno ritornare sull'argomento per darne qui una trattazione più soddisfacente, quale merita l'importanza di quel problema meccanico.

Consideriamo il sistema differenziale:

$$[1] \qquad \frac{dx_r}{k \sum_{s=1}^{n} \lambda_{rs} x_s + \varepsilon_s} = dt \qquad (r=1, \dots n)\,,$$

dove $\lambda_{rs}\, \varepsilon_s$ dapprima, supposto $k=1$, sono pensati come parametri adiabatici; un'altra volta, supposto il parametro k grande a piacere, sono pensati come funzioni generiche, regolari del tempo.

(*) Nota presentata dell'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini il 30 gennaio 1945.

(1) Cfr. Note da I a IV: P. TEOFILATO, *Sui vincoli indotti e autoindotti*, (« Atti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari », 1939).

In entrambi i casi sussistono le seguenti ipotesi:

Si abbia anzitutto:

[2] $$\lambda_{11} + \lambda_{22} + \ldots + \lambda_{nn} = 0 \ ,$$

per cui il sistema [1] sia del LIOUVILLE.

L'equazione secolare:

[3] $$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - u & \lambda_{12} & \ldots \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - u & \ldots \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots \lambda_{nn} - u \end{vmatrix} = 0$$

ammetta m radici nulle e tanto la matrice che il determinante seguenti:

[4] $$\begin{vmatrix} \lambda_{11}\,\lambda_{12} \ldots \lambda_{1n}\,\varepsilon_1 \\ \lambda_{21}\,\lambda_{22} \ldots \lambda_{2n}\,\varepsilon_2 \\ \cdots \\ \lambda_{n1}\,\lambda_{n2} \ldots \lambda_{nn}\,\varepsilon_n \end{vmatrix} \ , \qquad \begin{vmatrix} \lambda_{11}\,\lambda_{12} \ldots \lambda_{1n} \\ \lambda_{21}\,\lambda_{22} \ldots \lambda_{2n} \\ \cdots \\ \lambda_{n1}\,\lambda_{n2} \ldots \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

abbiano lo stesso rango $n-m$; inoltre le altre radici u dell'equazione [3] siano semplici ed immaginarie pure (a due a due coniugate).

Ci proponiamo di dimostrare:

A) che per $k=1$ ed $\lambda_{rs}\,\varepsilon_r$ parametri adiabatici, tutte le x_i si conservano sempre limitate, quando tali restano i coefficienti $\lambda_{rs}\,\varepsilon_r$. Inoltre, nel caso sia $n = m+2$, tutte le x_i, pur oscillando, si possono mantenere vicine ai rispettivi valori iniziali (cioè sensibilmente costanti) malgrado la variazione adiabatica dei coefficienti delle equazioni [1].

B) che quando invece k è grande a piacere e $\lambda_{rs}\,\varepsilon_r$ sono funzioni generiche del tempo t, le soluzioni di [1] (oscillanti e tanto più frequentemente quanto maggiore è il parametro k), col crescere indefinito di k tendono verso soluzioni le quali godono delle stesse due proprietà enunciate per il caso *A*); purchè λ_{rs}, ε_r soddisfacciano soltanto alla condizione del LIPSCHITZ:

$$|\lambda(t_2) - \lambda(t_1)| < \mathrm{M}\,|t_2 - t_1| \ ,$$

con M indipendente da t.

§ 2. LIMITAZIONE DELLE SOLUZIONI. – Supponiamo in primo luogo che nelle [1] i coefficienti λ_{rs}, ε_r siano costanti e si assuma $k=1$ (caso A). Con i primi n rapporti delle [1] forniamo il primo membro della equazione seguente:

[5] $$\frac{d(\sum \alpha_s x_s)}{x_1 \sum\limits_s \lambda_{s1}\alpha_s + \dots + x_n \sum \lambda_{sn}\alpha_s + \sum \alpha_s \varepsilon_s} = dt\,,$$

dove le costanti α_s si scelgono in modo che sia:

[6] $$\begin{gathered} \sum \lambda_{s1}\alpha_s = u\,\alpha_1 \\ \sum \lambda_{s2}\alpha_s = u\,\alpha_2 \\ \cdots\cdots \\ \sum \lambda_{sn}\alpha_s = u\,\alpha_n\,. \end{gathered}$$

Ne risulta che u deve soddisfare l'equazione [3] e quindi per u vi saranno m valori nulli in relazione ai quali corrispondono m sistemi di valori per $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$, che si ottengono assegnando ad esempio $\alpha_{n-m+1}\dots\alpha_n$ a piacere e desumendo poi $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$ dalle equazioni:

$$\begin{gathered} \lambda_{1,m+1}\alpha_1 + \dots + \lambda_{n-m,m+1}\alpha_{n-m} = -\lambda_{n-m+1,m+1}\alpha_{n-m+1} - \dots - \lambda_{n,m+1}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{1,n}\alpha_1 + \dots + \lambda_{n-m,n}\alpha_{n-m} = -\lambda_{n-m+1,n}\alpha_{n-m+1} - \dots - \lambda_{n,n}\alpha_n\,. \end{gathered}$$

Così, nei riguardi delle α che figurano nei secondi membri, una volta le assegneremo tutte nulle meno α_{n-m+1}, un'altra tutte nulle salvo α_{n-m+2}, e così via, ottenendo in tal modo le m determinazioni delle α.

Consideriamo la matrice:

[7] $$\left\| \begin{matrix} \lambda_{1,m+1} \cdots\cdots \lambda_{n,m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{1,n} \;\; \cdots\cdots \lambda_{n,n} \end{matrix} \right\|$$

ad n colonne ed $n-m$ righe, formata disponendo orizzontalmente le ultime $n-m$ colonne della seconda delle matrici [4]. Indichiamo con:

$$D_{n-m+r,k} \qquad (r=1,\dots m)$$

il determinante che si ottiene prendendo le prime $n-m$ colonne della [9], sopprimendovi la h^{ma} e sostituendo al posto di questa la colonna $(n-m+r)^{ma}$, cioè una tra le ultime m colonne della [9]; infine applicandovi il fattore $(-1)^h$. Significheremo poi con D_{n-m} il determinante formato con le prime $n-m$ colonne. Avremo così le m determinazioni, ciascuna contraddistinta dall'apice:

[8]
$$\alpha_1^{(r)} = -\frac{D_{n-m+r,\,1}}{D_{n-m}}\,,\ \dots,\ \alpha_{n-m}^{(r)} = (-1)^{n-m}\frac{D_{n-m+r,\,n-m}}{D_{n-m}}$$
$$\alpha_{n-m+s}^{(r)} = \left\{\begin{matrix} 0 & \text{per} & r \neq s \\ 1 & \text{»} & r = s \end{matrix}\right\} s = 1, 2, \dots m$$
$$(r = 1, 2 \dots m)$$

D'altra parte la [5] fornisce in virtù delle [6]:

[9]
$$\frac{d\sum_{s=1}^{n}\alpha_s x_s}{u\sum_{s=1}^{n}\alpha_s x_s + \sum_{s=1}^{n}\alpha_s \varepsilon_s} = dt\,.$$

Quando è $u=0$, tenute presenti le [6] (che in tal caso diventano omogenee) e l'ipotesi fatta circa il rango delle due matrici [4], si ha:

$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_s \varepsilon_s = 0\,.$$

Segue allora dalla [9], per $u=0$:

[10]
$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_s^{(r)} x_s = \text{costante}\,,$$

la quale in base alle [8] diventa:

[11]
$$-D_{n-m+r,\,1}\,x_1 + D_{n-m+r,\,2}\,x_2 - \dots + (-1)^{n-m} D_{n-m+r,\,n-m}\,x_{n-m} + D_{n-m}\,x_{n-m+r} = C_r$$
$$(r = 1, \dots m)$$

dove C_r è una costante arbitraria.

Invece, in corrispondenza dei valori u non nulli, che per ipotesi sono radici semplici dell'equazione secolare, si ricavano dalle [6] le quantità $\alpha_1 \dots \alpha_n$ proporzionali (anzi addirittura si possono prendere eguali) ai minori della prima colonna del determinante [3].

Indicando questi minori rispettivamente con $A_{11}^{(\sigma)} A_{21}^{(\sigma)} \dots A_{n1}^{(\sigma)}$, dove l'apice σ indica che essi sono funzioni della radice u_σ generica, non nulla, dell'equazione secolare, avremo in luogo della [5]:

$$\frac{d \sum_{s=1}^{n} A_{s1}^{(\sigma)} x_s}{u_\sigma \sum_{s=1}^{n} A_{s1}^{(\sigma)} x_s + \sum_{s=1}^{n} A_{s1}^{(\sigma)} \varepsilon_s} = dt ,$$

ovvero:

$$\sum A_{s1}^{(\sigma)} x_s = \frac{1}{u\sigma} \left[C_\sigma e^{u_\sigma t} - \sum A_{s1}^{(\sigma)} \varepsilon_s \right] \qquad (\sigma = m+1, \dots n) \tag{12}$$

dove le C_σ sono arbitrarie, ma a due a due complesse coniugate.

Le [11] sono m equazioni, le [12] sono $n - m$; in totale n equazioni lineari non omogenee nelle $x_1 \dots x_n$, le quali, attesa l'ipotesi fatta circa le radici u_σ (immaginarie pure o nulle) ci assicurano che $x_1 x_2 \dots x_4$ resteranno sempre limitate, anche durante la variazione adiabatica dei coefficienti $\lambda_{rs} \varepsilon_r$. Viene così confermato quanto forma l'oggetto del titolo del presente paragrafo.

§ 3. Caso di $m = 0$, $n = 2$. – Questo caso ci interessa per una conseguenza della quale dobbiamo trarre partito in seguito. Supponiamo dunque di avere due sole variabili $x_1 x_2$, per modo che l'equazione secolare, diventando di secondo grado, ammette le uniche due radici:

$$u = \pm \rho i \ (\rho \text{ reale}) .$$

Notiamo però che affinchè questo sia verificato, come è richiesto dall'ipotesi fondamentale del § 1, occorre che sia:

$$\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21} = \rho^2 > 0 ,$$

ovvero, in virtù della condizione del LIOUVILLE:

$$-\lambda^2_{22} > \lambda_{12}\lambda_{21} \,.$$

Tanto basta per concludere che λ_{12} e λ_{21} non possono mai annullarsi.

D'altra parte adattando le [12] al caso che stiamo trattando nel presente paragrafo e moltiplicandole fra loro, si ottiene:

$$\left[A_{11}^{(1)}\left(x_1+\frac{\varepsilon_1}{u_1}\right)+A_{21}^{(1)}\left(x_2+\frac{\varepsilon_2}{u_1}\right)\right]\left[A_{11}^{(2)}\left(x_1+\frac{\varepsilon_1}{u_2}\right)+\right.$$

$$\left.+A_{21}^{(2)}\left(x_2+\frac{\varepsilon_2}{u_2}\right)\right]=|C_2|^2:\rho^2=\text{costante}\;,$$

ovvero, ricordando il significato delle $A_{s1}^{(\sigma)}$:

$$(\lambda_{22}x_1-\lambda_{12}x_2-\varepsilon_1)^2+\left(\rho x_1+\lambda_{22}\frac{\varepsilon_1}{\rho}-\lambda_{12}\frac{\varepsilon_2}{\rho}\right)^2=|C_2|^2:\rho^2 \;.$$

Quest'ultima è l'equazione di una ellisse che non può mai essere straordinariamente schiacciata (cioè non può avere dei semi assi il cui rapporto sia infinitesimo) perchè all'uopo occorrerebbe l'evanescenza di λ_{12} (oppure di λ_{21}) che abbiamo veduto essere impossibile a causa dell'ipotesi circa la natura delle radici dell'equazione secolare. Siffatta peculiarità dell'ellisse verrà appunto sfruttata nel seguito.

§ 4. RIDUZIONE DEL NUMERO DELLE VARIABILI E NUOVA CONDIZIONE DEL LIOUVILLE. – Dalla prima delle [11] si può ricavare x_{n-m+1}, dalla seconda x_{n-m+2}, ecc.; dalla m^{ma} la x_n; tutte in funzione lineare delle prime $n-m$ delle x, da x_1 ad x_{n-m}. Ma allora dal sistema differenziale [1] potremo eliminare le ultime x, da x_{n-m+1} ad x_n ottenendo:

[13]

$$\frac{dx_r}{\varepsilon_r+\lambda_{r1}x_1+\ldots+\lambda_{r,n-m}x_{n-m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_{r,n-m+k}}{D_{n-m}}[C_k+D_{n-m+k,1}x_1+\ldots+(-1)^{n-m}D_{n-m+k,n-m}x_{n-m}]}=$$

$$=dt \qquad (r=1,2,\ldots n-m)\;.$$

Riguardo a questo nuovo sistema differenziale, importa osservare, per l'applicabilità del teorema di Gibbs-Hertz sugli invarianti adiabatici, che la condizione del Liouville è qui ancora soddisfatta.

Difatti questa condizione nei riguardi del sistema [13] implicherebbe che si avesse:

$$\sum_{r=1}^{n-m}\left[\lambda_{rr}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_{r,\,n-m+k}}{D_{n-m}}(-1)^{1+r}D_{n-m+k,\,r}\right]=0\ ,$$

ovvero, per la [2]:

$$14]\qquad \sum_{k=1}^{m}\left[-\lambda_{n-m+k,\,n-m+k}D_{n-m}+\sum_{r=1}^{n-m}(-1)^{1+r}\lambda_{r,\,n-m+k}D_{n-m+k,\,r}\right]=0\ .$$

D'altra parte si consideri il determinante $n-m+1$ seguente, che è nullo a causa dell'ipotesi circa il rango della matrice [4]:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda_{1,\,n-m+k} & \lambda_{2,\,n-m+k} & \ldots\ldots & \lambda_{n-m,\,n-m+k}\,, & \lambda_{n-m+k,\,n-m+k}\\ \lambda_{1,\,m+1} & \lambda_{2,\,m+1} & \ldots\ldots & \lambda_{n-m,\,m+1}\,, & \lambda_{n-m+k,\,m+1}\\ \lambda_{1,\,m+2} & \lambda_{2,\,m+2} & \ldots\ldots & \lambda_{n-m,\,m+2}\,, & \lambda_{n-m+k,\,m+2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{1,\,n} & \lambda_{2,\,n} & \ldots\ldots & \lambda_{n-m,\,n}\,, & \lambda_{n-m+k,\,n}\end{vmatrix}=0\ .$$

Sviluppandolo secondo gli elementi della prima linea si ottiene proprio l'espressione che è nella parentesi quadrata della [14] e pertanto la [14] è identicamente soddisfatta. Il sistema [13] è dunque effettivamente del Liouville, risultato questo che del resto era prevedibile. Basti pensare, soffermandoci al caso delle tre sole variabili $x_1\,x_2\,x_3$, che la prima delle [11] significa che le linee di corrente del moto fluido (incompressibile) individuato dal sistema di Liouville [1], giacciono in piani paralleli:

$$-D_{3,1}\,x_1+D_{3,2}\,x_2-D_3\,x_3=C_1\ .$$

Pertanto due piani di questo fascio, infinitamente vicini, formano un intercapedine nel quale si effettua il movimento dello strato. Allora, a causa dell'invarianza di volume, ne segue che non varia l'area della

base del cilindro fluido le cui due basi scorrono deformandosi rispettivamente sopra i due piani.

La proiezione sul piano $x_1 x_2$ di questa base variabile ha dunque un'area costante, il che significa appunto che è verificata la condizione del LIOUVILLE anche per il sistema differenziale ottenuto dopo effettuata l'eliminazione di x_3.

§ 5. CASO DI $m=n-2$ E PROSSIMITÀ DELLE SOLUZIONI AI VALORI INIZIALI. - Supporremo che nei riguardi del sistema [1] si abbia $m=n-2$, onde l'equazione secolare abbia $n-2$ radici nulle e inoltre le altre due radici:

$$u_1 = \rho i\,, \quad u_2 = -\rho i \qquad (\rho \text{ reale})\ .$$

In virtù delle [12] avremo, corrispondentemente a queste due radici non nulle, due equazioni analoghe alle [12], che moltiplicate tra loro daranno:

$$\left[\sum A_{s1}^{(1)}\left(x_s + \frac{\varepsilon_s}{u_1}\right)\right] \cdot \left[\sum A_{s1}^{(2)}\left(x_s + \frac{\varepsilon_s}{u_2}\right)\right] = |C_n|^2 : \rho^2\ . \tag{15}$$

D'altra parte, per essere $A_{s1}^{(1)}$, coniugato di $A_{s1}^{(2)}$ potremo porre:

$$A_{s1}^{(1)} = a_s + ib_s\,, \quad A_{s1}^{(2)} = a_s - ib_s\,,$$

per modo che la [15] diventerà:

$$\left[\sum\left(a_s x_s + \frac{b_s}{\rho}\,\varepsilon_s\right)\right]^2 + \left[\sum\left(b_s x_s - \frac{a_s}{\rho}\,\varepsilon_s\right)\right]^2 = |C_n|^2 : \rho^2\ , \tag{16}$$

dove i coefficienti della x_s sono indipendenti dalle ε_s.

Dalle $m = n-2$ equazioni [11], i cui coefficienti sono indipendenti dalle ε_s, ricaviamo $n-2$ delle x_s in funzione delle due restanti, ad esempio $x_i\ x_j$ e sostituiamo nella [16]. Avremo un'equazione del tipo:

$$(L_{ij}\, x_i + M_{ij}\, x_j + N_{ij})^2 + (P_{ij}\, x_i + Q_{ij}\, x_j + R_{ij})^2 = |C_n|^2 : \rho^2\ , \tag{17}$$

dove $L_{ij}\ M_{ij}\ N_{ij}\ P_{ij}\ Q_{ij}\ R_{ij}$ sono funzioni razionali intere delle λ_{rs} (soltanto $N_{ij}\ R_{ij}$ dipendono anche dalle ε_s, linearmente). Pertanto i coefficienti della [17] sono funzioni regolari dei parametri adiabatici e possono i coefficienti stessi riguardarsi come variabili adiabatiche.

La [17] poi è integrale del sistema differenziale in $x_i\ x_j$ che si ottiene da [1] mediante eliminazione di tutte le altre x_s a mezzo degli $n-2$ integrali lineari [11] indipendenti dal tempo t.

Per quanto abbiamo osservato al paragrafo precedente a proposito del sistema [13], la condizione del Liouville è soddisfatta per il sistema relativo alle uniche variabili $x_i\ x_j$, or ora accennato, ed allora, tenuto presente che la [17] rappresenta una linea chiusa (ellisse) possiamo applicare il teorema di Gibbs-Hertz ed affermare in conseguenza che l'area racchiusa dall'ellisse è un invariante adiabatico e pertanto sempre piccola, se inizialmente piccola.

Tenuto conto poi che l'ellisse lungo la quale corre il punto $x_i\ x_j$ non è allungata (cfr. § 3°) per cui i semiassi sono fra loro in rapporto finito e sono entrambi dell'ordine di $|C_n|^2$, quantità che si può assumere piccola a piacere, sarà lecito concludere che $x_i\ x_j$ si conservano sempre prossime al rispettivo valore iniziale.

Ma noi possiamo assumere $i\,j$ a piacere fra gli indici da 1 ad n ed allora ci sarà lecito affermare che tutte le variabili $x_1 \ldots x_n$ si conservano sempre prossime ai rispettivi valori iniziali, con approssimazione regolabile a piacere.

§ 6. Coefficienti dipendenti dal tempo e dal parametro k. — Passiamo ad esaminare finalmente il sistema [1] nel caso B) citato al § 1.

Introducendo il *tempo fittizio* τ, tale che:

$$\tau = kt,$$

la [1] diventa:

$$[19] \qquad \frac{dx_r}{\sum_s \lambda_{rs}\left(\frac{\tau}{k}\right)\cdot x_r + \frac{1}{k}\,\varepsilon_r\left(\frac{\tau}{k}\right)} = d\tau \qquad (r=1, \ldots n)$$

Se λ_{rs} ε_r fossero costanti, ferme restando a loro riguardo le ipotesi del § 1, le soluzioni asintotiche del sistema, per k crescente indefinitivamente, avrebbero, rispetto al tempo fittizio τ, i periodi $\frac{2\pi}{u}$, dove u sono radici della [3] immaginarie pure e indipendenti dal parametro k, mentre rispetto al tempo reale t i periodi sarebbero $\frac{2\pi}{ku}$.

Per la supposta condizione del Lipschitz, avremo:

$$\left|\lambda_{rs}\left(\frac{\tau_2}{k}\right)-\lambda_{rs}\left(\frac{\tau_1}{k}\right)\right| < \mathrm{M}\left|\frac{\tau_2-\tau_1}{k}\right|,$$

per modo che, scelto k grande a piacere ed assunto per il tempo fittizio τ un incremento al più dell'ordine di $\sqrt{k}$, quale sarebbe ad esempio:

$$|\tau_2-\tau_1| \leqslant \sqrt{k},$$

l'incremento corrispondente subito da λ_{rs} sarebbe molto piccolo, dell'ordine cioè di $1/\sqrt{k}$. Ma allora ben a ragione il comportamento delle λ_{rs} (e altrettanto dicansi delle ε_r) può considerarsi adiabatico durante il tempo fittizio $\sqrt{k}$ che è grande quanto si vuole rispetto ai tempi periodici $\frac{2\pi}{u}$ sopra accennati.

Nel caso che sia $m=n-2$, potremo allora trasportare al sistema [19] tutti i risultati del paragrafo precedente e concludere che, tutte le x_s si possono mantenere prossime quanto si vuole ai valori iniziali, quando si disponga opportunamente della sola arbitraria C_n. La prossimità ai valori iniziali è data difatti esclusivamente dalla piccolezza dell'area delle ellissi su citate e l'area, a sua volta, come dimostra la [17], è proporzionale a $|\mathrm{C}_n|^2$, con un coefficiente di proporzionalità che, nel caso del sistema [19], dipende esclusivamente dalle λ_{rs}, non già dalle ε_r nè da k. Questa indipendenza dell'area dal parametro k, dal quale invece esclusivamente dipende la durata $\sqrt{k}$ nella quale sono valide le conclusioni del paragrafo precedente, ci permette di iterare il ragionamento partendo anzichè dall'istante iniziale τ_0, dall'istante $\tau_1=\tau_0+\sqrt{k}$ per arrivare all'istante $\tau_2=\tau_1+\sqrt{k}$, e così via. Con ciò la tolleranza

nei riguardi dell'approssimazione ai valori iniziali richiederà limiti sempre più ampi fintantochè, ogni volta che si estende nel modo sopra indicato la durata, non si provvede ad assumere $|C_n|$, che è indipendente da k, man mano minore. Si vede allora che disponendo anche di $|C_n|$, si può iterare il ragionamento per un numero di volte grande quanto si vuole e quindi contemplare una durata grande a piacere.

§ 7. Osservazione sulla limitazione delle soluzioni. – Tornerà utile la seguente osservazione: in luogo del sistema [1] consideriamo l'altro, a coefficienti adiabatici:

$$[20] \qquad \frac{dy_r}{k \sum_s \lambda_{rs} y_s + \varepsilon_r + \eta_r} = dt \quad \text{ovvero} \quad \frac{dy_r}{\sum \lambda_{rs} y_s + \frac{\varepsilon_r}{k} + \frac{\eta_r}{k}} = d\tau \ ;$$

dove le η_r, quando con esse si orli la matrice $\|\lambda_{ij}\|$, formino con le λ_{ij} una matrice rettangolare non più avente lo stesso rango di $\|\lambda_{ij}\|$, come invece accade per la prima delle [4], dove l'orlo è fatto con le ε_r.

In tal caso le y_r non sono più limitate, come subito si vede. Infatti la [9] sarà sostituita dall'altra

$$[21] \qquad \frac{d \sum \alpha_s y_s}{u_r \sum \alpha_s y_s + \sum \alpha_s \frac{\varepsilon_s}{k} + \sum \alpha_s \frac{\eta_s}{k}} = d\tau$$

che per $u_r = 0$ fornisce:

$$[22] \qquad \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^{(r)} y_s = \frac{\tau}{k} \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^{(r)} \eta_s + C_r \qquad (r = 1, \dots m)$$

mentre per $u \neq 0$, fornisce:

$$[23] \qquad \sum_{s=1}^{n} A_{s1}^{(\sigma)} y_s = \frac{1}{u_\sigma} \left[C_\sigma e^{u_\sigma t} - \sum_{s=1}^{n} \frac{A_{s1}^{(\sigma)}}{k} (\varepsilon_s + \eta_s) \right]$$

$$(\sigma = m+1, \dots n) \ .$$

Le y_s ricavate dalle [22] e [23], contenendo termini lineari in t, quali figurano nelle [22] non potranno conservarsi limitate.

Che se poi le η_r, a differenza delle λ_{rs} e delle ε_r non si potessero più riguardare come adiabaticamente variabili col tempo e quindi non più costanti almeno per un tempo sufficientemente lungo, allora, pensando nella [21] $\eta_s = \eta_s(\tau)$, denotate con x_s le soluzioni corrispondenti ad $\eta_r = 0$, espresse come si vede facilmente nella forma:

$$[24] \qquad x_s = B_s + \sum_{\sigma=m+1}^{n} H_{\sigma,s} e^{u_\sigma \tau} \quad ,$$

le y_s saranno del tipo:

$$[25] \qquad y_s = x_s + \frac{1}{k} \sum_{r=1,\, q=1}^{n} G_{r,q} \int^{\tau} e^{u_r(\tau-\tau_1)} \eta_q \, d\tau_1$$

dove $u_r = 0$ per $r \leqslant m$, e B_s, $H_{\sigma,s}$, G_{rq} sono variabili adiabatiche.

Ci varremo di questi risultati in una nota successiva (1).

---

(1) Cfr. P. Teofilato, *Caratteri giroscopici derivanti da valori iniziali sufficientemente grandi delle velocità ignorabili.* (Vedi « Acta », n. 19).