ACTA
Vol. VIII. - N. 19
pag. 157-176

CARATTERI GIROSCOPICI DERIVANTI DA VALORI INIZIALI SUFFICIENTEMENTE GRANDI DELLE VELOCITÀ IGNORABILI (*)

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Auctor demonstrat systemati conservativo, in quo parametra exstent quae ignorari possint, posse conferri opportune selectis originariis condicionibus, motum gyroscopicum, scilicet in quo coordinatae apparentes parvae sint.

§ 1. ENUNCIAZIONE DELL'ARGOMENTO. – Nella nota (1) che ha preceduto la presente, ho premesso alcune considerazioni analitiche necessarie all'esame rigoroso di un problema meccanico da me trattato qualche tempo addietro (2) e che ora mi sono proposto di riprendere per fondare quei risultati, che già trovai, sopra basi più sicure, e nel contempo per completarli.

Il problema riguarda i sistemi meccanici ad N gradi di libertà, nei quali figurano x coordinate *ignorabili* $q_1\, q_2 \ldots q_x$, ed y coordinate *appariscenti* $Q_1\, Q_2 \ldots Q_y$; $(x + y = N)$. Dimostrerò anzitutto che esistono $xy = n$ particolari funzioni F_{mr} $(m = 1, \ldots y;\ r = 1, \ldots x)$ dipendenti soltanto dalle coordinate appariscenti Q e loro derivate temporali Q' (queste ultime contenute linearmente) le quali, previa opportuna scelta delle

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini il 15 febbraio 1945.

(1) P. TEOFILATO, *Sopra alcuni sistemi differenziali a soluzioni sensibilmente costanti*, « Acta », Pontificia Academia Scientiarum, Vol. VIII, n. 14.

(2) P. TEOFILATO, *Sopra i vincoli indotti e autoindotti*, « Rendiconti del Seminario della Università di Cagliari », Note da I a IV, 1939.

condizioni iniziali (tra l'altro assunzione di velocità ignorabili sufficientemente grandi) si conservano in valore assoluto convenientemente piccole. E poichè la linearità delle F_{mr} rispetto alle velocità Q' permette in generale di esprimere le Q' in funzione lineare delle F, si ha per conseguenza agio di concludere che anche le Q' si possono conservare in valore assoluto convenientemente piccole.

Ma la piccolezza delle velocità appariscenti è appunto una condizione che conferisce al movimento un carattere giroscopico, e noi verificheremo come esempio alla fine di questa nota, l'attuarsi della condizione nel caso di un girostato armato di più giroscopi.

§ 2. Equazioni del problema e loro particolarità. — Sia T la forza viva del sistema, la quale si esprimerà per mezzo delle coordinate ignorabili e appariscenti nel modo seguente:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{rs} \left[a_{rs} q'_r Q'_s + \sum_{rs} b_{rs} q'_r q'_s + \sum_{rs} c_{rs} Q'_r Q'_s \right]$$

con a, b, c funzioni delle sole Q. Le equazioni lagrangiane nelle q forniranno subito gli integrali primi:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_r} = k\gamma_r \; (r = 1, \ldots x), \; (k, \gamma_r \text{ costanti}) \tag{[1]}$$

dove, essendo il primo membro lineare nelle q', Q', la costante positiva k (tenute ferme le γ_r) risulterà tanto maggiore quanto più grandi inizialmente saranno scelte le velocità ignorabili.

L'eliminazione delle coordinate ignorabili a mezzo delle [1] dalle restanti equazioni lagrangiane, che sono quelle relative alle coordinate appariscenti Q, conduce ad un sistema di y equazioni (1) del tipo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial Q'_m} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial Q_m} + \frac{\partial A}{\partial Q_m} + k \sum_r \gamma_r F_{mr} = \frac{\partial U}{\partial Q_m} \qquad (m = 1, \ldots y) \tag{[2]}$$

dove:

1°) $\mathfrak{T}$ è indipendente dalle costanti $k\gamma_r$ ed è funzione quadratica delle Q':

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_{rs} c_{rs} Q'_r Q'_s - \frac{1}{2} \sum_{vr} \left(\sum_s a_{rs} Q'_s \right) \left(\sum_{s_1} a_{vs_1} Q'_{s_1} \right) B_{vr}$$

(1) Lord Kelvin, *Treatise of Natural Philosophy*. I, pag. 322 e seg.

avendo indicato con $B_{\nu r}$ gli elementi della matrice inversa della matrice $\|b_{rs}\|$ formata con i coefficienti b_{rs} che figurano nell'espressione di T sopra indicata. Evidentemente la matrice:

$$[3] \qquad \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial Q'_m \, \partial Q'_m} \right\| \quad \text{è simmetrica}$$

essendo $\mathfrak{T}$ quadratica nelle Q'.

2°) A è funzione quadratica delle $k\gamma_r$, con coefficienti dipendenti dalle sole Q e non dalle Q':

$$A = \frac{1}{2} \sum_{\nu r} k^2 \gamma_\nu \gamma_r B_{\nu r}$$

3°) Le F_{mr}, in conformità di quanto si è specificato nel paragrafo precedente, sono date da:

$$[4] \qquad F_{mr} = \sum_{s=1}^{y} D_{mrs} Q'_s$$

con le D_{mrs} espresse da:

$$[5] \qquad D_{mrs} = \frac{\partial M_{mr}}{\partial Q_s} - \frac{\partial M_{sr}}{\partial Q_m}$$

e le M_{hk} funzioni delle sole Q, le quali si esprimono facilmente per mezzo dei coefficienti delle velocità nell'espressione della forza viva T:

$$M_{hk} = \sum_{\lambda} a_{\lambda h} B_{k\lambda}$$

Dalle [5] segue che, per un fissato valore di r, le D_{mrs} formano una matrice quadrata:

$$[6] \qquad \|D_{mrs}\|_{(r \text{ fisso})} \quad \text{emisimmetrica}$$

Le [2] si scrivono:

$$[7] \qquad \sum_{s=1}^{y} \frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial Q'_m \, \partial Q'_s} Q''_s = -k \sum_r \gamma_r F_{mr} + \left[\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial Q_m} + \frac{\partial (U - A)}{\partial Q_m} \right],$$

dove il termine in parentesi quadra è la somma di due addendi, l'uno omogeneo di secondo grado nelle Q', a coefficienti funzioni delle Q, l'altro funzione delle sole Q, indipendente dalle Q'.

Generalmente dalle [4] si potranno ricavare le Q' in funzione lineare delle F, ed allora il termine in parentesi quadra delle [17] risulterà espresso per mezzo delle Q e delle F soltanto e conterrà le F unicamente al secondo grado.

Indichiamo poi con $\|a_{ps}\|$ la matrice inversa delle [3]. A causa della simmetria della [3], risulterà:

$$\|a_{ps}\| \quad \text{simmetrica}\,. \tag{8}$$

Si derivino ora le [4] rispetto al tempo e dai risultati si eliminino le Q'' a mezzo delle [7]. Si ottiene il sistema differenziale:

$$\frac{d\,F_{mr}}{dt} = -k\sum_{q=1}^{x}\gamma_q\sum_{p=1}^{y}F_{pq}\sum_{s=1}^{y}D_{mrs}\,a_{ps} + H_{mr} \tag{9}$$

dove:

a) le H_{mr}, a causa dell'osservazione fatta circa il termine in parentesi quadra delle [7] sono funzioni delle Q e delle F soltanto e contengono le F esclusivamente al secondo grado, per modo che si ha:

$$H_{mr} = \beta_{mr} + \omega_{mr} \tag{10}$$

$$\omega_{mr} = \sum_{i_1 i_2 j_1 j_2}\alpha_{mr\,i_1 i_2 j_1 j_2}\,F_{i_1 i_2}\,F_{j_1 j_2} \tag{11}$$

$$\beta_{mr} = \sum_s D_{mrs}\sum_p a_{sp}\,\frac{\partial(U-A)}{\partial Q_p} = \sum_p \frac{\partial(U-A)}{\partial Q_p}\left(\sum_s a_{sp}\,D_{mrs}\right) \tag{12}$$

essendo le α, β funzioni delle sole Q.

b) Tutte le funzioni delle sole Q che figurano nelle [9], per ipotesi (del resto rispondente ai casi fisici) sono limitate; inoltre hanno derivate limitate rispetto alle coordinate Q, cosicchè: se non contengono esplicitamente il tempo, soddisfano alla condizione del Lipschitz, quando, come immaginiamo, le velocità appariscenti siano anch'esse limitate.

c) Si ha poi:

$$\sum_{mr}\frac{\partial}{\partial F_{mr}}\left(\frac{dF_{mr}}{dt}\right) = k\sum_r \gamma_r\sum_{ms}D_{mrs}\,a_{ms} = 0\,,$$

espressione nulla in virtù della [6] e [8]; talchè, se mancassero i termini ω_{mr}, il sistema lineare nelle F_{mr} apparterrebbe alla classe dei sistemi del LIOUVILLE.

§ 3. UGUAL RANGO DI DUE MATRICI. – Si indichi con $\Lambda_{mr,pq}$ l'espressione:

[13]
$$\Lambda_{mr,pq} = -k\gamma_q \sum_s D_{mrs} a_{sp}$$
$$(m, p = 1, \dots y;\quad r, q = 1, \dots x)$$

avremo dalle [12]:

[14]
$$\beta_{mr} = -\frac{1}{k\gamma_q} \sum_p \Lambda_{mr,pq} \frac{\partial(U-A)}{\partial Q_p}$$

e contemporaneamente, in luogo delle [9]:

[15]
$$\begin{aligned}\frac{dF_{mr}}{dt} &= \Lambda_{mr,11} F_{11} + \Lambda_{mr,21} F_{21} + \dots + \Lambda_{mr,y1} F_{y1} + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ \Lambda_{mr,1x} F_{1x} + \Lambda_{mr,2x} F_{2x} + \dots + \Lambda_{mr,yx} F_{yx} + \beta_{mr} + \omega_{mr}\end{aligned}$$

dove, per la definizione [13]:

[16]
$$\Lambda_{mr,p1}\ \Lambda_{mr,p2}, \dots \Lambda_{mr,px}$$

non differiscono fra loro che per il fattore γ_q $(q = 1, \dots x)$.

Ma allora i coefficienti delle F_{ij}, ove queste figurano a primo grado (esclusi dunque i termini che costituiscono ω_{mr}) formano una matrice *quadrata* di ordine $xy = n$

[17]
$$\|\Lambda_{mr,pq}\|$$

il cui determinante è nullo, perchè le colonne (individuate dalla coppia di indici p, q) sono ad x ad x uguali fra loro, a meno di un fattore $k\gamma_q$ comune a tutti i termini di ciascuna colonna.

Formiamoci ora una matrice *rettangolare*

$$\| R_{mr,\,pq} \| \tag{18}$$

ottenuta con l'aggiungere alle n colonne della [17] un'ultima colonna formata con le β_{mr}, ordinatamente. Quest'ultima colonna, come mostrano le [14] è una combinazione lineare delle colonne della [17] e pertanto le due matrici [17] e [18] avranno lo stesso rango.

§ 4. Proprietà di alcune sostituzioni. – Una sostituzione R rappresentata da una matrice emisimmetrica è una *rotazione* e mediante una sostituzione ortogonale T qualsiasi, si muta ancora in una rotazione R'; per cui scriveremo:

$$R' = TRT^{-1} \equiv \| \delta_{rs} \| \quad (\text{con } \delta_{rs} = -\delta_{sr}) \tag{19}$$

Una sostituzione K rappresentata da una matrice simmetrica è una *deformazione pura* e mediante una sostituzione ortogonale T si trasforma ancora in una deformazione pura. Però, se la sostituzione S si sceglie opportunamente, allora K si muta in una K' data dalla matrice:

$$K' = TKT^{-1} \equiv \begin{Vmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{Vmatrix} \tag{20}$$

dove sono nulli tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale.

Ciò premesso, consideriamo il prodotto P di sostituzioni seguenti:

$$P = R \cdot K \,, \tag{21}$$

cioè il prodotto di una rotazione per una deformazione pura. Proveremo che l'equazione secolare relativa a P ammette *radici nulle* oppure *immaginarie pure* (2 a 2 coniugate).

Infatti, considerando la trasformazione di P mediante T, cioè P′, avremo per la [21]:

$$[22] \qquad P' = TPT^{-1} = TRKT^{-1} = (TRT^{-1})(TKT^{-1}) = R'K'$$

e quindi, a causa di [19] e [20]:

$$[23] \qquad P' \equiv \| \delta_{rs} k_s \| \,.$$

Ma allora, ricordando che $\delta_{rs} = -\delta_{sr}$, come è espresso nella [19], la matrice seguente:

$$[24] \qquad R \equiv \left\| \delta_{rs} \sqrt{k_r k_s} \right\|$$

rappresenterà una rotazione. Di questa ultima procuriamoci la trasformata a mezzo della deformazione pura:

$$[25] \qquad C \equiv \left\| \begin{matrix} \sqrt{k_1} & & & \\ & \sqrt{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{k_n} \end{matrix} \right\| ,$$

dove sono sottintesi tutti zeri al posto degli elementi non appartenenti alla diagonale principale. Dal confronto di [23], [24] e [25], risulta subito che:

$$[26] \qquad P' = C R C^{-1} \,.$$

A questo punto bisogna ricordare che una sostituzione ammette la stessa equazione secolare di una qualsiasi sua trasformata; quindi per la [22], P′ ha la stessa trasformata di P, e per la [26] la stessa di R.

Ne consegue che P ha la stessa equazione secolare che compete alla rotazione R, e poichè l'equazione secolare di una rotazione possiede solo radici nulle oppure immaginarie pure (2 a 2 coniugate) altrettanto dovrà dirsi della equazione di P, come volevamo dimostrare.

§ 5. L'EQUAZIONE SECOLARE DELLE F_{mr}. – Per semplicità attribuiremo alle F_{mr} un solo indice e così alle ω_{mr}, β_{mr}; mentre attribuiremo due indici alle $\Lambda_{mr,pq}$; e ciò faremo ordinando le coppie (mr), (pq) nel modo seguente:

alla coppia (mr) corrisponde l'indice $i=(r-1)y+m$
» » (pq) » » $j=(q-1)y+p$
$(m, p=1, \dots y\,;\; r, q=1, \dots x)$

e così porremo:

$$\Lambda_{mr,pq}=k\gamma_q\lambda_{ij}\,;\quad F_{mr}=F_i\,;\quad \omega_{mr}=\omega_i\,;\quad \beta_{mr}=\beta_i\,. \tag{27}$$

Introducendo allora il *tempo fittizio* τ dato da:

$$\tau=kt\,,$$

e tenendo conto delle [16] e delle [27], scriveremo le [15] nella forma seguente:

$$\begin{aligned}\frac{dF_i}{dt}=\;&\gamma_1\lambda_{i1}F_1+\gamma_1\lambda_{i2}F_2+\dots+\gamma_1\lambda_{iy}F_y+\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\\ &+\gamma_x\lambda_{i1}F_{y(x-1)+1}+\gamma_x\lambda_{i2}F_{y(x-1)+2}+\dots+\gamma_x\lambda_{iy}F_{yx}+\frac{1}{k}\beta_i+\frac{1}{k}\omega_i\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Con i coefficienti $\gamma_x\,\lambda_{is}$ che figurano nelle [28] formiamo l'equazione secolare seguente:

[29]

$$\begin{vmatrix} \overbrace{\gamma_1\lambda_{11}-u \quad \gamma_1\lambda_{12} \quad \dots\gamma_1\lambda_{1y}} & \overbrace{\gamma_2\lambda_{11}\dots\gamma_2\lambda_{1y}} & \overbrace{\dots\dots\dots} & \overbrace{\gamma_x\lambda_{11}\dots\gamma_x\lambda_{1y}} \\ \gamma_1\lambda_{21} \quad \gamma_1\lambda_{22}-u\dots\gamma_1\lambda_{2y} & \gamma_2\lambda_{21}\dots\gamma_2\lambda_{2y} & \dots\dots\dots & \gamma_x\lambda_{21}\dots\gamma_x\lambda_{2y} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \gamma_1\lambda_{n1} \quad \gamma_1\lambda_{n2} \quad \dots\gamma_1\lambda_{ny} & \gamma_2\lambda_{n1}\dots\gamma_2\lambda_{ny} & \dots\dots\dots & \gamma_x\lambda_{n1}\dots\gamma_x\lambda_{ny}-u \end{vmatrix}=0$$

Nella matrice ora scritta, di ordine $n=xy$, figurano x gruppi, ciascuno di y colonne (un gruppo per ogni graffa orizzontale) tali che

le λ_{rs} di un gruppo sono ordinatamente eguali alle λ_{rs} di un altro gruppo e l'indice q dei fattori γ di ciascun gruppo è identico per tutti gli elementi del gruppo. Ora, alla $(y+1)^{ma}$ colonna si sostituisca la differenza fra la medesima moltiplicata per γ_1 e la 1^a moltiplicata per γ_2. Alla $(y+2)^{ma}$ si sostituisca la medesima moltiplicata per γ_1 e la seconda moltiplicata per γ_2; e così via; alla $(qy+s)^{ma}$ colonna si sostituisca la differenza fra la medesima moltiplicata per γ_{q-1} e la $[(q-1)y+s]^{ma}$ moltiplicata per γ_q. Avremo un'equazione equivalente alla [29] che scriveremo simbolicamente:

$$|\sigma| = 0$$

dove σ è una matrice quadrata di ordine $n = xy$.

Nella matrice σ operiamo sostituendo, al posto della h^{ma} linea $(h < y)$, la combinazione lineare delle linee:

$$h^{ma},\ (y+h)^{ma},\ (2y+h)^{ma},\ \ldots\ldots\ [(x-1)\,y+h]^{ma},$$

con i rispettivi coefficienti $\gamma_1\,\gamma_2 \ldots \gamma_x$ Avremo una nuova equazione:

$$|\mathrm{E}| = 0$$

dove E è sempre una matrice quadrata di ordine $n = xy$, nella quale però sono nulli i termini appartenenti contemporaneamente alle prime y linee ed alle ultime $(n-y)$ colonne; per cui sviluppando secondo la regola di Laplace, cioè secondo i minori della matrice rettangolare formata dalle prime y linee, si ottiene:

[30]
$$\begin{vmatrix} \sum\gamma_q\lambda_{(q-1)y+1,1} - u & \sum\gamma_q\lambda_{(q-1)y+1,2} & \ldots\ldots & \sum\gamma_q\lambda_{(q-1)y+1,y} \\ \sum\gamma_q\lambda_{(q-1)y+2,1} & \sum\gamma_q\lambda_{(q-1)y+2,2} - u & \ldots\ldots & \sum\gamma_q\lambda_{(q-1)y+2,y} \\ \sum\gamma_q\lambda_{qy,1} & \sum\gamma_q\lambda_{qy,2} & \ldots\ldots & \sum\gamma_q\lambda_{qy,y} \quad -u \end{vmatrix} u^{y(x-1)} = 0$$

dove le sommatorie sono rispetto all'indice q che va da 1 ad x.

Indicando con P la matrice che si ottiene dalla [30] quando si omette il termine u, dovunque esso compare, potremo scrivere, tenute presenti le [27]:

$$\mathrm{P} \equiv \|\mathrm{P}_{\mu\nu}\| \quad (\mu, \nu \leqslant y)$$

dove:

$$P_{\mu\nu} = \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+\mu,\nu} = \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+\mu,(q-1)y+\nu} = -\frac{1}{k} \sum \gamma_q \Lambda_{\mu q,\nu q}$$

perchè le λ della colonna s^{ma} in [29] sono le stesse che nella colonna $(s+y)^{ma}$. Si ha anche:

$$[31] \qquad P_{\mu\nu} = -\frac{1}{k} \sum_q \gamma_q \sum_\varrho D_{\mu q \varrho} a_{\nu\varrho} = -\frac{1}{k} \sum_\varrho a_{\nu\varrho} \sum_q \gamma_q D_{\mu q \varrho} .$$

Ma allora si riconosce in base alla [31] che la matrice $P \equiv \|P_{\mu\nu}\|$ è il prodotto di due altre matrici R e K date rispettivamente da:

$$R \equiv \|R_{rs}\|, \quad \text{dove} \quad R_{rs} = \sum_q \gamma_q D_{rqs} \qquad (r, s = 1, \dots y)$$
$$K \equiv \|a_{rs}\| ;$$

cioè P è il prodotto di una rotazione (perchè tale è R a causa della [6]) per una deformazione pura K (tale in virtù della [8]). Quindi l'equazione secolare di P, che è poi la [30], tenuto presente il risultato del paragrafo precedente, ammette $y(x-1)$ radici nulle (più ancora un'altra se y è dispari) e poi le altre radici immaginarie pure (2 a 2 coniugate).

§ 6. Un sistema differenziale ausiliario. – Accanto al sistema [28] consideriamo il sistema ausiliario:

$$[32] \qquad \begin{aligned} \frac{dF_i^0}{dt} = \gamma_1 \lambda_{i1} F_1^0 \quad &+ \gamma_1 \lambda_{i2} F_2^0 \quad + \dots + \gamma_1 \lambda_{iy} F_y^0 + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ \gamma_x \lambda_{i1} F^0_{(y-1)x+1} + \gamma_x \lambda_{i2} F^0_{(y-1)x+2} + \dots + \gamma_x \lambda_{iy} F^0_{xy} + \frac{1}{k} \beta_i \end{aligned}$$

che differisce dal sistema [28] per l'omissione proprio di quei termini $\frac{1}{k}\,\omega_i$ che contengono le F_i a secondo grado. Ora questo sistema [32], *lineare* nelle F^0 soddisfa a tutte le condizioni cui soddisfano i sistemi lineari studiati nella nota precedente (¹) e cioè:

1°) Il sistema [32] appartiene alla classe di quelli del Liouville in base all'osservazione fatta in fine del § 2).

(¹) Cfr. P. Teofilato, *Sopra alcuni sistemi differenziali a soluzioni sensibilmente costanti*, « Acta », Vol. VIII, n. 14, 1944.

2°) La matrice quadrata formata con i coefficienti delle F^0, nei secondi membri della [32], cioè la matrice [17], ha lo stesso rango della matrice rettangolare [18], ottenuta con l'aggiungere alle colonne della prima matrice la colonna delle β_i.

3°) L'equazione secolare delle [32] non è altro che la [30] e pertanto ammette soltanto radici nulle oppure immaginarie pure (2 a 2 coniugate).

4°) I coefficienti suddetti soddisfano alla condizione del LIPSCHITZ in base alle ipotesi significate al § 2 *b*); per cui potremo scrivere:

$$|\lambda_{rs}(t) - \lambda_{rs}(t_0)| > M\,|t - t_0| = M\,\frac{(\tau - \tau_0)}{k}$$

e ritenere perciò che, almeno per una durata:

$$[33] \qquad |\tau - \tau_0| \leqslant \sqrt{k}$$

con k grande a piacere, la variabilità di λ_{rs} (e così dicasi per β_r) sia lentissima rispetto al tempo fittizio τ. L'assunzione di k molto grande si ottiene, come si è detto a proposito delle [1], prendendo grandi valori iniziali delle velocità ignorabili.

In base alle circostanze ora riscontrate, sono dunque applicabili al sistema [32] i risultati della nota precedente e si potrà concludere che:

a) Sotto la condizione [33] si può scrivere per le F_i^0 del sistema [32] e per le F_i del sistema [28], rispettivamente (¹):

$$[34] \qquad F_i^0 = B_i + \sum_{\sigma=m+1}^{n} H_{\sigma i}\, e^{u_\sigma \tau}$$

$$[34\,bis] \qquad F_i = F_i^0 + \frac{1}{k} \sum_{\sigma, q=1} G_{\sigma q i} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{u_\sigma(\tau - \tau_1)} \cdot \omega_q\, d\tau_1$$

dove $B_i\ H_{\sigma i}\ G_{\sigma q i}$ sono note funzioni delle $\lambda_{rs}\ \beta_r$; m è il numero delle radici nulle dell'equazione secolare ed u_σ è una generica radice non nulla. Come si vede, le F_i si riducono alle F_i^0 per $\tau = \tau_0$.

b) Tutte le F_i^0 sono limitate e, nel caso che l'equazione secolare abbia due sole radici $(m = n - 2)$ non nulle e quindi immaginarie

(¹) Cfr. Nota ultimamente citata; formole [24] e [25].

pure coniugate, le F_i^0 si possono conservare tutte, per un tempo indefinito, prossime quanto si vuole ai valori assunti inizialmente, previa opportuna scelta delle condizioni iniziali od in particolare del parametro k.

§ 7. Studio del sistema [28]. – Pongasi:

$$\psi_i^{(\lambda)}(f_h, f_k) = \sum_{\sigma, q=1} G_{\sigma q i} \int_{\tau_\lambda}^{\tau} e^{u_\sigma(\tau-\tau_1)} \cdot \sum a_{ihk} f_h f_k \, d\tau_1 \tag{35}$$

dove le $G_{\sigma q i}$ sono le stesse che figurano nelle [34 *bis*] e le a_{ihk} non sono altro che le α a sei indici che figurano nelle [11]; sicchè la sommatoria che è sotto il vincolo integrale non è altro che ciò che diventa ω_i della [11] quando al posto delle F si sostituiscano le funzioni f.

Sia poi L un numero positivo che superi tutti i moduli seguenti:

$$|G_{\sigma q i}|, \; |F_i^0|, \; |a_{ihk}| < L \tag{36}$$

e sia;

$$Z = \sum |G_{\sigma q i}| \, |a_{ihk}| \tag{37}$$

e z il numero dei termini che figurano nella sommatoria [35]; avremo:

$$Z < z L^2 \tag{38}$$

Formiamo poi la scala ricorrente seguente:

$$F_i^{(m)} = F_i^{(0)} + \frac{1}{k} \psi_i^{(\lambda)}(F_h^{(m-1)}, F_k^{(m-1)}) \tag{39}$$

$$(m = 1, 2, \ldots \infty)$$

e cominciamo ad assumere $\lambda = 0$, il che significa assumere nella [35] τ_0 come limite inferiore della integrazione [36]. A norma delle [36] [37] [38], avremo da [39] e [35]:

$$|F_i^{(1)} - F_i^{(0)}| < \frac{1}{k} z L^4 (\tau - \tau_0) \, ,$$

essendo u_σ un esponente immaginario puro.

Posto allora:

[40] $$\frac{1}{k} z \mathrm{L}^3 (\tau - \tau_0) = \frac{1}{2} y$$

risulterà:

[41] $$|\mathrm{F}_i^{(1)} - \mathrm{F}_i^{(0)}| < \frac{1}{2} \mathrm{L} y < \mathrm{L} y$$

e pertanto (cfr. [36]):

[41 *bis*] $$|\mathrm{F}_i^{(1)}| < \mathrm{L}(1+y)$$

Dalla [39] e [35] segue allora:

$$|\mathrm{F}_i^{(2)} - \mathrm{F}_i^{(0)}| < \frac{1}{k} z \mathrm{L}^4 \int_{\tau_0}^{\tau} (1+y)^2 \, d\tau_1 = \frac{\mathrm{L}}{2} \int_0^y (1+y)^2 \, dy < \frac{\mathrm{L}}{2} (y + y^2 + y^3)$$

Ora, quando si assuma k sufficientemente grande e si tenga presente la [33], dalla [40] si deduce che certamente si può ritenere:

[42] $$y < \frac{1}{2} \,,$$

per cui, come già nella [41]:

$$|\mathrm{F}_i^{(2)} - \mathrm{F}_i^{(0)}| < \frac{\mathrm{L}}{2} \frac{y}{1-y} < \mathrm{L} y \;;$$

e quindi analogamente come per la [41 *bis*]:

[43] $$|\mathrm{F}_i^{(2)}| < \mathrm{L}(1+y)$$

Ma allora, sempre per la [39] o [35]:

$$|\mathrm{F}_i^{(3)} - \mathrm{F}_i^{(0)}| < \frac{1}{k} z \mathrm{L}^4 \int_{\tau}^{\tau_0} (1+y)^2 \, d\tau_1 < \mathrm{L} y$$

e perciò anche $|F_i^{(3)}| < L(1+y)$ ed in generale:

$$|F_i^{(m)}| < L(1+y) < \frac{3}{2} L \tag{44}$$

D'altra parte, posto:

$$\Delta_h^{(m)} = F_h^{(m)} - F_h^{(m-1)} ,$$

si ha:

$$\Delta_h^{(m)} = \frac{1}{k} \sum G_{\sigma q i} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{u_\sigma(\tau-\tau_1)} \sum a_{ihk} (\Delta_h^{(m-1)} F_k^{(m-1)} + \Delta_k^{(m-1)} F_h^{(m-2)})\, d\tau_1$$

e per la [44]:

$$|\Delta_h^{(m)}| < \frac{3}{2} \frac{1}{k} z L^3 \int_{\tau_0}^{\tau} (|\Delta_h^{(m-1)}| + |\Delta_k^{(m-1)}|)\, d\tau_1 < \frac{3}{2} \frac{1}{2} \int_0^y (|\Delta_h^{(m-1)}| + |\Delta_k^{(m-1)}|\, dy$$

Ora, a norma della [41], tutte le $\Delta_h^{(1)}$ sono maggiorate da Ly e quindi da L; pertanto, se si considera la scala ricorrente:

$$D^{(m)} = \frac{3}{2} \int_0^y D^{(m-1)}\, dy ,$$

ove si parte da $D^{(1)} = L$, si avrà che tutti i moduli $|\Delta_h^{(m)}|$, qualunque sia h, saranno maggiorati da:

$$D^{(m)} = \frac{\left(\frac{3}{2} y\right)^{m-1}}{(m-1)!} L ;$$

e in conseguenza:

$$D^{(m+1)} + D^{(m+2)} + \ldots < \frac{\left(\frac{3}{2} y\right)^{m}}{m!} e^{3/2}$$

Ma poichè il secondo membro di quest'ultima disuguaglianza tende a svanire, col crescere indefinito di m, esisterà il limite:

$$L_i = \lim_{m \to \infty} F_i^{(m)} ;$$

e questo limite, evidentemente soddisferà l'equazione generica:

$$[45] \qquad L_i = F_i^{(0)} + \frac{1}{k}\psi_i^{(0)}(L_h, L_k) \ ,$$

cioè alla stessa equazione [34 *bis*] cui, per la [35], soddisfa la F_i ed inoltre si riduce a $F_i^{(0)}$ per $\tau = \tau_0$. Dunque le F_i esistono e sono date dalle L_i.

La [45] si presta a valutare la differenza $F_i - F_i^{(0)}$. Infatti la [45] tenuta presente la [35] e la [44], diventa:

$$[46] \qquad |F_i - F_i^0| < \frac{z}{k}\frac{9}{4}L^4\sqrt{k} = \frac{L_1}{\sqrt{k}} \quad (\text{per } \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 = \tau_0 + \sqrt{k})$$

con evidente significato di L_1.

Ma la stima dell'approssimazione di F_i ad F_i^0 nell'intervallo accennato è suscettibile di affinamento. F_i^0 si può assumere inizialmente piccola quanto si vuole, e d'altra parte, come abbiamo veduto nella nota precedente, si può mantenere vicina quanto si vuole al suo valore iniziale, indipendentemente dal valore k e per un tempo grande a piacere, purchè k sia abbastanza grande.

Perciò potremo sempre supporre che in qualunque istante sia:

$$[47] \qquad |F_i^0| < \varepsilon, \quad \text{con } \varepsilon \text{ compreso fra } \frac{1}{k^2} \text{ ed } \frac{1}{k}$$

Da [46] e [47] segue:

$$|F_i| = |F_i^0 + (F_i - F_i^0)| < \varepsilon + \frac{L_1}{\sqrt{k}} < \frac{2L_1}{\sqrt{k}}$$

ed allora dalla [45] seguirà (sempre a norma della [35]):

$$|F_i - F_i^0| < \frac{1}{k} z L^2 \left(\frac{2L_1}{\sqrt{k}}\right)^2 \sqrt{k} = \frac{L_2}{k^{3/2}}$$

con evidente significato di L_2. Segue da quest'ultima e dalla [47] e [46]:

$$[48] \qquad |F_i| = |F_i^0 + (F_i - F_i^0)| < \varepsilon + \frac{L_2}{k^{3/2}} < \frac{1}{k}$$

per cui, sostituendo nella [45] risulterà finalmente:

$$|F_i - F_i^0| < \frac{1}{k} z L^2 \left(\frac{1}{k}\right)^2 \sqrt{k} = \frac{L_3}{k^{5/2}}$$

con evidente significato di L_3. Questo è il massimo affinamento che si poteva raggiungere nella valutazione di $|F_i - F_i^0|$.

D'altra parte le funzioni a_{ihk}, $G_{\sigma q i}$ conservano per ipotesi le proprietà utilizzate finora, per un tempo qualsiasi.

Possiamo allora iterare il ragionamento partendo da τ_1 anzichè da τ_0, mediante il procedimento ricorrente indicato dalla [39], ove però adesso si assuma $\lambda = 1$, perchè si parte da τ_1, e ricaveremo le F_i soddisfacenti al sistema [28] e tali che per $\tau = \tau_1$ si riducono ai valori $(F_i)_{\tau=\tau_1}$ ai quali siamo testè pervenuti partendo da τ_0. Per la durata $|\tau - \tau_1| \leqq \sqrt{k}$, e cioè fino all'istante $\tau_2 = \tau_1 + \sqrt{k}$, le F_i, trovate in questo secondo intervallo, si manterranno prossime ai rispettivi valori iniziali $(F_i)_{\tau=\tau_1}$. E così via, iterando per le durate $\tau_3 - \tau_2 = \sqrt{k}$, ecc.

La funzione F_i così trovata e la corrispondente F_i^0, coincidenti per $\tau = \tau_0$, in seguito al procedimento adottato nel 1° tratto (τ_0, τ_1) differiranno in τ_1 al più per $L_3 : \sqrt{k^5}$; in seguito al procedimento del 2° tratto (τ_1, τ_2) differiranno in τ_2 al più del doppio, e così in τ_3 per il triplo, ecc. Insomma solo dopo un tempo fittizio $\tau - \tau_0 = k^2$, cioè un tempo reale $t - t_0 = k$ (molto grande) la differenza tra F_i ed F_i^0 sarà al più $(L_3 : \sqrt{k^5})\, k^2 = L_3/\sqrt{k}$ (e quindi piccola). Ma i valori F_i^0 soddisfano alla [47] per un tempo indefinito e perciò sarà:

$$|F_i| < \varepsilon + \frac{L_3}{\sqrt{k}} .$$

Dunque le F_i si conserveranno anch'esse come le F_i^0 prossime al loro (piccolo) valore iniziale $(F_i^0)_{\tau=\tau_0}$.

§ 8. Girostato a più giroscopi. – Supponiamo di avere un girostato sul quale siano armati più giroscopi rotanti i cui assi siano solidali con le pareti del girostato. Le coordinate ignorabili sono null'altro che gli angoli $\sigma_1\ \sigma_2 \ldots$ di rotazione dei giroscopi; le appariscenti

$Q_1\, Q_2\, Q_3$ non sono altro che i tre angoli euleriani $\varphi\ \psi\ \theta$ formati dagli assi centrali di tutto il sistema (assi $x\ y\ z$) con gli assi fissi.

Se M_0 è la massa totale del sistema, w_0 la velocità del baricentro, $A_0\, B_0\, C_0$ sono i momenti inerziali centrali di tutto il sistema e $p\ q\ r$ le componenti rotatorie rispetto agli assi centrali che abbiamo denominato con $x\ y\ z$, la forza viva dovuta al solo supporto dei giroscopi e al solo trascinamento di questi sarà:

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(A_0 p^2 + B_0 q^2 + C_0 r^2 + M_0 w_0^2\right)$$

Siano ora $A_h^*\, B_h^*\, C_h^*\ (A_h^* = B_h^*)$ i momenti inerziali centrali del giroscopio h^{mo}, M_h la sua massa e siano invece $A_h\, B_h\, C_h\, D_h\, E_h\, F_h$ le sei coordinate inerziali del medesimo rispetto degli assi $x\,y\,z$ ed $\alpha_h\, \beta_h\, \gamma_h$ i coseni degli angoli che il suo asse giroscopico fa con $x\,y\,z$.

Omesso l'indice h, si trova facilmente:

$$A = M(b^2 + c^2) + (1 - \alpha^2)\, A^* + \alpha^2\, C^*\ ;\quad D = b\,c\,M + \beta\gamma(A^* - C^*)$$

e le analoghe per B, C, E, F, ottenute da quelle già scritte, mantenendo ferme le lettere con asterisco e la M, e permutando circolarmente tutte le altre.

Per mezzo di queste grandezze riuscirà di esprimere l'altra seguente:

$$S_h = \sum_i m_{ih} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_{ih} & y_{ih} & z_{ih} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_h & \beta_h & \gamma_h \\ x_{ih} - a_h & y_{ih} - b_h & z_{ih} - c_h \end{vmatrix}$$

dove m_{ih} è la massa generica del punto materiale i^{mo} appartenente al giroscopio h^{mo}. Come si vede S_h è funzione lineare di $p\,q\,r$ e pertanto sarà funzione lineare delle velocita $\varphi'\,\psi'\,\theta'$ (derivate temporali degli angoli euleriani).

Indicando con T_r la forza viva del moto relativo dei giroscopi rispetto al girostato, la quale è indipendente da $\varphi\ \psi\ \theta$ e loro derivate temporali, e tenendo presente l'espressione data poco sopra per T_0, si trova la forza viva totale T:

$$T = T_0 + T_r + \sum_h S_h\, \sigma'_h\,.$$

Siamo così in grado di ricavare le equazioni lagrangiane. Quelle rispetto a $\sigma_1 \sigma_2 \ldots$ forniscono altrettanti integrali primi come si è visto nella [1]; mediante questi ultimi è possibile eliminare $\sigma_1 \sigma_2 \ldots$ dalle restanti equazioni lagrangiane, ottenendo così le equazioni [2] che qui, diventano:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial Q'_i} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial Q} = -\sum_r \gamma_r F_{ir} + \frac{\partial U}{\partial Q_i},$$

dove:

$$Q_1 = \varphi, \quad Q_2 = \psi, \quad Q_3 = \theta$$

$$\mathfrak{T} = T_0 - \frac{1}{2}\sum \frac{S_h^2}{C_h^*}$$

$$F_{ir} = \frac{1}{C_r^*}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial S_r}{\partial Q'_i} - \frac{\partial S_r}{\partial Q_i}\right\} = \sum_{s=1}^{3} D_{irs} Q'_s$$

(quest'ultimo risultato in virtù della linearità delle S_r rispetto alle Q' e in conformità delle [4]).

Abbiamo dunque 3 coordinate appariscenti ($y=3$) e supponiamo di disporre di 3 giroscopi ($x=3$ coordinate ignorabili σ_h). Se per semplicità immaginiamo che gli assi giroscopici siano paralleli ai tre assi centrali risulterà (ritornando per un momento a simboleggiare le F con doppio indice):

$$\left.\begin{aligned}
F_{11} &= 0 - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\cdot\psi' + \operatorname{sen}\varphi\cdot\theta' \\
F_{21} &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\cdot\varphi' + 0 + \operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\theta\cdot\theta' \\
F_{31} &= -\operatorname{sen}\varphi\cdot\varphi' - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cdot\psi' + 0
\end{aligned}\right\}\ 1^\circ \text{ giroscopio}$$

$$\left.\begin{aligned}
F_{12} &= 0 + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cdot\psi' + \cos\varphi\ \theta' \\
F_{22} &= -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cdot\varphi' + 0 + \cos\varphi\cos\theta\cdot\theta' \\
F_{32} &= -\cos\varphi\cdot\varphi' - \cos\varphi\cos\theta\cdot\psi' + 0
\end{aligned}\right\}\ 2^\circ \text{ »}$$

$$\left.\begin{aligned}
F_{13} &= 0 + 0 + 0 \\
F_{13} &= 0 + 0 - \operatorname{sen}\theta\cdot\theta' \\
F_{33} &= 0 + \operatorname{sen}\theta\cdot\psi' + 0
\end{aligned}\right\}\ 3^\circ \text{ »}$$

Se dunque nel girostato vi fosse un solo giroscopio, il terzo, si potrebbero desumere $\theta'\psi'$ in funzione di $F_{23} F_{33}$ (uniche F che in tal

caso comparirebbero nel problema). Sarebbe quindi possibile esprimere le funzioni ω, delle [11], per mezzo delle F ed applicare in conseguenza tutte le conclusioni alle quali siamo pervenuti nel paragrafo ultimo. Così le $F_{23}\,F_{33}$, e conseguentemente $\theta'\,\psi'$ si possono mantenere per un tempo indefinito prossime ai valori iniziali e quindi sempre piccole se inizialmente piccole.

Se invece si dispone di due giroscopi possiamo conservare piccole tutte e tre le velocità $\varphi'\,\psi'\,\theta'$ e imporre quindi al girostato di muoversi lentamente, qualunque sia la posizione assunta nel tempo.

Dall'analisi fatta, nulla paraltro risulta circa l'andamento precessionale di una o più Q (Q' con segno costante) oppure oscillatorio (Q' con segno variabile), discriminazione questa che richiede un esame più approfondito.

In ogni modo le funzioni F e quindi le velocità Q' si possono considerare quasi periodiche, perchè la [30], quando si astragga dalle radici nulle, si riduce nel caso del girostato ($y = 3$) ad una equazione di secondo grado pura. Le velocità Q' si comportano dunque rispetto al tempo reale t quasi accoppiassero ad una ordinaria variabilità un fremito di periodo brevissimo $\dfrac{2\pi}{k\,|u|}$, dove u è anch'esso variabile.