PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 3
pag. 21-26

INTERPRETAZIONE RELATIVISTICA DELLE AZIONI ELETTRODINAMICHE (*)

(Con due figure)

SANTE MALATESTA

SVMMARIVM. — Relativisticis animadversionibus ostendit Auctor electrodynamicas actiones non esse habendas nisi vires apparentes, quas relativus motus inter onera electrica et relationis systema, in quo observationes producuntur, gignat. Ex quo efficitur ut magnetica actio explicari possit, et singulae vectorum **H** et **B** proprietates aperte perspici.

1. - Si abbiano due fascetti di elettroni, paralleli, nel vuoto; gli elettroni si muovano di moto uniforme con velocità v e w, per cui i due fascetti possono rappresentarsi con due file, a e b, di cariche, parallele, indefinite, spostantesi uniformemente con le velocità v e w (fig. 1). Siano i_a e i_b le correnti, per cui le cariche distribuite sull'unità di lunghezza dei fascetti, apprezzate da uno sperimentatore posto in un sistema di riferimento S fermo, sono rispettivamente: $q_a = \frac{i_a}{v}$ e $q_b = \frac{i_b}{w}$. Vogliamo calcolare l'azione che si esercita fra la fila a e un elemento dl della fila b, la cui carica è $q_b\,dl$.

Supponiamo che la fila a sia solidale con un sistema S_1 in moto uniforme con velocita v nella stessa direzione e verso di a. Se l'osservatore in S vedeva la carica q_a nell'unità di lunghezza, vuol dire che, nel sistema in moto, la carica q_a è distribuita su una lunghezza:

$$[1] \qquad l_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \left(\text{dove} \quad \beta = \frac{v^2}{c^2}\right).$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, il 20 maggio 1945.

Ne risulta che nel sistema S_1 in moto, il campo elettrostatico, prodotto dalla fila a in un punto P_1, alla distanza r da essa, è:

$$E_1 = \frac{q_a}{2\pi\varepsilon_0 r}\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{2}$$

L'azione di questo campo su una carica $q_b\,dl$ che passi dal punto P_1 è indipendente dalla velocità della carica stessa (1); essa può dunque essere calcolata come se la carica $q_b\,dl$ fosse ferma in P_1:

$$dF_1 = -\frac{q_a q_b\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{3}$$

Un osservatore nel sistema di riferimento fermo S apprezzerà, sulla stessa carica, una forza dF la quale dipende dalla velocità v di S_1 e dalla velocità w di $q_b\,dl$ secondo la formola di trasformazione (2):

$$dF = \frac{1-\dfrac{vw}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,dF_1\,. \tag{4}$$

Dalla [3] e dalla [4] si ottiene:

$$dF = -\frac{q_a q_b\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{vw}{c^2}\right) = -\frac{q_a q_b\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_a q_b\,vw\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r c^2}\,. \tag{5}$$

L'osservatore nel sistema fermo S, attribuisce il primo addendo all'azione elettrostatica, che egli calcola non tenendo conto del movimento, e il secondo a un'azione elettrodinamica fra le correnti:

$$dF_{ed} = \frac{q_a q_b\,vw\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r c^2} = \frac{\mu_0 i_a i_b\,dl}{2\pi r}\,. \tag{6}$$

Essa è attrattiva o repulsiva a secondo che v e w hanno lo stesso segno o segno contrario e coincide con la forza elettrodinamica calcolata con la formola di LAPLACE. Questo ragionamento mostra che l'azione elettrodinamica può considerarsi una forza apparente dovuta al moto relativo degli elettroni rispetto al sistema di riferimento in cui si compiono le osservazioni.

---

(1) E. M. LEMERAY. *Le principe de Relativité*. Paris, 1916. Cap. V, pag. 85.

(2) *Loc. cit.*, nota 1, pag. 84, form. XV.

2. – Passiamo ora ad esaminare le azioni non più fra fascetti di elettroni ma fra correnti nei conduttori. Possiamo rappresentare schematicamente una corrente in un conduttore con una fila di cariche

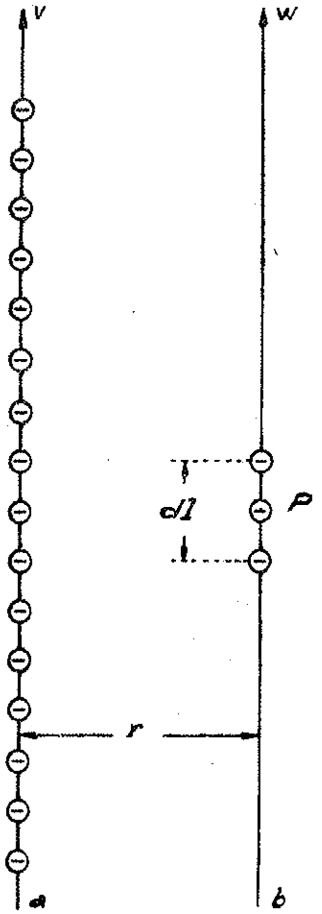

FIG. 1.

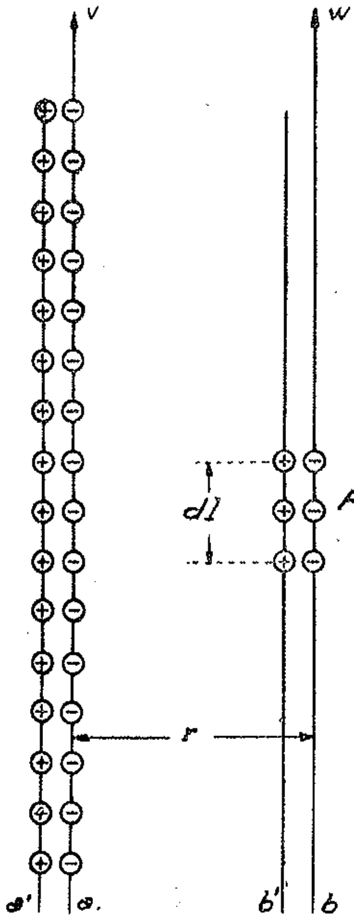

FIG. 2.

negative che scorre con velocità v accanto a una fila di cariche positive ferme rispetto al conduttore. Poichè per un osservatore posto in un sistema di riferimento fermo S, il conduttore fermo appare allo stato neutro, in questo sistema la carica positiva per unità di lunghezza deve considerarsi uguale alla carica negativa, e tale eguaglianza rimane anche quando il conduttore è percorso da corrente.

Supponiamo di avere due conduttori paralleli, indefiniti, a distanza r, percorsi rispettivamente dalle correnti $i_a = q_a v$ e $i_b = q_b w$. Essi sono rappresentati dalle file a, a' e b, b' della figura 2; per l'osservazione precedente è: $q_a = q_{a'}$, $q_b = q_{b'}$. Del conduttore bb', consideriamo un tratto elementare dl e calcoliamo separatamente l'azione delle file a e a' sulle file b e b'.

Per il calcolo dell'azione della fila a, in moto con velocità v, su b e b', procediamo nello stesso modo usato per i fascetti di elettroni. In un sistema S_1, in moto uniforme con la velocità v, la fila a è ferma e produce in un punto P_1 il campo elettrostatico dato dalla [2]. Questo agisce sulla carica $q_b\,dl$, di b o di b', nel punto P_1, con una forza:

$$[7] \qquad dF_1 = \mp \frac{q_a q_b\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\sqrt{1-\beta^2}\ .$$

Un osservatore posto nel sistema di riferimento fermo, troverà sulla stessa carica una forza diversa, che si calcola applicando alla [7] la formola di trasformazione [4], tenendo presente che la velocità della fila b è w, mentre quella della fila b' è zero. Si ottiene così:

$$[8] \qquad dF_{ab} = -\frac{q_a q_b\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{vw}{c^2}\right);$$

$$[9] \qquad dF_{ab'} = \frac{q_a q_b\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\ .$$

Il calcolo dell'azione che la fila a', ferma sul sistema di riferimento S, esercita sulle file b e b' è immediato, non occorrendo passaggi da un sistema all'altro. Si ha:

$$[10] \qquad dF_{a'b} = \frac{q_a q_b\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\ ;$$

$$[11] \qquad dF_{a'b'} = -\frac{q_a q_b\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\ .$$

L'azione complessiva fra i due conduttori sarà la somma delle singole azioni fra le file di cariche; si ha perciò:

$$[12] \qquad dF = \frac{q_a q_b\,vw\,dl}{2\pi\varepsilon_0 r c^2} = \frac{\mu_0 i_a i_b\,dl}{2\pi r}\ .$$

Essa si è dunque ridotta alla sola azione elettrodinamica fra le due correnti. Osserviamo ora che nei conduttori di rame è praticamente impossibile mantenere intensità di campo elettrico superiori a 10^{-1} V/m e in corrispondenza a questo campo la velocità di migrazione degli elettroni è dell'ordine di 0,3 mm/sec. Può dunque sembrare strano applicare le formole relativistiche a sistemi animati da moti così lenti; ciò nonostante il calcolo conduce all'azione elettrodinamica (1). Normalmente, quando le velocità sono così piccole, nell'espressione $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ viene trascurato $\frac{v^2}{c^2}$ di fronte a 1, per cui si ricade nella relatività galileiana. Nel nostro caso, invece, sarebbe erroneo trascurare $\frac{vw}{c^2}$ nella formola [8] in quanto, nel calcolo dell'azione complessiva, il termine di confronto, 1, scompare e $\frac{vw}{c^2}$ rimane considerato a sè stante. Si può poi osservare, dalla formola [12], che l'azione elettrodinamica non risulta necessariamente molto piccola, perchè la velocità degli elettroni è sempre moltiplicata per q, cioè, in definitiva, per il numero degli elettroni che è molto grande.

3. – Visto qual'è la natura delle azioni elettrodinamiche, cerchiamo qual'è l'origine della teoria classica del magnetismo e il significato dei vettori **H** e **B**.

Consideriamo la corrente come il flusso di un vettore $\boldsymbol{i}$, densità di corrente, attraverso una sezione del conduttore. Accanto a $\boldsymbol{i}$ consideriamo il vettore **K**, tale che: $\operatorname{curl}\mathbf{K}=\boldsymbol{i}$. Sia L una linea chiusa che circondi il conduttore e m una superficie qualunque che si appoggi ad essa. Per il teorema di Stokes si ha:

$$\int_m [\operatorname{curl}\mathbf{K}\, d\boldsymbol{m}]_s = \int_L [\mathbf{K}\, d\mathbf{L}]_s\,. \tag{13}$$

Ma:

$$\int_m [\operatorname{curl}\mathbf{K}\, d\boldsymbol{m}]_s = \int_m [\boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{m}]_s\,, \tag{14}$$

(1) A causa della impossibilità attuale di documentarci, non sappiamo se questo risultato sia stato altre volte messo in luce.

e $\int_m [\boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{m}]_s = i$ è la corrente nel conduttore. La relazione [13] diviene perciò:

$$[15] \qquad \int_{\mathrm{L}} [\mathbf{K}\, d\mathbf{L}]_s = i \ .$$

Da questa formola appare che il vettore **K** è quello che normalmente viene chiamato « intensità del campo magnetico » e viene indicato con **H**; mentre $\int_{\mathrm{L}} [\mathbf{K}\, d\mathbf{L}]_s$ è la cosidetta « forza magnetomotrice ». In realtà, l'esistenza del campo di **H** non è che una diversa interpretazione matematica dell'esistenza di una corrente elettrica. Applichiamo queste considerazioni al calcolo delle azioni elettrodinamiche: nel caso di un conduttore rettilineo ed indefinito, l'intensità di **H** in un punto P, a distanza r dall'asse del conduttore, è $\mathrm{H} = \frac{i}{2\pi r}$.
Sostituendo questo valore nella espressione [12] si ha:

$$[16] \qquad d\mathrm{F}_{ed} = \frac{\mu_0 i_a i_b\, dl}{2\pi r} = \mu_0 \mathrm{H}\, i_b\, dl = \mathrm{B}\, i_b\, dl \ .$$

Confrontiamo questa formola con l'espressione dell'azione elettrostatica fra una fila indefinita di cariche e un tratto elementare dl di un'altra fila di cariche, ad essa parallela e a distanza r:

$$[17] \qquad d\mathrm{F}_{es} = \frac{q_a q_b\, dl}{2\pi \varepsilon_0 r} = \mathrm{E}\, q_b\, dl \ .$$

È evidente l'analogia formale fra le due espressioni. È tale analogia che dà origine alla teoria classica dell'elettromagnetismo: in questa, l'adozione del vettore $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ consente il calcolo delle azioni fra correnti, cioè, in definitiva, lo studio del magnetismo, senza ricorrere alle considerazioni relativistiche.

Ringrazio il Prof. Nello Carrara e il Prof. Tito Franzini per l'aiuto e i consigli che mi hanno dato nello svolgimento del lavoro.