PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 23
pag. 235-250

FORMULE INTEGRALI E TOPOLOGIA NELLA TEORIA DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI COMPLESSE (*)

ENZO MARTINELLI

SVMMARIUM. — Adhibitis argumentationibus ex analysi situs desumptis, Auctor determinat, quod attinet ad functiones variabilium complexorum n, generales formulas integrales (quarum peculiares casus sunt theoremata Cauchiana), in quibus integrationis varietates qualibet sunt mensura, inter n et $2n-1$ posita.

In una memoria di prossima pubblicazione mi propongo di esporre con i necessari dettagli i risultati più generali che ho recentemente conseguito in un ordine d'idee già da me iniziato in una nota del 1937 [**6**], sviluppato in lavori successivi di B. SEGRE [**15**] e miei [**7**], [**8**], [**9**], [**10**], [**11**], e altresì collegato con ricerche di W. WIRTINGER [**18**]. Questo scritto non è che una nota preventiva di tale memoria (1).

I TEOREMI DI CAUCHY ELEMENTARI

1. – Ricordiamo le due classiche formule che esprimono il 1° ed il 2° teorema integrale di CAUCHY per una funzione analitica $f(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$:

[1] $$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = 0\ ,$$

[2] $$(2\pi i) f(\zeta) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz\ .$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 27 gennaio 1946.

(1) Che apparirà prossimamente negli « Annali di Matematica ».

Si sa bene che le condizioni cui devono soddisfare il cammino d'integrazione Γ_1 ed il punto $O(\zeta)$ per la validità delle [1], [2], hanno carattere topologico, se pure trattasi di condizioni così elementari che non occorrono nozioni e linguaggio topologici evoluti per enunciarle. Se per esempio si suppone semplicemente connessa la regione di olomorfia R_2 di $f(z)$ nel piano d'ARGAND-GAUSS (x, y), deve essere Γ_1 un cammino chiuso qualunque appartenente ad R_2, ed O un punto di R_2 interno a Γ_1.

Vedremo che, quando si cerca di estendere le [1], [2] alle funzioni di più variabili, a causa della maggior complessità e della mancanza di un'intuizione iperspaziale diretta, il lato topologico assume una posizione preminente.

Restiamo ancora per un momento nell'ambito delle funzioni di una sola variabile e lasciamo cadere l'ipotesi limitativa concernente R_2. È cosa elementare come vadano modificate le condizioni per la validità delle [1], [2]; enunciamo però le nuove condizioni facendo uso del linguaggio topologico. Γ_1 indichi ora un 1-ciclo orientato qualunque (eventualmente riducibile, cioè composto di più parti ciascuna delle quali è già un ciclo). Per la [1] basta sapere che Γ_1 è *omologo a zero* $(\Gamma_1 \sim 0)$ in R_2. Le condizioni per la validità della [2] sono invece:

[I_1] $\qquad \Gamma_1 \subset R_2 - O\ ,\quad$ ($\subset$ vale notoriamente contenuto)

[II_1] $\qquad \Gamma_1 \sim 0 \ \text{ in } \ R_2,$

[III'_1] $\qquad \mathrm{All}(\Gamma_1, O) = 1\ ,$

dove con $\mathrm{All}(\Gamma_1, O)$ s'indica il *coefficiente d'allacciamento* (1) di Γ_1 col punto O, cioè l'*indice di* KRONECKER $[K_1, \Gamma]$, o numero algebrico di

(1) Cfr. LEFSCHETZ [4], Cap. IV, § 5, e ALEXANDROFF-HOPF [1], Cap. XI. Le definizioni dei coefficienti dall'allacciamento che appaiono nei due trattati citati differiscono per il segno. Qui adottiamo quella del secondo trattato. Se Δ_p, Γ_q sono due cicli di dimensioni duali dello spazio lineare S_r $(p+q=r-1)$ ed M_{p+1} è una varietà contornata da Δ_p $(M_{p+1} \to \Delta_p)$, poniamo cioè $\mathrm{All}(\Delta_p, \Gamma_q) = [M_{p+1}, \Gamma_q]$, simboleggiando colla parentesi quadra l'indice di KRONECKER. Risulta allora $\mathrm{All}(\Gamma_q, \Delta_p) = (-1)^{pq+1}\mathrm{All}(\Delta_p, \Gamma_q)$. In particolare quando Δ_p si riduce ad un punto O $(p=0)$, essendo K_1 una semiretta orientata uscente da O, si ha $K_1 \to -O$, onde segue: $\mathrm{All}(\Gamma, O) = -\mathrm{All}(O, \Gamma) = [K_1, \Gamma]$.

intersezioni, di una semiretta K_1 di origine O col ciclo Γ_1. Se, invece della [III'$_1$], è soddisfatta la

$$[\mathrm{III}_1] \qquad \mathrm{All}(\Gamma_1, \mathrm{O}) = \mathrm{N} \,,$$

in luogo della [2] vale la formula più generale

$$[4] \qquad (2\pi i)\mathrm{N} f(\zeta) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz \ \text{(1)}.$$

ESTENSIONI DEL PRIMO TEOREMA DI CAUCHY

2. – Dopo queste premesse elementari, illustriamo rapidamente le note estensioni della [1] alle funzioni di n variabili $f(z_1, \dots, z_n)$. Accenniamo a queste perchè risulti più chiaro lo spirito delle estensioni delle formule [2] o [4], delle quali ultime estensioni vogliamo propriamente occuparci in questo lavoro.

Le variabili complesse $z_1, \dots, z_n$ possono rappresentarsi sia sopra n piani d'Argand-Gauss $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, sia sopra uno spazio euclideo reale a $2n$ dimensioni $S_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Se si fa uso della prima rappresentazione, apparentemente più comoda, si è tentati di ritenere come estensione soddisfacente della [1] la formula

$$[5] \qquad \int_{\Gamma_1^{(1)}} \int_{\Gamma_1^{(2)}} \cdots \int_{\Gamma_1^{(n)}} f(z_1, \dots, z_n)\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n = 0 \,,$$

dove $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_1^{(2)}, \dots, \Gamma_1^{(n)}$ sono n 1-cicli degli n piani d'Argand-Gauss sottopósti a condizioni analoghe a quelle occorrenti per la validità della [1]. Quando si faccia uso invece della rappresentazione in S_{2n}, l'integrale [5] s'interpreta come un integrale n-plo sopra un n-ciclo Γ'_n di S_{2n}, prodotto topologico di $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_1^{(2)}, \dots, \Gamma_1^{(n)}$. E appare così che l'$n$-ciclo Γ'_n ha caratteri topologici e di posizione in S_{2n} molto particolari.

(1) La formula vale anche per $\mathrm{N} = 0$; ma se si vuole una formula adatta ad esprimere il valore della f nel punto O, occorre supporre $\mathrm{N} \neq 0$. Analoghe avvertenze devono aversi nel seguito.

Poincaré [**14**] ha mostrato come la [5] rientri nella formula ben più generale:

$$[6] \qquad \int_{\Gamma_n} f(z_1, \ldots, z_n)\, d(z_1, \ldots, z_n) = 0 \ , \ (^1)$$

dove Γ_n è un qualunque n-ciclo orientato di S_{2n}, omologo a zero eventualmente con divisione ($\Gamma_n \approx 0$) nella regione di olomorfia R_{2n} della $f(z_1, \ldots, z_n)$.

Ma la [6] non dà ancora la più ampia estensione nota della [1]. Infatti la [6] esprime soltanto il primo teorema di una serie di n teoremi integrali distinti nei quali le varietà d'integrazione sono cicli di dimensioni rispettive $n, n+1, \ldots, 2n-1$. Gli n teoremi sono compendiati dalla formula:

$$[7] \qquad \int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \ldots, z_n) \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{z}_{\alpha_l}) = 0$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1),$$

dove Γ_{n+l} sono cicli $(n+l)$-dimensionali omologhi a zero in R_{2n}, $\bar{z}_\alpha$ è il complesso coniugato di z_α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ è una combinazione ordinata di classe l degli interi $1, \ldots, n$, e $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ sono parametri complessi *arbitrari* (²). Ciascuno dei precedenti teoremi, è altresì sufficiente a caratterizzare tra le funzioni *continue* $f(z_1, \ldots, z_n)$, quelle che sono analitiche (estensione dei teoremi di Morera [**12**] e di Severi [**16**]).

ESTENSIONI DEL SECONDO TEOREMA DI CAUCHY

3. – Veniamo finalmente alle estensioni della formula [2]. Dopo ciò che abbiamo detto nei confronti della [1], è ovvio che le più elementari estensioni della [2] cui si giunge immediatamente ponendosi dal punto di vista della rappresentazione delle variabili $z_1, \ldots, z_n$ sopra n piani, non possono venir considerate che molto particolari alla stessa stregua della [5]. Un risultato più generale, con un grado di generalità pari a quello della [6], è stato dato da me [**6**] per $n=2$ e per n

(¹) Con $d(z_1, \ldots, z_n)$ indichiamo il differenziale n-plo $dz_1 \ldots dz_n$, e analogamente nel seguito, usando i simboli della teoria delle forme differenziali a moltiplicazione esterna di Cartan (cfr. Cartan [**2**], Kähler [**3**]).

(²) Per $l = n-1$ cfr. W. Wirtinger [**18**]; per l qualunque e per i teoremi inversi cfr. il mio lavoro [**7**].

qualunque da B. SEGRE [15], il quale ha meglio precisato le condizioni topologiche occorrenti per la validità della formula, togliendo anche le ipotesi semplificative che io avevo introdotto. La formula è la seguente:

$$[8] \qquad (2\pi i)^n \mathrm{N} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_n} \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)} d(z_1, \dots, z_n) .$$

Per indicare le condizioni cui deve soddisfare l'n-ciclo d'integrazione Γ_n e per spiegare il significato dell'intero N, è necessaria qualche premessa topologica.

Consideriamo gli n spazi lineari *caratteristici* (1) $(2n-2)$-dimensionali, di equazioni rispettive:

$$z_1 = \zeta_1 \ ; \quad z_2 = \zeta_2 \ ; \quad \dots \ ; \quad z_n = \zeta_n \ .$$

Questi n spazi passano per il punto $\mathrm{O}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, che si suppone interno alla regione R_{2n} di olomorfia della $f(z_1, \dots, z_n)$, e costituiscono nel loro insieme una varietà $(2n-2)$-dimensionale T_{2n-2}, sulla quale diviene singolare la funzione integranda che appare nella [8]. Onde una prima condizione cui deve soddisfare Γ_n, è di appartenere ad R_{2n} senza incontrare T_{2n-2}. Per un ciclo Γ_n siffatto, si può introdurre un carattere topologico intero N, che definisce la posizione di Γ_n rispetto a T_{2n-2}, o meglio la condizione d'allacciamento del ciclo con T_{2n-2}. Si consideri all'uopo l'n-edro *solido* rettangolo K_n, n-dimensionale, individuato ed orientato da n semirette $t_1, \dots, t_n$ uscenti da O e parallele ordinatamente ai piani caratteristici $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n$ di S_{2n} (p. es. parallele od equiverse agli n semiassi positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$). Il contorno orientato H_{n-1} di K_n appartiene a T_{2n-2} ed è, entro la varietà aperta T_{2n-2}, un $(n-1)$-ciclo relativo, che si prova costituire di per sè solo una base per il gruppo di BETTI $(n-1)$-dimensionale. Pertanto la condizione d'allacciamento di Γ_n con T_{2n-2} è definita dal coefficiente d'allacciamento di Γ_n coll'unico ciclo indipendente H_{n-1} di dimensione duale, appartenente a T_{2n-2}. Si pone così:

$$[\mathrm{III}_{n,0}] \qquad \mathrm{N} = \mathrm{All}(\mathrm{H}_{n-1}, \Gamma_n) = [\mathrm{K}_n, \Gamma_n] \ ,$$

(1) Seguendo LEVI-CIVITA [5] e SEVERI [17], chiamiamo varietà caratteristiche $2k$-dimensionali di S_{2n} quelle che rappresentano varietà analitiche a k dimensioni complesse dello spazio complesso $(z_1, \dots, z_n)$.

dove con la parentesi quadra si simboleggia anche qui l'*indice di* KRONECKER (o numero algebrico di intersezioni) (¹).

Ciò posto, le condizioni per la validità della [8] sono, oltre la $[\mathrm{III}_{n,0}]$, le:

$$[\mathrm{I}_{n,0}] \qquad \Gamma_n \subset \mathrm{R}_{2n} - \mathrm{T}_{2n-2} \; ,$$

$$[\mathrm{II}_{n,0}] \qquad \Gamma_n \not\approx 0 \quad \text{in} \quad (\mathrm{R}_{2n} - \mathrm{T}_{2n-2}) + \mathrm{O} \; .$$

Per $n = 1$, T_{2n-2} e H_{n-1} si riducono ambedue al solo punto O, e K_n ad una semiretta uscente da O sul piano d'ARGAND-GAUSS (x, y); pertanto la [8] si riduce alla [4] e le condizioni $[\mathrm{I}_{n,0}]$, $[\mathrm{II}_{n,0}]$, $[\mathrm{III}_{n,0}]$ alle $[\mathrm{I}_1]$, $[\mathrm{II}_1]$, $[\mathrm{III}_1]$.

4. – La formula [8] può considerarsi – come si è detto – parallela all'estensione del 1° teorema di CAUCHY espressa dalla [6], in quanto in ambedue le formule appare un'integrazione sopra una varietà n-dimensionale vincolata da sole condizioni topologiche.

Un'altra formula, sempre estensione della [4], che è invece parallela alla [7] per $l = n - 1$, è la seguente, che ho dato in [7]:

$$[10] \qquad \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} \mathrm{N} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} \frac{f(z_1, \ldots, z_n) \sum_1^n {}_\beta (-1)^{\beta-1} (\bar{z}_\beta - \bar{\zeta}_\beta)\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{\beta-1}, \bar{z}_{\beta+1}, \ldots, \bar{z}_n)}{\left(\sum_1^n {}_k |z_k - \zeta_k|^2\right)^n} \; (^2) \; .$$

(¹) Gl'indici d'allacciamento e di KRONECKER s'intendono calcolati rispetto all'orientazione di S_{2n} definita dai semiassi positivi ordinati $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

(²) Nei lavori [**8**, **9**] ho dato alla formula [10] il seguente aspetto più espressivo:

$$[10^*] \qquad \frac{4\pi^n}{(n-2)!} \mathrm{N} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1, \ldots, z_n) \left(\frac{\partial}{\partial n} + i \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{1}{r^{2n-2}} \, d\Gamma_{2n-1} \, ,$$

dove: r rappresenta la distanza del punto $(z_1, \ldots, z_n)$ variabile su Γ_{2n-1} dal punto $\mathrm{O}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$; $d\Gamma_{2n-1}$ è l'elemento di volume di Γ_{2n-1}; $\dfrac{\partial}{\partial n}$ indica derivazione rispetto alla normale interna n a Γ_{2n-1} in $(z_1, \ldots, z_n)$; $\dfrac{\partial}{\partial s}$ indica derivazione rispetto alla direzione s, convenientemente orientata, che è tangente a Γ_{2n-1} ed appar-

Le condizioni cui deve soddisfare il ciclo $(2n-1)$-dimensionale Γ_{2n-1} per validità della [10] sono:

$$[\mathrm{I}_{n,n-1}] \qquad \Gamma_{2n-1} \subset \mathrm{R}_{2n} - \mathrm{O} \ ,$$

$$[\mathrm{II}_{n,n-1}] \qquad \Gamma_{2n-1} \sim 0 \ \text{ in } \ \mathrm{R}_{2n} \ ,$$

$$[\mathrm{III}_{n,n-1}] \qquad \mathrm{N} = \mathrm{All}\,(\Gamma_{2n-1}, \mathrm{O}) = [\mathrm{K}_1, \Gamma_{2n-1}] \ ,$$

indicando con K_1 una semiretta orientata uscente da O.

Si verifica subito che per $n=1$, anche la [10], come già la [8], si riduce alla [4], e le $[\mathrm{I}_{n,n-1}]$, $[\mathrm{II}_{n,n-1}]$, $[\mathrm{III}_{n,n-1}]$, alle $[\mathrm{I}_1]$, $[\mathrm{II}_1]$, $[\mathrm{III}_1]$.

5. - Passiamo finalmente alla formula generale, che comprende tutte le precedenti [2], [4], [8], [10]. In tale formula appare un'integrazione sopra un ciclo Γ_{n+l} di dimensione $n+l$ per $l=0, 1, 2, \dots, n-1$, onde essa risulta parallela alla formula [7]. Le [8], [10] corrispondono rispettivamente ai valori estremi di l: 0 ed $n-1$. Il caso $l=1$ l'ho già trattato in [**11**], e su di esso non mi fermo, rivolgendomi senz'altro al caso generale.

Premettiamo qualche considerazione topologica. Abbiamo visto che nelle [8], [10] le forme differenziali integrande presentano singolarità sopra varietà, T_{2n-2} ed O, rispettivamente di dimensione $2n-2$ e 0. Nella formula generale, la corrispondente varietà singolare, che indichiamo con $\mathrm{T}_{2n-2l-2}$, ha dimensione $2n-2l-2$. $\mathrm{T}_{2n-2l-2}$ è costituita dagli $\binom{n}{l+1}$ spazi lineari caratteristici $(2n-2l-2)$-dimensionali passanti per il punto $\mathrm{O}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, di equazioni

$$[12] \qquad z_{\alpha_1} = \zeta_{\alpha_1} \ , \quad z_{\alpha_2} = \zeta_{\alpha_2} \ , \quad \dots \ , \quad z_{\alpha_{l+1}} = \zeta_{\alpha_{l+1}} \ ,$$

che si ottengono in corrispondenza alle combinazioni $\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}$ degli interi $1, \dots, n$.

---

tiene con n allo stesso piano caratteristico di S_{2n}. Si dimostra che le direzioni s individuano su Γ_{2n-1} un sistema ∞^{2n-2} di linee chiuse $\{s\}$. È quasi superfluo osservare che, per $n=1$, la [10*] ha la sua analoga nella nota forma che può darsi alla formula di CAUCHY elementare (cfr. p. es. PICARD [**13**], pag. 113):

$$-2\pi f(\zeta) = \int_s f(z)\left(\frac{\partial}{\partial n} + i\frac{\partial}{\partial s}\right)\log r\, ds \ .$$

Si riconosce che può costruirsi nel modo seguente una base per il gruppo di Betti $(n-l-1)$-dimensionale entro $T_{2n-2l-2}$. Riprendiamo in considerazione l'n-edro solido rettangolo K_n individuato dalle n semirette $t_1, \ldots, t_n$ di origine O, di cui già nel n. 3. Per rendere più immediati il linguaggio e l'immagine, pensiamo K_n come proiezione da O di un $(n-1)$-simplesso k_{n-1}. Sopra k_{n-1} si considerino le $\binom{n}{l}$ faccie $(n-l-1)$-dimensionali, che sono anch'esse simplessi. Indichiamo con $k_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$ la faccia i cui vertici sono proiettati da O colle semirette $t_{\beta_1}, \ldots, t_{\beta_{n-l}}$. Sia $h_{n-l-2}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$ lo $(n-l-2)$-ciclo contorno di $k_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$. Per proiezione da O si ottiene lo $(n-l-1)$-ciclo relativo $H_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$, contorno dell'$(n-l)$-edro $K_{n-l}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$ proiezione di $k_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$. Risulta $K_{n-l}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$ prodotto topologico di $t_{\beta_1}, \ldots, t_{\beta_{n-l}}$: lo supponiamo orientato in conseguenza delle orientazioni delle semirette. Per il contorno $H_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$ fissiamo l'orientazione che è in relazione positiva con quella determinata su $K_{n-l}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$. Ebbene gli $\binom{n}{l}$ cicli $H_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$ appartengono a $T_{2n-2l-2}$, e costituiscono entro tal varietà la base per il gruppo di Betti $(n-l-1)$-dimensionale. Non si tratta di una base minima, giacchè tra i cicli passano le relazioni

$$[13] \qquad \sum_{1}^{n-l+1} {}_j \, (-1)^{j-1} H_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \ldots \beta_{n-l+1}} = 0 \ ,$$

per ogni combinazione $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l+1}$ degli interi $1, \ldots, n$. Se ne deduce che il numero di Betti $(n-l-1)$-dimensionale vale $\binom{n-1}{l}$, ed una base minima è costituita dai cicli

$$[14] \qquad H_{n-l-1}^{\gamma \beta_1 \ldots \beta_{n-l-1}} \ ,$$

che si ottengono, per un γ arbitrariamente scelto tra $1, \ldots, n$ e fissato, al variare della combinazione $\beta_1, \ldots, \beta_{n-l-1}$ degli interi $1, \ldots, \gamma-1, \gamma+1, \ldots, n$.

Se ora Γ_{n+l} è un $(n+l)$-ciclo di R_{2n}, non incontrante la varietà singolare $T_{2n-2l-2}$, la sua condizione d'allacciamento con $T_{2n-2l-2}$ risulta definita dai coefficienti d'allacciamento con i cicli $H_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}$, che hanno dimensione duale in S_{2n}. Porremo:

$$[15] \qquad N^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}} = \mathrm{All}\,(H_{n-l-1}^{\beta_1 \ldots \beta_{n-l}}, \Gamma_{n+l}) \ .$$

Gli $\binom{n}{l}$ interi $N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ risultano emisimmetrici rispetto agli indici; non sono fra loro indipendenti in quanto tra essi passano le relazioni seguenti che si deducono dalle [13]:

$$\sum_{1}^{n-l+1} {}_j (-1)^{j-1} N^{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_{n-l+1}} = 0 \ . \tag{16}$$

Si osservi inoltre che le [16] permettono di calcolare tutti gli $N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, una volta noti i coefficienti d'allacciamento $N^{\gamma\beta_1 \dots \beta_{n-l-1}}$ corrispondenti ai cicli di una base minima [14].

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l}$ è una permutazione degli interi $1, \dots, n$, e $\mathrm{cls}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l})$ indica la sua classe, porremo anche:

$$H_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = (-1)^{\mathrm{cls}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l})} H^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}} \ ,$$

$$N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = (-1)^{\mathrm{cls}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l})} N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}} \ . \tag{17}$$

Gli interi $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ risultano anch'essi emisimmetrici rispetto agli indici, ed è ovviamente:

$$N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \mathrm{All}(H_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}, \Gamma_{n+l}) \ . \tag{III$_{n,l}$}$$

6. – Siamo ormai in grado di scrivere la formula generale. Conveniamo d'indicare tra parentesi quadra alcuni valori, come per es. $[k_1, \dots, k_l]$, per intendere ch'essi vanno esclusi nella variabilità di un indice nella successione degli interi $1, \dots, n$. Così i simboli $\sum_{[k_1, \dots, k_l]} {}_i$, $\prod_{[k_1, \dots, k_l]} {}_i$ e simili rappresenteranno somme e prodotti dove l'indice i percorra gli interi $1, \dots [k_1, \dots, k_l] \dots, n$. Con $\sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l}$ s'intenderà che la somma è estesa a tutte le combinazioni ordinate degli indici $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ scelti tra $1, \dots, n$. Con $\sum_{\Sigma \varepsilon_r = l}$ s'intenderà infine che la somma è estesa in corrispondenza a tutti i gruppi di valori positivi o nulli degli interi ε_r soddisfacenti alla condizione $\sum \varepsilon_r = l$. Poniamo inoltre:

$$s_k = (z_k - \zeta_k)(\bar{z}_k - \bar{\zeta}_k) = |z_k - \zeta_k|^2 \ ;$$

$$\sigma_{k_1 \dots k_l} = s_{k_1} + \dots + s_{k_l} \ ;$$

$$\pi_{k_1 \dots k_l} = \prod_{[k_1, \dots, k_l]} {}_i \frac{1}{\sigma_{k_1 \dots k_l} + s_i} \ ;$$

$$\omega_{k_1 \dots k_l}^{\varepsilon_1 \dots [k_1, \dots, k_l] \dots \varepsilon_n} = \prod_{[k_1, \dots, k_l]} {}_i \frac{1}{(\sigma_{k_1 \dots k_l} + s_i)^{\varepsilon_i}} \qquad (\varepsilon_i \geqslant 0 \text{ interi}) ;$$

$\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ parametri complessi *arbitrari* emisimmetrici rispetto agl'indici.

La formula è la seguente:

$$[18] \qquad \frac{(2\pi i)^n}{l!}(-1)^l \left(\sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \right) f(\zeta_1, \ldots, \zeta) =$$

$$\int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \ldots, z_n) \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \ldots [\alpha_1, \ldots, \alpha_l] \ldots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \left\{ \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \pi_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \sum_{\Sigma e_r = l} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}^{e_1 \ldots [\alpha_1, \ldots, \alpha_l] \ldots e_n} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{l} \sum_{1}^{l}{}_{j} \sum_{[\alpha_1, \ldots, \alpha_l]}{}_{k} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} k \alpha_{j+1} \ldots \alpha_l} \pi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} k \alpha_{j+1} \ldots \alpha_l} \sum_{\Sigma e_r = l} \varepsilon_{\alpha_j} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} k \alpha_{j+1} \ldots \alpha_l}^{e_1 \ldots [\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, k, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_l] \ldots e_n} \right\} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{z}_{\alpha_l});$$

e le condizioni per la sua validità sono, oltre la $[\mathrm{III}_{n,l}]$ le:

$$[\mathrm{I}_{n,l}] \qquad \Gamma_{n+l} \subset R_{2n} - T_{2n-2l-2} \;;$$

$$[\mathrm{II}_{n,l}] \qquad \Gamma_{n+l} \not\approx 0 \quad \text{in} \quad (R_{2n} - T_{2n-2l-2}) + O \;.$$

In analogia con quanto si è avvertito al n. 1 per la formula elementare [4], se si desidera poter dedurre dalla [18] il valore di $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, occorre supporre:

$$\sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \neq 0 \;.$$

È sempre possibile soddisfare questa disuguaglianza mediante conveniente scelta dei parametri arbitrari $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, ad eccezione del caso in cui siano tutti nulli gl'indici $N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ (il che accade soltanto quando sia $\Gamma_{n+l} \approx 0$ in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$).

Può riuscire talora utile di scrivere la [18] nella seguente forma complementare:

$$[19] \qquad \frac{(2\pi i)^n}{(n-m)!}(-1)^{nm+n+m+\frac{m(m-1)}{2}} \left(\sum_{\beta_1 < \ldots < \beta_m} N^{\beta_1 \ldots \beta_m} \mu^{\beta_1 \ldots \beta_m} \right) f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) =$$

$$\int_{\Gamma_{2n-m}} f(z_1, \ldots, z_n) \sum_{\beta_1 < \ldots < \beta_m} (-1)^{\Sigma_r \beta_r} (\bar{z}_{\beta_1} - \bar{\zeta}_{\beta_1}) \ldots (\bar{z}_{\beta_m} - \bar{\zeta}_{\beta_m}) \left\{ \mu^{\beta_1 \ldots \beta_m} \pi^{\beta_1 \ldots \beta_m} \sum_{\Sigma e_{\beta_r} = n-m} \omega_{e_{\beta_1} \ldots e_{\beta_m}}^{\beta_1 \ldots \beta_m} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n-m} \sum_{1}^{m}{}_{h} \sum_{[\beta_1, \ldots, \beta_m]}{}_{i} \mu^{\beta_1 \ldots \beta_{h-1} i \beta_{h+1} \ldots \beta_m} \pi^{\beta_1 \ldots \beta_{h-1} i \beta_{h+1} \ldots \beta_m} \sum_{\Sigma e_r = n-m} \varepsilon_i \omega_{e_{\beta_1} \ldots e_{\beta_{h-1}} e_i e_{\beta_{h+1}} \ldots e_{\beta_m}}^{\beta_1 \ldots \beta_{h-1} i \beta_{h+1} \ldots \beta_m} \right\} \cdot$$

$$\cdot \, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots [\beta_1, \ldots, \beta_m] \ldots, \bar{z}_n) \;,$$

dove si è posto:

$$\sigma = s_1 + \dots + s_n ,$$

$$m = n - l ;$$

$$\pi^{\beta_1 \dots \beta_m} = \prod_1^m{}_j \frac{1}{\sigma - s_{\beta_1} - \dots [j] \dots - s_{\beta_m}} ;$$

$$\omega^{\beta_1 \dots \beta_m}_{\beta_1 \dots \varepsilon_{\beta_m}} = \prod_1^m{}_j \frac{1}{(\sigma - s_{\beta_1} - \dots [j] \dots - s_{\beta_m})^{\varepsilon_{\beta_j}}} ;$$

$\mu^{\beta_1 \dots \beta_m}$ parametri complessi *arbitrari*, emisimmetrici rispetto agl'indici.

7. – Si verifica facilmente che la [18] e la [19] si riducono alla [10], se si fa $l = n-1$ ovvero $m = 1$ rispettivamente. La verifica è più comoda sulla [19]. Si osservi invero che in tal caso risulta:

$$\pi^\beta = \frac{1}{\sigma} , \quad \omega^\beta_\varepsilon = \frac{1}{\sigma^\varepsilon}$$

e che

$$N^1 = N^2 = \dots = N^n ,$$

ciò che discende dalle [16]. Si riconosce inoltre che il valore comune dei coefficienti N^i uguaglia il coefficiente N definito dalla $[III_{n,n-1}]$. Pertanto la [19] diviene:

$$\frac{-(2\pi i)^n}{(n-1)!} (\textstyle\sum_\beta \mu^\beta) f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) =$$

$$\int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1, \dots, z_n) \textstyle\sum_\beta (-1)^\beta (\bar{z}_\beta - \bar{\zeta}_\beta) \displaystyle\frac{1}{\sigma^n} \left\{ \mu^\beta + \frac{1}{n-1} \sum_{[\beta]}{}_i (n-1) \mu^i \right\} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots [\beta] \dots, \bar{z}_n),$$

che, soppresso il fattore inessenziale $-\sum_\beta \mu^\beta$, coincide colla [10].

Colla stessa facilità si verifica che la [18] si riduce per $l = 1$ alla formula già data in [**11**] (¹).

Qualche avvertenza occorre se si vuole ottenere la [8] come caso particolare delle [18] o [19], facendo in esse $l = 0$ o $m = n$ rispettivamente. Invero, per tali valori di l e di m, una parte delle espres-

(¹) Si tenga conto però che la definizione adottata nel lavoro cit. per i coefficienti d'allacciamento differisce per il segno da quella qui adottata.

sioni che appaiono nelle [18] o [19] perde significato. D'altronde se si trascura questa parte, si vede immediatamente che si ricade effettivamente nella [8].

8. - Accenniamo infine alle linee generali del procedimento col quale abbiamo stabilito la formula [18].

Il *teorema di dualità* di ALEXANDER assicura l'esistenza di due basi duali per i gruppi di BETTI $(n-l-1)$-dimensionale e $(n+l)$-dimensionale, entro $T_{2n-2l-2}$ ed entro $S_{2n}-T_{2n-2l-2}$ rispettivamente. Si costruisce nel modo seguente una base $(n+l)$-dimensionale, duale di quella $(n-l-1)$-dimensionale costituita dai cicli [14].

Si considerino la varietà $A_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ di S_{2n} di dimensione $n+l$, definite dalle equazioni

$$[20] \qquad \begin{gathered} |z_1-\zeta_1|=|z_2-\zeta_2|=\ldots[\alpha_1,\ldots,\alpha_l]\ldots=|z_n-\zeta_n|=r\,, \\ |z_{\alpha_1}-\zeta_{\alpha_1}|\leqslant r,\ldots,|z_{\alpha_l}-\zeta_{\alpha_l}|\leqslant r\,, \end{gathered}$$

per ogni combinazione $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ degli interi $1,\ldots,n$. Supponiamo $A_{n+l}^{\alpha\ldots\alpha_l}$ orientata mediante l'$(n+l)$-edro di direzioni uscenti dal punto $x_1=\ldots=x_n=r$, $y_1=\ldots=y_n=0$, ordinatamente parallele agli assi positvi $y_1,\ldots,y_n,x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_l}$ ed orientate come questi. Le varietà

$$[21] \qquad \Gamma_{n+l}^{\alpha_1\ldots\alpha_l}=\sum_{1}^{l+1}{}_i\,(-1)^{i-1}\,A_{n+l}^{\alpha_1\ldots[i]\ldots\alpha_{l+1}}$$

risultano allora $(n+l)$-cicli, dei quali i seguenti $\binom{n-1}{l}$

$$[22] \qquad \Gamma_{n+l}^{k\alpha_1\ldots\alpha_l}$$

per k arbitrariamente fissato ed $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ una qualunque combinazione degli interi $1,\ldots[k]\ldots,n$, costituiscono una base $(n+l)$-dimensionale cercata. I mutui coefficienti d'allacciamento delle due basi duali [14], [22] risultano:

$$[23] \qquad \mathrm{All}\,(H_{\gamma_1\ldots\gamma_l},\Gamma^{k\alpha_1,\ldots\alpha_l})=\begin{cases}0 & \text{per } (\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\neq(\gamma_1,\ldots,\gamma_l)\\ (-1)^l & \text{per } (\alpha_1,\ldots,\alpha_l)=(\gamma_1,\ldots,\gamma_l)\end{cases}$$

$$(\alpha_1<\ldots<\alpha_l,\ \gamma_1<\ldots<\gamma_l)\,.$$

Ora, in virtù della condizione $[\mathrm{II}_{n,l}]$, in un intorno arbitrario di $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ può trovarsi un $(n+l)$-ciclo Δ_{n+l} omologo in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$ ad un conveniente multiplo $p\Gamma_{n+l}$ del ciclo d'integrazione Γ_{n+l} (p intero non nullo). D'altra parte, assumendo abbastanza piccolo il numero reale r che appare nelle equazioni [20] delle varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, si può fare in modo che i cicli base $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ appartengano al predetto in-intorno di O; onde risulta:

$$[24] \qquad p\Gamma_{n-l} \sim \Delta_{n+l} \sim \sum_{[k]\,\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l} \quad \text{in} \quad R_{2n} - T_{2n-2l-2} ,$$

dove $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ sono convenienti interi.

Valutando gl'indici d'allacciamento delle varietà a primo e a terzo membro della [24] con i cicli $H_{\gamma_1 \ldots \gamma_l}$, e tenendo conto delle [15], [17], [23], si ottiene $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} = (-1)^l p N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$. Pertanto la [24] può scriversi:

$$[25] \qquad p\Gamma_{n+l} \sim (-1)^l p \sum_{[k]\,\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l} \quad \text{in} \quad R_{2n} - T_{2n-2l-2} .$$

Cio premesso, si dimostra che la forma differenziale integranda a secondo membro nella [18], che indicheremo succintamente con

$$\varphi = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{z}_{\alpha_l}) ,$$

risulta regolare ed *integrabile* in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Questo significa che il differenziale esterno di Cartan $d\varphi$ è identicamente nullo in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$. In queste condizioni si può, per il calcolo dell'integrale, sostituire a Γ_{n+l} un ciclo omologo in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$, senza alterare il risultato. Pertanto, tenuto conto della [25], il secondo membro della [10] vale:

$$[26] \qquad (-1)^l \sum_{[k]\,\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \int_{\Gamma^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}} \varphi .$$

Ricordando la definizione [21] dei cicli $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ e le relazioni [16] intercedenti fra gl'indici $N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$, la [26] si trasforma facilmente nella

$$(-1)^l \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \int_{A^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}} \varphi ;$$

ed infine, tenuto conto delle equazioni [20] delle varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha}$, nella:

$$[27] \qquad (-1)^l \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \int_{A^{\alpha_1 \dots \alpha_l}} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \, d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}) .$$

Restano da calcolare gli integrali indicati sopra $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$. Si riesce nello scopo facendo tendere r a zero, ciò che non altera il risultato globale data l'arbitrarietà di r. Si stabilisce per tal via che la [27] si riduce al primo membro della formula [18], la quale risulta così dimostrata.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. ALEXANDROFF-H. HOPF, *Topologie.* I (Springer, Berlin, 1935).

[2] E. CARTAN, *Leçons sur les invariantes intégraux.* (Hermann, Paris, 1922).

[3] E. KÄHLER, *Einfürung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen.* (Teubner, Leipzig, 1934).

[4] S. LEFSCHETZ, *Topology.* (A. M. S., New York, 1930).

[5] T. LEVI-CIVITA, *Sulle funzioni di due o più variabili complesse.* « Rendiconti R. Acc. Lincei », 24 (1905).

[6] E. MARTINELLI, *La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse.* « Rendiconti R. Acc. Lincei », 25 (1937).

[7] — *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse.* « Memorie R. Acc. d'Italia », 9 (1938).

[8] — *Intorno alla teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse.* « Atti II Congresso U. M. I. » (Bologna, 1940).

[9] — *Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse mediante l'ausilio del calcolo differenziale assoluto.* « Memorie R. Acc. d'Italia », 12 (1941).

[10] — *Sulla formula di Cauchy n-dimensionale e sopra un teorema di Hartogs nella teoria delle funzioni di n variabili complesse.* « Comm. Math. Helvetici », 17 (1944-45).

[11] — *Formula di Cauchy (n + 1)-dimensionale per le funzioni analitiche di n variabili complesse.* « Comm. Math. Helvetici », 18 (1945-46).

[12] G. MORERA, *Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa.* « Rendiconti Ist. Lombardo », 19 (1886).

[13] E. PICARD, *Traité d'analyse.* (Gauthier-Villars, Paris, 1926), t. II.

[14] H. POINCARÉ, *Sur les résidus des intégrales doubles.* « Acta Mathematica », 9 (1887).

[15] B. Segre, *Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n-pli nella teoria delle funzioni di n variabili complesse.* « Atti I Congresso U. M. I. » (Bologna, 1937).

[16] F. Severi, *Sur une propriété fondamentale des fonctions analytiques de plusieurs variables.* « Comptes rendus », 192 (1931).

[17] — *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse.* « Rendiconti Sem. Mat. Roma », 7 (1931).

[18] W. Wirtinger, *Ein Integralsatz über analytische Gebilde in Gebiete von mehreren Komplexen Veränderlichen.* « Monatshefte für Math. und Physik» », 45 (1937).