PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 17
pag. 169-186

SUR L'ALLURE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITÉ ESSENTIELLE (*)

M. SILVIO MINETTI

SVMMARIVM. — Hic breviter referuntur enunciata permulta (quorum demonstratio in proxima commentatione dabitur) de ratione qua functio holomorpha se gerit prope aliquod suum punctum singulare essentiale, quae enunciata apparent inter simpliciores et inexpectatas analyticarum functionum proprietates. Hac ratione in magnam partem patefit influxus quem punctum singulare essentiale exercet in distributione valorum functionis circa ipsum.

INTRODUCTION

1. - Il s'agit simplement d'un bref Mémoire divisé en 4 parties successives dans lesquelles je donnerai des nouvelles propositions qui se rapportent d'un côté aux travaux esquissés, sur le sujet indiqué, de l'école scandinave et française (LINDELÖF-IVERSEN et MONTEL), d'un autre côté aux travaux, bien connus, sur le même sujet, de M. JULIA (droites de Julia) et de M. M. OSTROWSKY, BIEBERBACH, MILLOUX, CARLEMANN, VALIRON, NEVANLINNA etc. [1]. J'ai cherché pour tous ces

(*) Nota presentata dell'Accademico pontificio Ugo Amaldi il 19 novembre 1945.

[1] Pour s'orienter sur le sujet on peut consulter: VALIRON, «Mémorial des Sc. Math.», fasc. II, § 9 pag. 15; § 11 pag. 18; § 12 pag. 20; § 20 pag. 33, 34 et 35; § 21 pag. 35. - VALIRON, «Mém. des Scienc. Math.», fasc. XXXVIII, § 10 pag. 21, 22; § 11 pag. 23, 24 et 25; § 12 pag. 26. - JULIA, «Leçons sur les fonctions uniformes etc.», Paris G. V. 1923, dans l'éspece le § 62 pag. 97. - MONTEL, «Ann. Ec. Norm. Sup.», 1916. - JULIA, «Ann. Ec. Norm. Sup.», 1919. - Puis OSTROWSKY, «Math. Zeit.», Bd. 24, 1925. - Puis BIEBERBACH, «Math. Zeit.», t. II et t. III; MILLOUX, C. R. Ac. Sc., t. 176 et sa thèse: «Journ. de Math.», 1924. pag. 345. - NEVANLINNA R., «Acta Soc. Sc. Fennicae», t. 50. - VALIRON, «Bull. Soc. Math.», t. 45; C. R. Ac. Sc., t. 166; «Ann. Ec. Norm.», 1922. - CARLEMANN, «Archiv för Math.», t. 15.

problèmes de pousser mes investigations jusqu'aux bouts possibles et j'ai eu ainsi l'occasion de rencontrer dans l'Analyse, si l'on veut même par hasard, quelque théorème (et bien plus d'un) qui, depuis le célèbre théorème de M. LANDAU de 1904, semblent être parmi les plus remarquables et même les propositions les plus inattendues de la théorie des fonctions.

Je me bornerai ici à énoncer les résultats auxquels je suis parvenu et qui ont été déjà l'objet de discussions nombreuses et approfondies parmi l'école mathématique de Rome et, en particulier, de la part de M. M. les Proff. BOMPIANI, FANTAPPIÈ, PICONE et SEVERI (1).

Ce bref résumé ne contient d'autre part que quelques-uns des principaux théorèmes que j'avais établis depuis longtemps (Cagliari 1942) et qui, complétement remaniés et singulièrement accrus, figurent dans un important Mémoire, présenté à cette Académie dès le 20 juin 1944), Mémoire, qui n'a pas pu encore paraître dans les Commentactiones de cette Académie à cause des circonstances.

DEUX MOTS D' ENSEMBLE SUR LE CONTENU DES QUATRE PARTIES SUIVANTES: I, II, III, IV

Dans la I$^{\text{ère}}$ partie après avoir donné quelques définitions j'introduis de nouveaux concepts qui jouent dans tout ce qui suit un rôle tout à fait essentiel.

Dans la II$^{\text{ème}}$ nous verrons ce qu'il arrive pour une $f(z)$ dans un secteur S_{np} non privilégié (2), dans lequel, c'est-à-dire, la $f(z)$ admet (outre que ∞) deux valeurs exceptionnelles finies et distinctes a et b $(a \neq b)$. L'école scandinave (LINDELÖF-IVERSEN) et l'école française

(1) Cela au cours de quatre conférences que j'ai tenues en Mai 1945 à l'Institut Royal de Hautes Math. de Rome. — Je saisis ici l'occasion de remercier publiquement en particulier M. le Prof. Picone pour les subtiles et sagaces observations qu'il bien voulut me faire à ce sujet et qui éclaircirent singulièrement les choses.

(2) On suppose ici: $f(z)$ fonction holomorphe ayant au point $z=0$ une singularité essentielle, S_{np} un secteur du plan des z ayant $z=0$ pour sommet. Voir pag. 138 et pag. 141.

(Montel) y avaient travaillé. On y verra surtout à côté de plusieurs nouvelles simples propriétés de limitation et de convergence, une propriété bien singulière de $f(z)$, à savoir: *sa convergence dans un* S_{np} *vers une valeur exceptionnelle est complètement indépendante des arguments de points de l'ensemble sur lequel cette convergence a lieu.*

Dans la III$^{\text{ème}}$ nous étudierons le théorème de Picard dans un secteur, problème dans lequel rentrent d'un côté les recherches de M. Lindelöf et Iversen et d'un autre côté plusieurs travaux de M. M. Bieberbach, Valiron et Milloux.

On verra ici à quel degré de généralité nous avons eu occasion de parvenir dans ce genre de questions.

C'est dans cette partie que nous exposerons un théorème qui doit être considéré comme le théorème plus expressif de tout notre Mémoire.

On le verra à sa place, nous renonçons ici à le synthétiser.

Dans la IV$^{\text{ème}}$ nous étudierons, enfin, la caractérisation de rayons privilégiés r_p, issus de $z=0$, tels que dans tout leur voisinage angulaire se produit le phénomène Picard (1). Ces rayons r_p sont donc, au moins probablement (2), plus généraux que ceux de M. Julia.

Même ici apparaîtra un fait analytique nouveau et insoupçonné: *Un rayon* r (issus de $z=0$) *peut être caractérisé comme rayon privilégié* r_p *seulement de l'allure de la* $f(z)$ *sur des simples suites de points convergentes à zéro reposant « entièrement et seulement » sur* r (3).

Avertissement. – Dans tout ce qui suit j'ai cru convenable de reporter, argument pour argument, en premier lieu les résultats jusqu'ici connus a ce sujet, et puis, rapidemment ceux que j'ai eu occasion d'établir.

Ceci rendra plus aisée l'évaluation immédiate du chemin parcouru.

---

(1) Suivant lequel la $f(z)$ y acquiert, et un nombre infini de fois, toutes valeurs finies sauf une au plus.

(2) En vertu de la question Bloch soulevée dès 1926 (voir Bloch, « Mém. Sc. Math. », fasc. XX, III, 15, pag. 16, septième ligne).

(3) Tandis que jusqu'ici, même pour la caractérisation des rayons r de Julia, qui sont au moins probablement moins généraux des rayons privilégiés r_p, on exigeait des conditions superficielles.

I^ère PARTIE

Définitions et nouveaux concepts

1. – Soient une fois pour toutes:

a) *Définition du domaine*: S un secteur du plan des $z = \rho e^{i\varphi}$ de sommet, par exemple, $z = 0$ et ultérieurement défini par les inégalités $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$, $(\varphi_1 \mp \varphi_0)$ (¹).

b) *Définition de la fonction*: $f(z)$ une fonction holomorphe dans S mais ayant en $z = 0$ une singularité essentielle (qui, par rapport au plan des z, peut être isolée ou non).

c) *Définition des ensembles considérés*: E_α un ensemble de points $P_n = \rho_n^{(\alpha)} e^{i\varphi_n^{(\alpha)}}$ de S convergente à $z = 0$ (²).

d) *Définition de convergence à zéro de l'intérieur du domaine*: On dira que E_α converge à $z = 0$ « de l'intérieur de S » si $\rho_n^{(\alpha)}$ tendant à zéro on a quel que soit l'indice n, $\varphi_0 + \sigma \leqslant \varphi_n^{(\alpha)} \leqslant \varphi_1 - \sigma$ avec $\sigma > 0$ fixé à l'avance et, bien entendu, tel que $\varphi_1 - \sigma > \varphi_0 + \sigma$. En outre: un couple d'ensembles E_1 et E_2 chacun du type E_α, et tous les deux convergents à zéro de l'intérieur de S, sera désigné par $C(E_1, E_2)$.

Tous les E_α que nous considérerons ensuite satisferont à la condition *d*).

e) *Définition de suite mixte bornée par rapport à une constante K*: Si E_1 et E_2 sont deux ensembles E_α, j'appellerai « suite mixte bornée » extraite du couple $C(E_1, E_2)$ une suite du type

$$\frac{\rho_{n_p^{(1)}}}{\rho_{n_{q_p}^{(2)}}}, \ (\rho_{n_{q_p}^{(2)}} \leqslant \rho_{n_p^{(1)}}) \ \text{ou} \ \frac{\rho_{n_p^{(2)}}}{\rho_{n_{q_p}^{(1)}}}, \ (\rho_{n_{q_p}^{(1)}} \leqslant \rho_{n_{q_p}^{(2)}}), \ p = 1, 2, 3, \ldots,$$

qui soit bornée (³).

(¹) Il apparaîtra évident de ce qu'il suit qu'on pourrait, plus généralement, considérer, au lieu de S, un domaine quelconque Δ simplement connexe duquel $z = 0$ soit point frontière.

(²) On verra aisément pourquoi j'adopte le symbole E_α, c'est-à-dire la lettre E affectée d'un indice α.

(³) L'élément générique $\rho_{n_{q_p}}^{(2)}$ de la suite des valeurs des ρ qui figure au dénominateur, on l'aurait pu indiquer, bien entendu, avec la notation, par exemple,

Et si la suite $\frac{\rho_{n_p}^{(1)}}{\rho_{n_{q_p}}^{(2)}}$ (par exemple), satisfait, quelle que soit la valeur de l'indice p, à la condition $\frac{\rho_{n_p}^{(1)}}{\rho_{n_{q_p}}^{(2)}} < \mathrm{K}$, elle sera dite « suite mixte bornée par rapport à la constante K », et elle sera désignée par le symbole $\sigma(\mathrm{K})$.

2. – Cela posé, j'introduis les nouvelles définitions fondamentales suivantes qui jouent dans tout ce qui suit un rôle tout à fait essentiel:

I$^{\text{ère}}$) Un ensemble E_α sera dit *hypotendant à zéro* et désigné avec le symbole E_{hyp} si l'ensemble des valeurs $\frac{\rho_n^{(\alpha)}}{\rho_{n+1}^{(\alpha)}}$, $(\rho_{n+1}^{(\alpha)} \leqslant \rho_n^{(\alpha)})$ est borné.

II$^{\text{ème}}$) Dans le cas contraire E_α sera dit *hypertendant à zéro.*

III$^{\text{ème}}$) Le couple $\mathrm{C}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ sera dit *hypertendant à zéro* si avec les éléments de E_1 et de E_2 on ne peut pas donner naissance à aucune suite mixte bornée $\sigma(\mathrm{K})$.

IV$^{\text{ème}}$) Dans le cas contraire le couple $\mathrm{C}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ sera dit *normal.* E_1 et E_2 donneront donc naissance (avec leurs éléments) à, au moins, une suite mixte bornée $\sigma(\mathrm{K})$.

V$^{\text{ème}}$) Le couple $\mathrm{C}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ sera dit *régulier* si à chaque suite S_1, extraite de E_1, correspond une suite S_2, extraite de E_2, telle que $\mathrm{C}(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2)$ est normal, et réciproquement en changeant E_1 avec E_2.

VI$^{\text{ème}}$) $\mathrm{C}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ sera dit, enfin, uniformément régulier si, $\mathrm{C}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ étant déjà régulier, il existe une même constante $\mathrm{K} > 0$ telle que pour chaque suite S_1 extraite de E_1 il existe une suite S_2 extraite de E_2 telle que $\mathrm{C}(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2)$ donne lieu à, au moins, une suite mixte bornée par rapport à K, et réciproquement en changeant E_1 avec E_2. Le couple $\mathrm{C}(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2)$ est donc normal. Quelquefois on précisera la chose en disant que le couple $\mathrm{C}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ est uniformément régulier par rapport à la constante K.

ρ_{m_p} mais je préfère la notation que j'ai adoptée. Dans cette notation, c'est-à-dire dans $\rho_{n_{q_p}}^{(2)}$, on doit entendre $q_p = q(p)$ avec $q(p)$ entier positif pour p entier positif.

3. – Il suit immédiatement que:

a) Si $E_1 \equiv E_2 \equiv E_\alpha$, $C(E_1, E_2) = C(E_\alpha, E_\alpha)$ n'est pas hypertendant à zéro.

b) Si E_2 est obtenu de E_1 seulement par variations arbitraires (égales ou différentes de zéro et même variables de point à point) des arguments des points de E_1, $C(E_1, E_2)$ est un (particulier) couple d'ensembles uniformément régulier.

On démontre en outre la suivante

Propriété fondamentale. – Si E_1 est hypotendant à zéro, $C(E_1, E_2)$, est, quel que soit E_2, normal.

Donc:

Condition nécessaire pour que $C(E_1, E_2)$ soit hypertendant à zéro est que ni E_1, ni E_2, soient hypotendant à zéro.

et:

Condition suffisante pour que $C(E_1, E_2)$ soit normal est que E_1 ou E_2 soit hypotendant à zéro.

Observation. – A ce point on peut bien justement se demander: La notion d'ensemble hypotendant à zéro (qui, comme on le verra dans la suite, joue dans notre spéculation analytique un rôle tout à fait essentiel) est-elle un pur artifice de calcul ou bien rentre-t-elle dans la nature des choses?

Un beau théorème de M. Montel de 1916 (1) et que j'avais, dans mes recherches, incidemment retrouvé éclaircit cette question fondamentale; c'est le suivant:

« Si $f(z)$ est holomorphe autour de l'origine $z = 0$; si $z = 0$
« est un point singulier essentiel de $f(z)$; si dans le voisinage de $z = 0$,
« $f(z)$ admet une valeur exceptionnelle finie, par exemple $f(z) = 0$; si
« $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ sont les modules des racines de l'équation $f(z) - a = 0$,
« $(a \neq 0)$ rangés par ordre de grandeur décroissante on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_{n+1}}{r_n} = 1$ ».

(1) Voir MONTEL, « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 33, 1916, pag. 253 et 254.

L'ensemble des racines de la $f(z) - a = 0$ [quel que soit $a \neq$ de la valeur exceptionnelle zéro que l'on a admise pour la $f(z)$] est bien donc, toujours, un ensemble hypotendant à zéro; il est, de plus, un bien particulier ensemble de ce type [1].

IIème PARTIE

Sur l'allure de $f(z)$ dans les secteurs S_{np} non privilégiés.

Cette deuxième partie se rapporte plus étroitement, comme on l'a déjà dit, aux travaux de l'école scandinave et française (Lindelöf-Iversen et Montel). Introduisons ici explicitement la suivante:

Définition de secteur S_{np} *non privilégié, et de secteur* S_p *privilégié.* S_{np} c'est un secteur de sommet $z = 0$ où $f(z)$ est holomorphe exception faite pour $z = 0$ et où $f(z)$ admet deux valeurs exceptionnelles finies et distinctes a e b $(a \neq b)$, (outre que l'∞); au contraire S_p c'est un secteur où la deuxième de ces conditions n'est pas remplie: dans un S_p, donc, $f(z)$ acquiert toutes valeurs finies sauf une au plus.

A) *Principaux résultats déjà connus à ce sujet.*

Dans son classique Mémoire de 1916 M. Montel, OL étant un rayon issu de $z = 0$ et intérieur à un secteur $S_{np} \equiv AOB$, dit précisément ainsi [2]:

« Examinons maintenant le cas d'un secteur AOB, dans lequel « une fonction $f(z)$ est holomorphe, sauf au point 0 et rappelons « d'abord les résultats obtenus par M. Lindelöf et ceux que j'ai obtenus « précédemment relativement à l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ « lorsque z tend vers zéro en restant à l'intérieur du secteur.

« Supposons que z tend vers zéro en suivant le rayon OL, si « l'une des valeurs limites de la fonction $f(z)$ qui ne prend dans le « secteur ni la valeur zéro ni la valeur un est égale à 0, 1, ou ∞, il

---

(1) Des ensembles de points hypotendants à zéro de ce type particulier avaient été déjà rencontrés, d'ailleurs, même par M. Ostrowsky (Math. Zeit., Bd 24, 1925).

(2) Voir Montel, « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 33, 1916, § 17, pag. 260.

« en sera de même sur tout autre rayon situé à *l'intérieur* du secteur « AOB.

« Si sur le rayon OL, les valeurs de $f(z)$ ou de $\frac{1}{f(z)}$ ou de $\frac{1}{1-f(z)}$ « ont leurs modules bornés, il en sera de même pour tout autre « rayon OL'.

« Enfin, si sur OL, $f(z)$ a une limite unique α, $f(z)$ tend unifor- « mément vers cette limite dans tout secteur A'OB', complètement « intérieur à AOB ».

Puis M. Montel ajoute des nouvelles propositions à ce sujet mais de moindre importance que les précédentes.

Eh bien vis-à-vis de ces résultats je vais immédiatement présenter les théorèmes suivants:

B) *Propositions nouvelles.*

1) Même si sur un simple E_{hyp} (ensemble hypotendant à zéro) (¹) d'un S_{np}, $f(z)$ tend vers une quelconque de ses deux valeurs exceptionnelles finies a ou b, $f(z)$ est, a l'intérieur de S_{np}, bornée (²).

et bien plus généralement:

2) Si dans un S_{np}, $f(z)$ converge, même sur un simple E_{hyp}, vers une limite finie quelconque, $f(z)$ est, à l'intérieur de S_{np}, bornée (³).

3) Si donc $f(z)$ n'est pas bornée à l'intérieur d'un S_{np}, sur n'importe quel E_{hyp} de S_{np}, $f(z)$ ou bien ne converge pas, ou bien converge vers la valeur ∞ (⁴).

4) Si même sur un simple E_{hyp} d'un S_{np}, $f(z)$ converge vers une (quelconque) α de ses trois valeurs exceptionnelles (donc ou $\alpha = a$ ou $\alpha = b$ ou $\alpha = \infty$), $f(z)$, à l'intérieur de S_{np}, converge uniformément vers cette même limite α.

---

(1) Bien entendu, je le dis une fois pour toutes: « hypotendant à zèro de l'intérieur de S_{np} ».

(2) Cela signifie exactement ça: $f(z)$ est bornée à l'intérieur de chaque secteur A'OB' de sommet $z = 0$ intérieur a $S_{np} \equiv$ AOB; (A'O $\neq$ AO, B'O $\neq$ BO).

(3) Ce théorème contient, comme cas particulier, le précédent.

(4) Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent; on l'a mis, toutefois, en évidence à cause de son expressivité et de son importance.

5) Si sur un *quelconque* (1) ensemble E_1 (de points de S_{np} tendant à zéro de l'intérieur de S_{np}) $f(z)$ converge vers une (quelconque) α de ses trois valeurs exceptionnelles a, b, ou ∞, $f(z)$ converge de même vers α sur tout autre ensemble E_2 de S_{np}(2) tel que le couple $C(E_1, E_2)$ soit régulier.

Donc en particulier:

6) Si sur un *quelconque* ensemble E_1 de points de S_{np} tendant à zéro de l'intérieur de S_{np}, $f(z)$ converge vers une (quelconque) α de ses trois valeurs exceptionnelles (finies ou infini) a, b, ∞, elle converge aussi vers α sur tout autre ensemble de points de S_{np} (toujours tendant à zéro de l'intérieur de S_{np}) qui s'obtient de E_1 par variations arbitraires (même variables de point à point) des arguments des éléments de E_1.

En d'autres termes:

« *La convergence de* $f(z)$ *à l'intérieur d'un* S_{np}*, sur des suites de* « *points de* S_{np} *tendantes à zéro, vers une de ses (trois) valeurs exceptionnelles (finies ou infinie), est complétement indépendante des arguments de points de l'ensemble sur lequel cette convergence a lieu* ».

De là évidemment, suit, comme cas très particulier, le premier théorème (de LINDELÖF-MONTEL) énoncé dans A.

(1) C'est-à-dire hypo ou hypertendant à zéro.
(2) Qui, bien entendu, est, comme E_1 tendant à zéro de l'intérieur de S_{np}.

IIème PARTIE.

LE THÉORÈME DE PICARD DANS UN SECTEUR.

A) *Principaux résultats déjà connus à ce sujet.*

a) *École scandinave:* Théorème de LINDELÖF-IVERSEN [1].

« Soit T un domaine infini du plan des z limité par un seul con-« tour sans points multiples et désignons par Γ' et Γ'' les deux bran-« ches infinies de ce contour.

« Soit d'autre part $f(z)$ une fonction monogène n'admettant à l'in-« térieur et sur le contour du domaine T d'autre singularité à distance « finie que des pôles.

« Si cette fonction tend sur Γ' et Γ'' vers la même limite ou bien « elle tend uniformement vers cette limite dans T, lorsque z augmente « indéfiniment, ou bien elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en « une infinité de points compris dans T.

« Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers des limites distinctes « elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points « intérieurs à T ».

Remarque. – J'ai reporté ici textuellement l'énoncé de M. IVERSEN; il est évident, d'ailleurs, que les faits: 1er) de considérer au bien d'une fonction holomorphe une fonction méromorphe; 2ème) de considérer au lieu d'un secteur le domaine T déclaré dans l'énoncé; 3ème) de considérer le point singulier essentiel à l'∞ au lieu de le considérer en $z=0$, comme nous le faisons, n'ont pas d'importance essentielle.

Ce qui joue, au contraire, un rôle dominant c'est le fait que l'on doit supposer la fonction *régulière même sur le contour du domaine* [2]

---

(1) Cet énoncé est extrait de la thèse de M. IVERSEN (Helsingfors 1914) pag. 29. Il étend et précise, grâce à la représentation conforme un théorème de son Maître M. LINDELÖF (Helsingfors 1908); lire à ce sujet JULIA, « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 36, 1919, pag. 98.

(2) Telle donc que si l'on applique le théorème au cas d'une fonction holomorphe, sur le contour de T la fonction doit être régulière au sens usuel du mot.

(sauf, bien entendu, au point singulier essentiel) et que $f(z)$ doit tendre sur les deux branches Γ' et Γ'' du contour vers *une limite unique.*

En d'autres mots les deux branches du contour du domaine T doivent être, pour la validité de la proposition, pas moins que deux chemins de détermination de la $f(z)$ (¹). Et l'on bien sait quel degré de difficulté présente l'étude, non seulement de la distribution, mais même de l'existence de ces chemins existence qui, d'autre part, n'a pas été abordée, et dans des cas extrêmement particuliers, que pour celui des singularités essentielles isolées.

b) *École mixte allemande-française.* (Bieberbach, Milloux, Valiron) (²).

On y rencontre les théorèmes suivants:

1ᵉʳ) « Soit $\theta(z)$, $(z = re^{i\varphi})$ une fonction admettant une singula-
« rité à l'origine, mais holomorphe dans un secteur S, $|z| < R_0$,
« $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \dfrac{\pi}{\gamma}$; soit Δ un angle de sommet $z = 0$ intérieur à S;
« soit $M(r, \Delta)$ le maximum de $|\theta(z)|$ pour les points $|z| = r$ apparte-
« nant à Δ; soit $\rho = \overline{\lim\limits_{r\to 0}} \dfrac{\log_2 M(r, \Delta)}{-\log r}$, ρ étant appelé l'ordre de $f(z)$
« dans Δ.

« Cela posé: Si $\theta(z)$ est holomorphe dans un secteur S d'ouver-
« ture $\dfrac{\pi}{\gamma}$ et est d'ordre supérieur à γ dans un angle intérieur, elle
« prend toute valeur, sauf une au plus, sur un ensemble de points
« de S admettant l'origine pour point limite ».

C'est le théorème de Bieberbach.

2ème) Dans le cas d'une $F(z)$ admettant le point ∞ pour point essentiel et holomorphe autour de ce point le précédent théorème s'applique dès que l'ordre ρ dépasse $\dfrac{1}{2}$: il existe au moins un angle (et même deux comme le remarque Milloux) d'ouverture $\dfrac{\pi}{\rho} + \varepsilon$, ε étant

(¹) Lire à ce sujet Julia, « Leçons sur les fonctions uniformes etc. », Paris Gauth.-Villars 1923, § 56 pag. 91, et aussi Valiron, « Mém. des Sc. Math. », fasc. II, § 21 pag. 35.

(²) Je reporte ici presque textuellement l'exposé sur ce sujet de M. Valiron, « Mémor. de Sc. Math. », fasc. II, § 9 pag. 15.

positif et arbitrairement petit, dans lequel $F(z) - x$ s'annulle une infinité de fois, sauf peut-être pour une valeur de x.

C'est un théorème de M. VALIRON.

3ème) M. MILLOUX a complété ensuite le théorème 1èr en définissant dans S une suite de régions dans lesquelles les fonctions $F(z) - x$ s'annullent.

4ème) Si $F(z)$ est d'ordre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$ mais différent de ∞, elle prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus, dans un angle fixe mais arbitrairement placé dont l'ouverture est supérieure au plus grand des deux nombres $\frac{\pi}{\rho}$ et $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$.

C'est un beau théorème appartenant aussi à M. BIEBERBACH.

B) *Propositions nouvelles.*

Vis-à-vis des précédents théorèmes je présente ici, en me bornant aux propositions principales établies dans mon Mémoire, les énoncés suivants:

1èr) Si $f(z)$ est holomorphe dans S (1); si E_1 et E_2 sont deux simples ensembles de points de S tendant à zéro et tels que $E = E_1 + E_2$ tend à zéro de l'intérieur de S, le couple $C(E_1, E_2)$ étant normal, et si $f(z)$ sur E_1 tend vers une valeur v_0 et sur E_2 vers une valeur v_e $(v_0 \neq v_e)$ v_e étant valeur exceptionnelle de $f(z)$ dans S, (finie ou infinie). $f(z)$ acquiert dans S, et un nombre infini de fois, chaque valeur finie sauf une au plus.

Dans S se produit, en d'autres mots, le phénomène PICARD.

Donc, en particulier:

2ème) Si $C(E_1, E_2)$ est un simple couple normal, et si sur E_1, $f(z)$ converge vers une limite finie, tandis que sur E_2 converge vers l'infini, dans S, *sans autre chose*, se produit le phénomène PICARD (2).

(1) On ne suppose plus ici, et dans la suite, (bien entendu) que le secteur S soit un S_{np}.

(2) Ce théorème est un cas particulier du précédent, il est vrai, mais quoique moins général, il est plus expressif et plus compréhensif. Que l'attention du lecteur soit attirée sur cet énoncé.

Remarque. – Le 1$^{\text{er}}$ théorème précédent conduit en outre à une conséquence considérable et immédiate qui cependant doit être ici signalée; c'est la suivante:

Si $C(E_1, E_2)$ est un couple normal et si $f(z)$ converge sur E_1 vers une limite v_0 et sur E_2 vers une limite v_e $(v_0 \neq v_e)$ v_e c'est l'*unique* valeur exceptionnelle finie de $f(z)$ dans S.

3$^{\text{ème}}$) Si sur un E_{hyp} de S, $f(z)$ converge vers une limite finie et si dans l'intérieur de S, $f(z)$ n'est pas bornée, le phénomène PICARD se produit dans S [1].

Remarque. – Les points de l'ensemble E_{hyp} peuvent être, en particulier, les zéros d'une fonction entière, que je peux arbitrairement placer: d'ici des nombreuses conséquences sur lesquelles je ne peux pas ici m'entretenir.

4$^{\text{ème}}$) Si le couple $C(E_1, E_2)$ est régulier, $E = E_1 + E_2$ tendant à zéro de l'intérieur de S, et si une des valeurs limites de $f(z)$ sur E_1 est exceptionnelle, tandis que toute autre valeur limite v_0 de $f(z)$ sur E_2 est distincte de v_e, dans S se produit le phénomène PICARD.

Donc, en particulier mais d'une façon bien plus expressive:

5$^{\text{ème}}$) *Si le couple* $C(E_1, E_2)$ *est régulier,* $E = E_1 + E_2$ *tendant à zéro de l'intérieur de* S, *il suffit seulement que sur* E_1, $f(z)$ *soit bornée tandis qu'elle ne le soit pas sur* E_2, *pour que dans* S, $f(z)$ *acquiert, et un nombre infini de fois, toutes valeurs finies sauf une au plus* [2].

Et encore plus en particulier:

6$^{\text{ème}}$) Si les éléments correspondants des ensembles E_1 et E_2 tout ayant des modules égals ont des arguments même tout à foit différents et si sur E_1, $f(z)$ est bornée et sur E_2 ne l'est pas, ça suffit pour que dans S, $f(z)$ acquiert et infinie fois toutes valeurs finies sauf une au plus.

---

(1) C'est une conséquence du précédent théorème 2$^{\text{ème}}$ et de la propriété fondamentale des ensembles de points énoncée pag. 4.

(2) Qu'on veuille bien réfléchir sur la portée, la simplicité et l'esthétique de cette proposition, même on se rappelant que de couples particuliers d'ensembles E_1, E_2 réguliers sont ceux où l'ensemble E_2 est obtenu de E_1 par des variations arbitraires (même variables de point à point) des arguments des éléments de E_1 (voir la proposition 6$^{\text{ème}}$ suivante).

Mais il y a de plus:

7ème) *Si* $C(E_1, E_2)$ *est un couple régulier par rapport à une même constante* K *(ou uniformément régulier) et si* $V_1 =$ *borne supérieure des valeurs limites de* $|f(z)|$ *sur* E_1 *et* V_2 *est l'analogue de* V_1 *sur* E_2 *l'une des deux, par ex.* V_2, *étant finie, il existe une constante* $M > 0$, $M = M(K, V_2)$, *telle que si* $|V_1 - V_2| > M$, $f(z)$ *acquiert dans* S, *et un nombre infini de fois, chaque valeur finie sauf une au plus.*

Cette proposition est celle que nous avons déclarée comme devant être considérée la plus avancée dans nos recherches.

Ce qu'il y a d'étonnant dans son énoncé, c'est précisément ceci: *Est-ce-que l'on aurait pu jamais soupçonner qu'un simple trop remarquable écart entre les valeurs maxima, ou bornes supérieures qu'elles soient, des valeurs limites de* $|f(z)|$ *sur deux simples ensembles de points du secteur tendants vers le point singulier, aurait pu, tout seul, provoquer dans le même secteur le phénomène Picard?*

Et pourtant cela arrive.

Il est évident, d'ailleurs, que ce nouveau fait analytique demande encore beaucoup de recherches.

IVème PARTIE

Sur la caractérisation des rayons privilégiés r_p.

Passons maintenant à la dernière partie:

A) *Résultats déjà connus.*

a) Le célèbre théorème de 1880 assure que le phénomène Picard arrive dans le voisinage (complet) du point singulier; M. Julia se demanda si on aurait pu préciser davantage son siège. D'où la notion de droites de Julia; la voici [1]:

Soit $f(z)$ une fonction entière; soient les deux cercles $|z| = a$, $|z| = b$, $a > 0$, $b > 0$; $\frac{a}{b} > 1$; dans la couronne comprise entre les deux

[1] Je donne ici en deux mots cette notion en me plaçant, pour fixer les idées, dans le cas des fonctions entières.

cercles, il existe un point (dit point de Julia), au moins, où la famille $f(z\sigma^n)$ n'est pas normale. Le semi-droite joignant l'origine à un tel point est dite direction de JULIA de la fonction entière considérée [1]. Cette définition est, en outre, indépendante du nombre σ [2].

Ceci étant bien clair que dans le voisinage d'une telle direction, toute valeur finie, sauf une au plus, est prise, et une infinité de fois, par la $f(z)$.

Le pas était achevé.

Deux observations. – Il faut cependant remarquer que:

1er) Il est douteux que la réciproque soit exacte; c'est-à-dire que si dans tout voisinage (angulaire) d'un rayon issu du point singulier $f(z)$ acquiert toute valeur finie, sauf une au plus, le rayon soit un rayon de JULIA [3].

2ème) que dans tous les travaux de JULIA et de ses disciples pour décider si un rayon est du type indiqué, il faut s'assurer qu'il passe par un point P de la couronne dans lequel la famille $f(z\sigma^n)$ n'est pas normale, ce qui exige que soient vérifiées des *conditions superficielles*.

M. JULIA (1919-21) fit alors une étude approfondie des ensembles des points P où la famille n'est pas normale; beaucoup d'autres l'ont suivi et ont poussé les recherches dans cette direction.

b) La question de la caractérisation d'un rayon comme rayon de JULIA, qui est à la base de toutes ces spéculations analytiques, fut reprise six années après par M. OSTROWSKY dans son beau mémoire de 1925. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour

(1) Il est juste de remarquer que, d'un certain point de vue, le mérite principal sur ce sujet appartient à M. Montel; ce fut lui, en effet, qui démontra le premier, que la famille $f(z\sigma^n)$ n'aurait pas pu être normale dans la couronne (voir MONTEL, «Ann. Ec. Norm. Sup.», t. 33, 1916, Ch. II, § 12 pag. 252); ceci n'amoindrit pas, toutefois, la grande valeur des recherches de M. Julia lequel, avec une rare intuition, prévit que l'observation suivant laquelle, dans ces conditions, il y aurait eu certainement au moins un point de la couronne où la famille n'aurait pu être normale, devait entraîner une foule de très importantes conséquences en particulier pour ce qui concerne une détermination du théorème de Picard. M. Julia ouvrit ainsi tout un nouveau chapitre de la théorie.

(2) C'est ce qu'a démontré M. VALIRON (voir «Bull. Soc. Math.», 2ème série, t. 49, pag. 68-73).

(3) Question soulevée par Bloch dès 1926.

qu'un point P soit un point de JULIA et, en conséquence, pour que le rayon OP soit une droite de JULIA (1). Cette condition qui est donc seulement suffisante pour juger si un r est un r_p est, d'autre part extrêmement compliquée et, tandis que pour la caractérisation des rayons r de JULIA elle a plutôt (même seulement) un intérêt théorique, pour celle des rayons r_p (au sens déclaré pag. ~~137~~ 171) en plus d'exiger des *conditions superficielles* elle glisse, par sa même nature, dans un krack complet (2).

B) *Propositions nouvelles.*

Ceux qui ont bien suivi notre exposé devinent désormais sans peine ce qui suit: en effet, si les deux ensembles E_1, E_2, de points de S, dont on parle dans les nouveaux théorèmes présentés dans la précédente III$^{\text{ème}}$ partie sont tangentes (3) à un même rayon r issus de $z = 0$, ou si, en particulier, ces ensembles s'étendent totalement sur r, r est (il est bien évident) un r_p, c'est-à-dire, un rayon privilégié: dans tout son voisinage $f(z)$ acquiert, donc, et une infinité de fois, chaque valeur finie sauf une au plus, et le phénomène PICARD se produit.

Je n'insiste pas d'avantage sur ce point évident; je vais énoncer toutefois quelques théorèmes pris au hasard; ce sont les suivants:

1$^{\text{èr}}$) Si E_1 et E_2 sont deux simples ensembles de points tendants à zéro tels que le couple $C(E_1, E_2)$ est normal, gisant en entier sur un rayon intérieur à S issus de $z = 0$ (ou qui sont, tous deux, tangents à r au point $z = 0$), il suffit que sur E_1, $f(z)$ tende à une limite finie, tandis que sur E_2 tend à l'infini pour conclure que r est un rayon privilégié r_p (4).

2$^{\text{ème}}$) Dans les mêmes conditions si E_1 et E_2 sont tels, pour plus, que le couple $C(E_1, E_2)$ est régulier, à la convergence de $f(z)$

(1) Tel que, donc, dans tout son voisinage, se produise le phénomène Picard.

(2) Il serait long de justifier ici cette assertion; j'en ai exposées les raisons dans mes conférences de Mai 1945 tenues près le R. Institut d'Hautes Math. de Rome. Pour une claire exposition des conditions de OSTROWSKY lire VALIRON, «Mém. Sc. Math.», fasc. XXXVIII, § 10 pag. 21, 22 et 23.

(3) Avec une claire signification de ce mot.

(4) On pourrait ici remarquer qu'à l'aide des propriétés bien connues de la représentation conforme on pourrait considérer des chemins aboutissants au point

sur E_1 vers une limite finie et sur E_2 vers l'infini, on peut remplacer, tout simplement, ces deux conditions: sur E_1, $f(z)$ est bornée; sur E_2 elle ne l'est pas.

et tout pareillement:

3ème) Si E_1 et E_2 gisent toujours en entier sur r (ou sont tangents tous deux à r au point $z=0$) mais si le couple $C(E_1, E_2)$ est, cette fois, régulier par rapport à une même constante K (ou uniformément régulier) et si $V_1 =$ borne supérieure des valeurs limites de $|f(z)|$ sur E_1 et V_2 est l'analogue de V_1 sur E_2 (1) il existe une constante $M > 0$ telle que si $|V_1 - V_2| > M$, le rayon r c'est, tout court, un rayon privilégié r_p (tandis qu'il est $M = M(K, V_2)$).

Le nouveau fait analytique annoncé pag. ~~*187*~~ 171 *est donc par le fait, bien mis en évidence.*

Remarque. - Je pourrais désormais me taire; mais deux choses, toutefois, me poussent encore à poursuivre un instant; il s'agit de ceci:

Supposons, pour fixer les idées que la $f(z)$ admette, au point $z=0$, un point singulier essentiel isolé; que OL soit un rayon issu de $z=0$ sur lequel $f(z)$ soit bornée, au moins dans le voisinage de $z=0$, et qu'on ait placé su OL un appareil physique capable de déceler que sur OL, $f(z)$, dans ce voisinage n'est plus bornée, par exemple, avec l'allumage d'une lampe électrique; eh bien, les théorèmes tout à l'heure rappelés montrent que OL tournant autour de O à chaque allumage et à chaque extinction de la lampe correspond «un passage» de OL sur un rayon privilégié (2).

---

singulier $z=0$ bien plus généraux que de simples rayons issus de ce point. C'est ce qu'a fait le premier, M. JULIA; mais cela, à mon avis, n'a pas d'importance essentielle. Il s'agit, en effet, en tout cas, de propriétés qui ont ce double caractère: Ier elles sont satisfaites asymptotiquement tout le long du chemin considéré (ou mieux, dans une bande, si restreinte qu'elle soit, qui contienne à son intérieur le chemin), donc dans une certaine direction issue de $z=0$; IIème elles sont satisfaites dans tout voisinage, si petit qu'il soit, du point singulier.

(1) L'une des deux, par ex., V_2 étant finie.

(2) Pour être plus précis: chaque fois que OL en tournant autour de $z=0$, la lampe s'éclaire ou s'éteint, on est assuré, ou bien que l'on a surpassé, ou bien que l'on est sur un rayon privilégié r_p (réfléchir par exemple, à la $f(z) = e^{1/z}$ lorsque OL tourne autour de $z=0$).

J'ajoute enfin que les hypothèses rattachées aux théorèmes fondamentaux présentés dans la II^{ème} et la IV^{ème} parties ne sont pas, comme on pourrait raisonnablement le craindre, des hypothèses pratiquement irréalisables; elles sont au contraire, comme je l'ai démontré, certainement réalisées (par exemple dans le cas d'un point singulier essentiel isolé) même dans un secteur du plan complexe des z, qui n'envahit pas ce plan en entier.

Il n'y a donc rien d'illusoire dans ce que j'ai supposé, et j'achèverai ce bref exposé en remarquant que, vu les précédents résultats, jamais la reprise foncière de l'étude de l'allure d'une fonction analytique au voisinage d'un point singulier essentiel, ne s'est imposée comme en ce moment, en suivant les nouvelles directions ci-dessus indiquées.