PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 14
pag. 139-156

AZIONI ELASTICO-DISSIPATIVE A CICLO D'ISTERESI ELLITTICO (*)

CARLO CATTANEO

SVMMARIVM. — Legem quamdam elastico-dissipativam, quae iam enunciata est de harmonicis vibrationibus, Auctor extendit ad quoslibet motus. Hac fretus lege quae experimentis innititur circa elasticam hysteresim peractis, breviter sed ordinata ratione generatim inquirit de parvis oscillationibus, cum in systematibus libertatis gradus finitos habentibus, tum etiam in systematibus continuis unius vel plurium dimensionum.

1. PREMESSE. – La proporzionalità tra forza e spostamento, caratteristica dell'elasticità ordinaria, è un'ipotesi limite solo imperfettamente aderente alla realtà fisica come lo è, del resto, qualunque altra corrispondenza biunivoca tra tensione e deformazione che sia subordinata a un potenziale elastico. L'esperienza dimostra che ogni fenomeno di moto elastico è regolarmente accompagnato da un disperdimento interno di energia meccanica e che l'esistenza di un potenziale di elasticità, nel senso abituale, non è rigorosamente ammissibile.

Se in linea qualitativa questa dissipazione è immediatamente accertabile, più difficile è la sua traduzione in termini analitici, che non può dirsi stabilita in modo definitivo. Decisamente superata è oggi la concezione di una azione dissipativa dipendente dalla velocità di deformazione, perchè in aperto disaccordo coi risultati sperimentali relativi ai fenomeni di isteresi. La speciale natura di questi fenomeni

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini il 16 agosto 1945.

già da tempo ha condotto alla convinzione che una fedele rispondenza con la realtà possa ricercarsi nell'applicazione dei metodi generali della Fisica ereditaria, istituiti dal VOLTERRA (1). Senonchè le difficoltà, non lievi, e la conseguente incertezza che si incontrano nella determinazione sperimentale dei nuclei ereditari limitano notevolmente, almeno per ora, la portata applicativa di siffatti metodi.

Di fronte a queste difficoltà, sia pur d'indole pratica, è degna di rilievo per la sua grande semplicità un'ipotesi (2) suggerita da accurate ricerche sperimentali (BECKER, FÖPPL) e già applicata in elevate questioni di ingegneria (KÜSSNER), che ci sembra suscettibile di utili generalizzazioni. L'ipotesi, basata sull'osservazione che i cicli d'isterosi elastica sono ben approssimabili con ellissi, dipendenti dall'ampiezza ma non dalla velocità delle deformazioni, almeno entro certi limiti di frequenza, consiste nell'ammettere che tra forza e spostamento elastico, supposti entrambi variabili sinusoidalmente, intercorra, come si ammette d'ordinario, una relazione di proporzionalità, salvo però uno sfasamento angolare α dell'uno rispetto all'altra, caratteristico del materiale. In termini precisi se lo spostamento ha, ad esempio, la forma $q = \mathrm{A}\, e^{i\omega t}$ (3) alla forza elastica compete l'espressione $\Phi = -k\mathrm{A}e^{i(\omega t+\alpha)}$ (α positivo e indipendente da ω). In modo equivalente può scriversi

$$\Phi = -k e^{i\alpha} q\ . \tag{1.1}$$

Effettivamente in tale ipotesi il lavoro L compiuto dalla forza elastica in un periodo, pur dipendendo dall'ampiezza delle oscillazioni, non dipende dalla loro frequenza:

$$\mathrm{L} = -k\pi|\mathrm{A}|^2 \sin\alpha\ . \tag{1.2}$$

---

(1) Cfr. ad es. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle Vibrazioni*, Zanichelli, Bologna, 1940; vol. I, cap. III, pag. 161; cap. VI, pag. 335.

(2) Cfr. G. KRALL, *op. cit.*, vol. II, cap. X, pag. 195.

(3) Adotteremo di regola, seguendo l'uso degli elettrotecnici, la forma complessa per le grandezze variabili armonicamente. La stessa norma seguiremo anche nel caso di grandezze comunque variabili attraverso la considerazione di sviluppi in serie o integrale di FOURIER.

Si osservi per incidenza che una resistenza viscosa del tipo $-\beta\dot{q}$, in corrispondenza al medesimo moto e nello stesso tempo, eseguirebbe il lavoro

$$[1.3] \qquad L' = -\beta\pi|A|^2\omega \;,$$

essenzialmente dipendente da ω.

La portata della [1.1], direttamente formulata nel caso che lo spostamento q sia una funzione sinusoidale del tempo, si può spontaneamente estendere senza alcuna modificazione al caso di moti qualunque attorno a una posizione di equilibrio libero. Basta infatti pensare espressa la q in serie (o integrale) di Fourier (ammettere la possibilità di questo sviluppo non costituisce in pratica una grave restrizione) e applicare la [1.1] a ciascuna delle sue armoniche (finite o infinitesime); il principio di sovrapposizione degli effetti permette allora di ricostituire la stessa [1.1] con validità generale. Se poi il moto avviene attorno a una posizione d'equilibrio forzato (mantenuto da un'azione esterna invariabile) non c'è nulla da cambiare, pur di valutare gli spostamenti q a partire da codesta posizione; in tal caso la [1.1] dà la forza elastica *aggiuntiva* alla tensione statica che corrisponde alla posizione di equilibrio.

Formalmente questa legge elastico-dissipativa, da intendersi valida nell'ambito dinamico, comporta solo una lieve modificazione della legge di Hooke: sostituzione del parametro di proporzionalità k col parametro complesso $ke^{i\alpha}$.

A dire il vero, anche prescindendo da ogni controllo sperimentale, una generalizzazione così assoluta presenta troppi elementi di arbitrarietà per non prestarsi a qualche critica. Ciononostante ci sembra che la [1.1], che ha già prestato utili servigi in qualche concreto caso applicativo, meriti di essere saggiata nella sua piena generalità. È per ciò che in questa Nota ci proponiamo di trattare, molto succintamente, il problema generale delle vibrazioni elastiche con la sistematica applicazione della legge [1.1]. In modo speciale ci soffermeremo sui sistemi a un grado di libertà; dei sistemi più complessi diremo, su di un tipico esempio, quanto basta a indicare le modalità di trattazione nel caso più generale. Mostreremo da ultimo una possibile estensione

della [1.1] a sistemi elastici continui, mettendone in rilievo qualche applicazione che ci è sembrata di particolare interesse, anche in riguardo a eventuali controlli sperimentali.

§ 1. - SISTEMI ELASTICI A UN GRADO DI LIBERTÀ.

2. VIBRAZIONI LIBERE E FORZATE. - Considerato un generico sistema elastico S a un grado di libertà, sia q un parametro lagrangiano che ne individui lo spostamento da una posizione di equilibrio, libero o forzato. Indicata con m la massa lagrangiana, con $F(t)$ la forza esterna (in forma complessa) e posto $\sigma^2 = \frac{k}{m}$, il moto di S è retto, secondo la [1.1], dall'equazione differenziale

$$[2.1] \qquad \ddot{q} + \sigma^2 e^{i\alpha} q = \frac{F(t)}{m} .$$

In quanto precede è implicito che nel computo della sollecitazione esterna $F(t)$ si deve prescindere da eventuali forze invariabili. La presenza di tali forze non avrà altro effetto che di spostare la posizione di equilibrio di S, dalla quale gli spostamenti vengono valutati.

Se la soltecitazione esterna manca (vibrazioni libere), la [2.1] ammette le soluzioni fondamentali

$$[2.2] \qquad q = e^{-\sigma \sin\frac{\alpha}{2}\cdot t}\, e^{i\sigma\cos\frac{\alpha}{2}\cdot t}\,; \quad q = e^{\sigma\sin\frac{\alpha}{2}\cdot t}\, e^{-i\sigma\cos\frac{\alpha}{2}\cdot t}$$

Nella prima di esse sono evidenti i caratteri di un'oscillazione smorzata; la seconda soluzione, corrispondente a un moto vibratorio espansivo non rientra nella categoria delle funzioni sviluppabili in serie o integrale di FOURIER, nè, d'altronde, è *fisicamente accettabile*; essa va quindi scartata. La soluzione generale resta quindi, in veste reale,

$$[2.3] \qquad q = e^{-\sigma\sin\frac{\alpha}{2}\cdot t}\left[a\cos\left(\sigma\cos\frac{\alpha}{2}\cdot t\right) + b\sin\left(\sigma\cos\frac{\alpha}{2}\cdot t\right)\right] .$$

Le costanti d'integrazione a e b si esprimono in funzione dei dati iniziali ($q_0 = q(0)$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(0)$) così:

$$[2.4] \qquad a = q_0 \ , \quad b = \frac{\sigma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot q_0 + \dot{q}_0}{\sigma \cos \frac{\alpha}{2}} \ .$$

Supponiamo ora che su S agisca una forza esterna sinusoidale $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ (F_0 reale). L'equazione [2.1] ammette in tal caso una soluzione particolare armonica sincrona colla forza esterna, soluzione che ha naturalmente uno speciale interesse, dato il carattere smorzato delle vibrazioni libere. Essa si scrive

$$[2.5] \qquad q = A e^{i\omega t} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{m(\sigma^2 e^{i\alpha} - \omega^2)} = \frac{F_0 e^{i(\omega t - \psi)}}{m\sqrt{\sigma^4 + \omega^4 - 2\sigma^2\omega^2 \cos\alpha}} \ ,$$

dove ψ sta ad indicare l'angolo

$$[2.6] \qquad \psi = \arctan \frac{\sigma^2 \sin\alpha}{\sigma^2 \cos\alpha - \omega^2} \ .$$

Appare dalla [2.5] che lo spostamento è sfasato non solo rispetto alla forza elastica ma anche rispetto alla forza esterna, pur essendo diversi i due sfasamenti. Riguardo all'ampiezza della vibrazione $|A|$, si riconosce che, a differenza di quanto accade nell'ordinaria impostazione conservativa, essa rimane finita per qualsiasi valore di ω. Lo sfasamento α ha quindi, sull'ampiezza delle oscillazioni forzate, effetto analogo a quello di una resistenza viscosa; sia l'uno che l'altra attenuano, in misura maggiore al crescere della loro entità, il pericolo della risonanza quando la frequenza perturbatrice si approssima al suo valore critico. Tale valore, inteso come quello cui corrisponde la massima ampiezza di vibrazione, è nel caso presente dato da

$$[2.7] \qquad \omega^2_{\text{crit}} = \sigma^2 \cos\alpha$$

e ad esso corrisponde un'ampiezza

$$[2.8] \qquad |A|_{max} = \frac{F_0}{m\sigma^2 \sin\alpha} .$$

Il lavoro eseguito dalla forza esterna in un periodo, pari all'energia dissipata, risulta

$$L = \frac{\pi F_0^2 \sin\psi}{m\sqrt{\sigma^4 + \omega^4 - 2\sigma^2\omega^2\cos\alpha}} = -k\pi|A|^2 \sin\alpha ,$$

in accordo con la [1.2].

Molto semplicemente si tratta anche il caso che la forza esterna sia una funzione generica, periodica o addirittura aperiodica, di t. Se ad es. la $F(t)$ è una funzione periodica di periodo T, sì che valga lo sviluppo

$$[2.9] \qquad F(t) = \sum_1^\infty {}_n F_n e^{\frac{2in\pi}{T}t}$$

basta sostituire nella [2.1] l'analogo sviluppo di $q(t)$ con coefficienti indeterminati q_n per riconoscere, mediante identificazione dei due membri, che il moto forzato di S sincrono colla forza esterna è rappresentato dalle formule

$$[2.10] \qquad q(t) = \sum_1^\infty {}_n \frac{F_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \psi_n\right)}}{m\sqrt{\sigma^4 + \frac{16\pi^4 n^4}{T^4} - 8\frac{\sigma^2\pi^2 n^2}{T^2}\cos\alpha}} ,$$

$$[2.11] \qquad \psi_n = \arctan\frac{\sigma^2\sin\alpha}{\sigma^2\cos\alpha - \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}} , \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Confrontiamo le formule [2.3], [2.5], [2.6], [2.10], [2.11] con le analoghe che si ottengono nel caso di una resistenza interna di tipo viscoso $-\beta\dot{q}$. Posto

$$[2.12] \qquad 2h = \frac{\beta}{m} , \quad \nu^2 = \sigma^2 - h^2 , \quad \sigma^2 = \frac{k}{m} ,$$

risulta:

Vibrazioni libere

[2.13] $$q = e^{-ht}[a \cos \nu t + b \sin \nu t] \ .$$

Vibrazioni sostenute da una forza sinusoidale $F_0 e^{i\omega t}$

[2.14] $$q = \frac{F_0 e^{i(\omega t - \Theta)}}{\sqrt{(\sigma^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}$$

[2.15] $$\Theta = \operatorname{arctan} \frac{2h\omega}{\sigma^2 - \omega^2} \ .$$

Vibrazioni sostenute da una forza periodica di tipo [2.9]

[2.16] $$q = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{F_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T} t - \Theta_n\right)}}{\sqrt{\left(\sigma^2 - \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}\right)^2 + 16h^2 \frac{\pi^2 n^2}{T^2}}}$$

[2.17] $$\Theta_n = \operatorname{arctan} \frac{2h \frac{2\pi n}{T}}{\sigma^2 - \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \ .$$

È chiaro che tra la [2.3] e la [2.13] può stabilirsi completa identità purchè tra h ed α passi la relazione

[2.18] $$h = \sigma \sin \frac{\alpha}{2} \ .$$

Verificata la [2.18] non c'è, per quanto concerne le vibrazioni spontanee, differenza alcuna tra le due impostazioni. Passando a paragonare le oscillazioni forzate sinusoidali si vede che la relazione [2.18] assicura l'uguaglianza tra le ampiezze di vibrazione ma non tra le rispettive fasi. È questa una differenza essenziale poichè ad essa fa riscontro una differenza nel lavoro periodico compiuto dalla forza esterna e cioè, in sostanza, nell'energia dissipata. La divergenza tra

le due impostazioni si accentua poi decisamente, anche in riguardo all'ampiezza dell'oscillazione totale, nel caso di una forza pertubatrice non sinusoidale, come un semplice esame delle [2.10], [2.11]; [2.16], [2.17] mostra chiaramente.

3. Esempio. – Per fare un'applicazione molto semplice, ma espressiva, della [2.3] consideriamo un corpo C di massa m il quale urti con velocità w^- contro una parete elastica. Supposto l'urto centrale e diretto, e supposta trascurabile la forza viva indotta nella parete, il moto di C può ritenersi descritto, per tutta la durata del contatto, dalla [2.3] pur d'interpretare q come ascissa del suo baricentro G contata secondo la normale alla parete a partire dalla posizione di G medesimo al primo istante d'urto. Avendosi allora $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = w^-$, la [2.3] si scrive, avuto riguardo alle [2.4],

$$[3.1] \qquad q = \frac{w^-}{\sigma \cos \frac{\alpha}{2}} e^{-\sigma \sin \frac{\alpha}{2} \cdot t} \cdot \sin\left(\sigma \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t\right).$$

Per avere la velocità w^+ posteriore all'urto basta valutare la $\frac{dq}{dt}$ all'istante $t = \frac{\pi}{\sigma \cos \frac{\alpha}{2}}$ in cui è ancora $q = 0$ e $\dot{q}$ minima, con che si ricava

$$[3.2] \qquad w^+ = - w^- e^{-\pi \tan \frac{\alpha}{2}}.$$

Si determina così molto semplicemente il cosidetto « coefficiente di restituzione » (rapporto tra i valori assoluti delle velocità, posteriore e anteriore); esso risulta dipendere unicamente dalla costante dissipativa α e non dal modulo di elasticità k.

Osservazione. – Incidentalmente notiamo che, come caso limite, possono essere inquadrati nel nostro schema anche i sistemi « anelastici », comunemente caratterizzati da un coefficiente di restituzione nullo, assegnando loro per α il valore massimo π (cfr. la [3.2]). Adottato un tal valore, la formula [2.3] che regge il moto libero degenera nella forma $q = ae^{-\sigma t}$, contenente una sola costante arbitraria. La

seconda costante deve ritenersi puramente additiva come quella che caratterizza la posizione di equilibrio spontaneo verso cui asintoticamente tende il sistema abbandonato a se stesso dopo un impulso iniziale (per un sistem anelastico infatti ogni posizione è da ritenersi posizione di equilibrio).

4. Aggruppamento di organi elastici. – Consideriamo lo schema tipico di un oscillatore e supponiamo che la massa m nel suo movimento deformi simultaneamente due o più molle, *poste in parallelo*, con caratteristiche elastico-dissipative distinte

$$k_1, \alpha_1 \; ; \; k_2, \alpha_2 \; ; \; \ldots\ldots \; k_n, \alpha_n \; .$$

Un semplice calcolo mostra che il complesso delle n molle equivale ad un unico organo elastico di caratteristiche

$$k = \sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{rs} \; k_r k_s \cos(\alpha_r - \alpha_s)} \tag{4.1}$$

$$\alpha = \arctan \frac{\sum_{1}^{n}{}_{r} \; k_r \sin \alpha_r}{\sum_{1}^{n}{}_{r} \; k_r \cos \alpha_r} \; . \tag{4.2}$$

Se invece le molle (che ora per semplicità supporremo in numero di due) fossero accoppiate in serie si avrebbe

$$k = \frac{k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + 2 k_1 k_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}} \tag{4.3}$$

$$\alpha = \arctan \frac{k_1 \sin \alpha_2 + k_2 \sin \alpha_1}{k_1 \cos \alpha_2 + k_2 \cos \alpha_1} \; . \tag{4.4}$$

Come è naturale, un diverso accoppiamento degli organi elementari costituenti può dar luogo ad organi complessivi assai differenti sia per i caratteri puramente elastici sia per l'angolo di sfasamento.

Se però gli organi elementari hanno tutti uguale costante di sfasamento, il medesimo valore di α compete all'organo globale.

Il carattere delle formule trovate è strettamente dinamico; in condizioni statiche tutte le α_r devono intendersi nulle e risulta, come d'ordinario,

$$k = \sum_1^n{}_r\, k_r$$

per l'aggruppamento in parallelo;

$$\frac{1}{k} = \sum_1^n{}_r \frac{1}{k_r}$$

per l'aggruppamento in serie.

§ 2. - SISTEMI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ.

5. Oscillatori accoppiati in serie. – L'applicazione della legge elastico-dissipativa [1.1] a sistemi dotati di più gradi di libertà non presenta difficoltà alcuna. Tuttavia una trattazione riferita a coordinate lagrangiane arbitrarie non è possibile dato che, avendo in generale i vari organi elastici del sistema costanti di sfasamento diverse l'uno dall'altro, la scelta dei parametri lagrangiani è vincolata dalla condizione che a ciascuno di essi corrisponda uno, ben determinato, di detti organi. Per chiarire questo concetto ci riferiremo senz'altro a un esempio concreto, sufficiente del resto a indicare la via da seguire in ogni altro caso.

Consideriamo due oscillatori a molla accoppiati in serie (si tratta dello schema tipico d'una massa oscillante munita di un ammortizzatore). Sia m_1 la massa del primo di essi, *oscillatore principale*, m_2 la massa dell'altro, *oscillatore secondario*; le due molle abbiano caratteristiche k_1, α_1 e, rispettivamente, k_2, α_2. Chiamiamo poi q_1 e q_2 le elongazioni (algebriche) dell'una e dell'altra molla, che assumeremo come coordinate lagrangiane. Ciò posto, la forza elastica esercitata dalla prima molla sulla massa m_1 sarà espressa da $-k_1 e^{i\alpha_1} q_1$. La se-

conda molla dal suo canto eserciterà sulla massa m_1 una forza $k_2 e^{i\alpha_2} q_2$ e una forza uguale e opposta sulla massa m_2. Supposto, per semplicità, che la sollecitazione esterna si riduca a una forza sinusoidale $F_1 e^{i\omega t}$ agente sulla massa principale, le equazioni differenziali del moto si scriveranno

$$[5.1] \qquad \begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 e^{i\alpha_1} q_1 - k_2 e^{i\alpha_2} q_2 = F_1 e^{i\omega t} \\ m_2(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) + k_2 e^{i\alpha_2} q_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Il sistema [5.1] ammette una soluzione armonica in accordo di frequenza colla forza perturbatrice:

$$[5.2] \qquad q_1 = A_1 e^{i\omega t} \ , \quad q_2 = A_2 e^{i\omega t} \ ;$$

fatte le sostituzioni si ricavano i valori delle costanti complesse A_1 e A_2, i cui moduli danno l'ampiezza di oscillazione delle due masse.

A conti eseguiti, i quadrati di queste ampiezze risultano

$$[5.3] \qquad \begin{aligned} |A_1|^2 &= F_1^2 \frac{(m_2 \omega^2 - k_2 \cos \alpha_2)^2 + k_1^2 \sin^2 \alpha_2}{D^2} \\ |A_2|^2 &= F_1^2 \frac{m_2^2 \omega^4}{D^2} \ , \end{aligned}$$

avendo posto

$$\begin{aligned} D^2 = \{\omega^2 [m_1 m_2 \omega^2 + (m_2 - m_1) k_2 \cos \alpha_2 - m_2 k_1 \cos \alpha_1] + k_1 k_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\}^2 + \\ + \{\omega^2 [(m_2 - m_1) k_2 \sin \alpha_2 - m_2 k_1 \sin \alpha_1] + k_1 k_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\}^2 \ . \end{aligned}$$

La discussione della dipendenza di $|A_1|$ dai parametri m_2, k_2 e α_2 (caratteristiche dell'oscillatore secondario) avrebbe un notevole interesse per il problema dell'ammortizzazione dei sistemi vibranti, ma non è qui il caso di occuparsene.

Neppure insistiamo sull'esame esplicito delle vibrazioni spontanee alle quali compete il medesimo carattere smorzato già riconosciuto nel caso di un solo grado di libertà. Ci limitiamo a notare che per i sistemi a più gradi di libertà si accentua la divergenza già notata tra l'impostazione attuale e l'ordinaria impostazione dissipativa basata sull'intervento di resistenze viscose.

§ 3. - SISTEMI CONTINUI.

6. Vibrazioni di un'asta. - Considerata una sbarra elastica AB di lunghezza l, fissata ad uno o ad entrambi gli estremi (mediante vincoli opportuni: appoggi, incastri, ecc.) e assunto su essa un sistema di ascisse di origine A, indichiamo con $c(x, \xi)$ lo spostamento trasversale statico provocato nel punto di ascissa x ad opera di un carico unitario concentrato nel punto di ascissa ξ (funzione di influenza o di Green). Per studiare il problema dinamico dell'asta nel nostro schema dissipativo basta, seguendo lo stesso criterio adottato nei paragrafi precedenti, modificare l'impostazione classica sostituendo a $c(x, \xi)$ la funzione complessa $e^{-i\alpha} \cdot c(x, \xi)$, α essendo una costante di sfasamento propria del materiale costituente la sbarra. È con ciò implicito che questa si suppone costituita omogeneamente mentre non è affatto escluso che siano variabili le sue dimensioni trasversali.

Indicata con $\mu(x)$ la densità lineare dell'asta e con $p(x, t)$ l'intensità del carico diffuso su di essa, lo spostamento elastico trasversale $w(x, t)$ è individuato dall'equazione integro-differenziale

$$[6.1] \qquad e^{i\alpha} w(x, t) = \int_0^l c(x, \xi) \left[p(\xi, t) - \mu(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] d\xi \ .$$

Come nell'ordinario caso conservativo [1] anche ora tutto il procedimento risolutivo della [6.1] è subordinato alla risoluzione dell'equazione integrale omogenea *associata*

$$[6.2] \qquad u(x) = \sigma^2 \int_0^l c(x, \xi)\, \mu(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \ ,$$

cioè alla determinazione dei suoi autovalori

$$[6.3] \qquad \sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots\ldots, \sigma_\varrho^2, \ldots$$

---

[1] Cfr. ad es. G. Krall, *op. cit.*, vol. II, cap. XIII.

e delle autosoluzioni

[6.4] $$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots\ldots,\ u_\varrho(x),\ \ldots\ .$$

Le u_ϱ costituiscono, come è noto, un sistema chiuso e completo di funzioni ortogonali, normalizzabili.

Supposti noti questi elementi e le u_ϱ normalizzate, cominciamo a considerare le vibrazioni forzate. Ammesso che il carico vari armonicamente

[6.5] $$p(x,t) = p_0(x)\,e^{i\omega t}\ ,$$

poniamo, come di consueto,

[6.6] $$w(x,t) = v(x)\,e^{i\omega t}\ .$$

La [6.1] si riduce allora immediatamente a un'equazione integrale non omogenea che, posto

[6.7] $$f(x) = \int_0^l c(x,\xi)\,p_0(\xi)\,d\xi\ ,$$

si scrive

[6.8] $$e^{i\alpha}\,v(x) = f(x) + \omega^2 \int_0^l c(x,\xi)\,\mu(\xi)\,v(\xi)\,d\xi\ .$$

Per risolverla tentiamo la posizione

[6.9] $$v(x) = \sum_\varrho \mathrm{A}_\varrho\, u_\varrho(x)\ ,$$

le A_ϱ essendo costanti complesse da determinarsi. Sostituendo nella [6.8] e tenendo conto che le u_ϱ sono soluzioni della [6.2] (per $\sigma = \sigma_\varrho$) ortogonali e normali, dall'identificazione dei due membri si ricavano immediatamente i valori delle A_ϱ e quindi, ammessa la convergenza della serie, la ricercata soluzione $v(x)$. Tornando infine alla [6.6] e prendendone la parte reale, si ottiene per le vibrazioni forzate armoniche la soluzione

[6.10] $$w(x,t) = \sum_\varrho \frac{f_\varrho\, \sigma_\varrho^{\,2}\, u_\varrho(x)\, e^{i(\omega t - \Theta_\varrho)}}{\sqrt{\sigma_\varrho^{\,4} + \omega^4 - 2\omega^2 \sigma_\varrho^{\,2} \cos\alpha}}$$

con

$$[g.11] \qquad \Theta_\varrho = \arctan \frac{\sigma_\varrho^2 \sin \alpha}{\sigma_\varrho^2 \cos \alpha - \omega^2} \quad , \quad f_\varrho = \int_0^l f(x)\,\mu(x)\,u_\varrho(x)\,dx \ .$$

Si tratta d'un movimento armonico di frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$ costituito dalla sovrapposizione di infiniti moti armonici d'ugual frequenza ciascuno sfasato rispetto alla sollecitazione perturbatrice d'un angolo Θ_ϱ variabile con l'indice ρ.

Se il carico $p(x, t)$ non variasse con legge sinusoidale, basterebbe analizzarlo armonicamente e poi applicare i risultati precedenti in in corrispondenza a ciascuna armonica.

Collo stesso metodo dello sviluppo in serie di autofunzioni u_ϱ possono studiarsi le vibrazioni spontanee. Se della [6.1], posto $p(x, t) \equiv 0$, si ricercano soluzioni elementari del tipo

$$[6.12] \qquad w(x, t) = e^{zt} \textstyle\sum_\varrho B_\varrho u(x) \ ,$$

si perviene facilmente, operando alla FOURIER, alla determinazione dei valori (complessi) della z e delle B_ϱ, sì che in definitiva, passando dal complesso al reale, si ha per le vibrazioni libere la soluzione generale

$$[6.13] \qquad \begin{aligned} w(x, t) = {} & \textstyle\sum_\varrho u_\varrho(x)\, e^{-\sigma_\varrho \sin \frac{\alpha}{2} \cdot t} \ . \\ & \cdot \left[a_\varrho \cos\left(\sigma_\varrho \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t\right) + b_\varrho \sin\left(\sigma_\varrho \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t\right)\right] \ . \end{aligned}$$

L'isteresi elastica ha quindi per effetto, nel nostro schema, di smorzare ogni singola armonica in modo tanto più accentuato quanto più elevato è il suo tono. Il fattore di smorzamento è però semplicemente proporzionale alla frequenza, a differenza di quanto accade nell'impostazione viscosa in cui esso cresce col quadrato della frequenza [1].

---

[1] Cfr. G. KRALL, *op. cit.*, vol. I, cap. VI, pag. 342.

7. Sistemi continui tridimensionali. Impossibilità di propagazione di onde di discontinuità. – Le considerazioni precedenti si adattano anche ai sistemi continui tridimensionali introducendo un conveniente sfasamento nella classica corrispondenza che intercorre tra deformazioni e sforzi. Limitandoci ai corpi isotropi e omogenei, scriveremo la legge di Hooke in forma complessa introducendo in luogo dell'ordinario modulo E il modulo $E e^{i\alpha}$

$$
[7.1] \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E e^{i\alpha}}{1+\varkappa} \varepsilon_r - \frac{\varkappa E e^{i\alpha}}{(1+\varkappa)(1-2\varkappa)} \sum_1^3{}_s \varepsilon_s \\ \tau_r &= \frac{E e^{i\alpha}}{2(1+\varkappa)} \gamma_r \end{aligned} \right. \qquad (r = 1, 2, 3)
$$

($\varkappa =$ modulo di Poisson).

Al cambiamento operato sulla legge di Hooke ne corrisponde uno analogo per le equazioni indefinite del moto le quali, adoperando in luogo delle ordinarie costanti di Lamé λ e μ le costanti complesse $\lambda e^{i\alpha}$, $\mu e^{i\alpha}$, si scrivono, in assenza di forze di massa:

$$
[7.2] \qquad e^{-i\alpha} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_r} + \mu \Delta_2 u_r \qquad (r = 1, 2, 3)
$$

($u_r =$ componenti di spostamento; $\rho =$ densità cubica; $\Theta = \sum_1^3{}_s \frac{\partial u_s}{\partial x_s}$).

Di questa elastodinamica dissipativa ci limiteremo a indicare qualche carattere saliente.

In un mezzo elastico isotropo ordinario sono possibili, come è ben noto, due tipi distinti di onde di discontinuità (sia d'accelerazione che d'urto): onde longitudinali, propagantisi con velocità $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ e onde trasversali, procedenti con velocità $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Come si modificano questi risultati nell'impostazione attuale? Posto

$$
[7.3] \qquad \left\{ \begin{aligned} & u_r = u'_r + i u''_r \qquad (r = 1, 2, 3) \\ & \Theta' = \sum_1^3{}_s \frac{\partial u'_s}{\partial x_s}, \quad \Theta'' = \sum_1^3{}_s \frac{\partial u''_s}{\partial x_s}, \end{aligned} \right.
$$

ciascuna delle [7.2] si scinde nelle due equazioni

$$[7.4] \qquad \rho\left(\cos\alpha\,\frac{\partial^2 u'_r}{\partial t^2}+\sin\alpha\,\frac{\partial^2 u''_r}{\partial t^2}\right)=(\lambda+\mu)\,\frac{\partial\Theta'}{\partial x_r}+\mu\,\Delta_2 u'_r$$

$$[7.5] \qquad \rho\left(\sin\alpha\,\frac{\partial^2 u'_r}{\partial t^2}-\cos\alpha\,\frac{\partial^2 u''_r}{\partial t^2}\right)=(\lambda+\mu)\,\frac{\partial\Theta''}{\partial x_r}+\mu\,\Delta_2 u''_r$$

$$(r=1,2,3).$$

Vediamo se è possibile che nell'attraversamento d'una superficie mobile σ_t le sei funzioni u'_r, u''_r presentino, compatibilmente con le [7.4] e [7.5], una discontinuità del secondo ordine. Indicati con $\nu'_r\,(r=1,2,3)$ i parametri di discontinuità, con a la velocità d'avanzamento della σ_t, con N_1, N_2, N_3 i coseni direttori della normale alla σ_t nel punto di attraversamento, orientata nel verso d'avanzamento della σ_t e con $[\ \ ]$ un simbolo di brusca variazione, le ben note condizioni di compatibilità geometrico-cinematica (¹) si scrivono per le u'

$$[7.6] \qquad \left[\frac{\partial^2 u'_r}{\partial t^2}\right]=\nu_r' a^2 \quad , \quad \left[\frac{\partial^2 u'_r}{\partial t\,\partial x_j}\right]=-\nu'_r a\,N_j \quad ,$$
$$\left[\frac{\partial^2 u'_r}{\partial x_j\,\partial x_i}\right]=\nu_r' N_j N_i \qquad (r,i,j=1,2,3).$$

Formule analoghe, con altri parametri di discontinuità ν_r'' valgono per le u''. Tenuto conto di queste, le [7.4] e [7.5] danno le condizioni di compatibilità dinamica

$$[7.7] \qquad \begin{aligned} \rho(\cos\alpha\cdot\nu_r'+\sin\alpha\cdot\nu_r'')\,a^2 &= (\lambda+\mu)\,N_r\sum_s^{3}{}_1 N_s\,\nu_s'+\mu\,\nu_r' \\ -\rho(\sin\alpha\cdot\nu_r'-\cos\alpha\cdot\nu_r'')\,a^2 &= (\lambda+\mu)\,N_r\sum_s^{3}{}_1 N_s\,\nu_s''+\mu\,\nu_r'' \end{aligned}$$

$$(r=1,2,3).$$

Il sistema [7.7], lineare e omogeneo nelle sei incognite ν_r', ν_r'' $(r=1,2,3)$, non ammette, per α diverso da zero (e da π) e per a reale, soluzioni proprie (come si riconosce dall'esame del determinante

(¹) Cfr. ad es. T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Zanichelli, Bologna, 1931.

dei coefficienti); ne concludiamo che nel nostro mezzo *non può propagarsi alcun'onda di discontinuità del secondo ordine, nè trasversale nè longitudinale.* Lo stesso potrebbe ripetersi per le onde d'urto.

Il risultato negativo, essenzialmente legato al carattere dissipativo del mezzo, può mettersi in relazione con alcune classiche conclusioni di DUHEM relative ai mezzi viscosi (1). Naturalmente esso non esclude, come ora vedremo, la possibilità di propagazione di onde continue.

8. ONDE PIANE LONGITUDINALI. ASSORBIMENTO. – Cerchiamo, del sistema complesso [7.2] le soluzioni elementari corrispondenti ad altrettanti stati dinamici « rettilinei » paralleli per es. all'asse x_1, tal che sia cioè

$$u_1 = u_1(x_1, t) \ , \quad u_2 \equiv 0 \ , \quad u_3 \equiv 0 \ .$$

La prima equazione si riduce allora, tralasciando l'indice 1, divenuto superfluo, alla forma

$$e^{-i\alpha} \cdot \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ; \tag{8.1}$$

le altre due sono identicamente soddisfatte.

Col classico metodo della separazione delle variabili si riconosce una duplice serie di onde piane elementari compatibili colla [8.1], l'una a carattere espansivo e l'altra a carattere smorzato. La prima serie, fisicamente inaccettabile, va scartata per le stesse ragioni per cui al n. 2 è stata esclusa la seconda delle [2.2].

Rimane la serie delle onde smorzate (progressive o retrograde) la quale posto

$$w = \frac{\sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}{\cos \alpha} \ , \tag{8.2}$$

(1) Cfr. P. DUHEM, *Recherches sur l'Hydrodynamique* (II e III parte), « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 2ª serie, tomo III (1901) e tomo IV (1902). Cfr. anche: P. DUHEM, *Recherches sur l'Elasticité*, Paris, Gauthier-Villars, 1906.

si scrive, in forma reale,

$$[8.3] \qquad u_\varrho(x,t) = e^{\pm\frac{\nu_\varrho}{w}\tan\frac{\alpha}{2}\cdot x}\left[a_\varrho \cos \nu_\varrho\left(t \pm \frac{x}{w}\right) + b_\varrho \sin \nu_\varrho\left(t \pm \frac{x}{w}\right)\right]$$

dove le frequenze ν_ϱ vanno naturalmente determinate in base alle condizioni ai limiti, (supposte compatibili collo stato «rettilineo»). Lo smorzamento, tanto più accentuato quanto più notevole è lo sfasamento α, cresce in ragione diretta delle frequenze ν_ϱ, con la conclusione che un mezzo dotato d'isteresi assorbe di preferenza le onde di frequenza elevata.

A titolo di esempio, molto semplice, consideriamo un semispazio elastico il cui piano limite assumeremo come piano $x=0$, orientando l'asse x verso l'interno. Ammettiamo poi che tutti i punti di questo piano siano mantenuti in vibrazione armonica e di uguale ampiezza parallelamente all'asse x. Si avrà allora la condizione al contorno:

$$[8.4] \qquad u(0,t) = u_0 \cos \omega t \; .$$

Si vede subito che compatibile con tale condizione è una delle soluzioni elementari [8.3], pur di scegliere i segni inferiori e di porre $\nu_\varrho = \omega$, $a_\varrho = u_0$, $b_\varrho = 0$:

$$[8.5] \qquad u(x,t) = e^{-\frac{\omega}{w}\tan\frac{\alpha}{2} x} \cdot u_0 \cos \omega\left(t - \frac{x}{w}\right) .$$

Naturalmente per condizioni al contorno più complesse la soluzione si avrà mediante opportuna combinazione (per somma, serie, o integrale) di soluzioni elementari (in numero finito o infinito).