

## SULL' EFFETTO DELLA SOLIDARIETÀ DELL'IMPALCATO NEI PONTI AD ARCO (\*)

*(Con undici figure)*

LIVIO NORZI

**SUMMARIVM.** — Auctor perpendit quomodo arcus statice se praebeat si cum contabulatione arte connexus sit, et comparat graviores condiciones in variis calculi casibus.

Nei ponti in cemento armato del tipo indicato in figura 1, il comportamento statico rispetto ai carichi accidentali dissimmetrici è notevolmente modificato dalla solidarietà dell'arco con l'impalcato. Alcuni hanno ritenuto opportuno eliminare questa solidarietà interrompendo l'impalcato con giunti di dilatazione. Scopo della presente nota è giungere a calcolare con soddisfacente approssimazione le sollecitazioni massime di un arco solidale con l'impalcato analizzando invece come l'effetto di solidarietà sia nettamente vantaggioso.

Ho schematizzato questo effetto come quello dovuto ad una robusta asta incernierata al vertice dell'arco ed alle spalle costituite da piloni flessibili o, come caso limite, rigidi (fig. 2).

Sotto l'effetto di un carico accidentale dissimmetrico la chiave dell'arco tende a spostarsi con una considerevole componente orizzontale. Allora lo sfiancamento dell'arco è energicamente contrastato, riguardo allo spostamento orizzontale, dall'impalcato che agisce nella sua metà, per esempio sinistra, come tirante e nella destra come puntone applicando all'arco due forze orizzontali in direzione opposta a quella del movimento del vertice.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti nella Tornata del 21 febbraio 1943.

Con lo schema posto si trascura solo la limitata rigidezza flessionale dell'impalcato nel piano dell'arco e l'azione dovuta ai pilastri di ripartizione. Questa per i più lunghi è assai piccola data la loro forte flessibilità, e per i più corti è notevolmente attenuata dall'essere gli

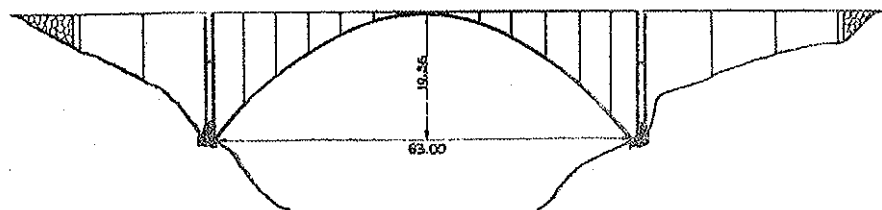


FIG. 1.

spostamenti orizzontali dei loro punti d'incastro sull'arco quasi uguali a quello della chiave. Poichè, come risulterà dal calcolo, le sollecitazioni unitarie nell'impalcato dovute all'effetto studiato sono minime, non c'è da tener conto della differente resistenza del calcestruzzo a



FIG. 2.

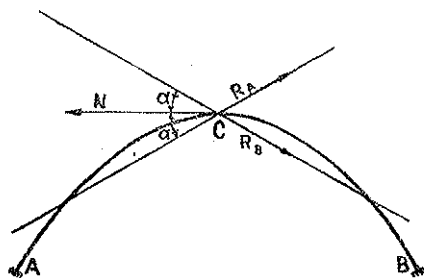


FIG. 3.

compressione e a trazione e le due parti della reazione d'impalcato possono ritenersi uguali.

Si tratta quindi di studiare l'effetto sull'arco di una forza  $N$  applicatagli orizzontalmente in chiave e di valutare la grandezza di questa forza in funzione dei carichi applicati e delle caratteristiche elastiche del sistema complessivo.

Grazie alla simmetria, il problema della determinazione delle reazioni d'imposta  $R_A, R_B$  è solo semplicemente iperstatico. Infatti (fig. 3)  $R_A, R_B$  ed  $N$  devono concorrere in  $C$  e le componenti orizzontali di

$R_A$  e di  $R_B$  sono evidentemente eguali ad  $\frac{1}{2}N$ . Occorre determinare le componenti verticali  $\pm Y$  fra loro eguali e contrarie. Queste componenti sono essenziali nell'analisi di questo problema e sono state invece sempre trascurate fin ora <sup>(1)</sup>. Trascurare queste componenti porta ad ammettere per l'arco delle deformazioni incongruenti e quindi inaccettabili. Infatti se ciascun semiarco fosse soggetto solo ad una forza orizzontale applicatagli al vertice, la chiave pensata come appartenente al semiarco per esempio sinistro dovrebbe alzarsi e pensata come appartenente al semiarco destro dovrebbe abbassarsi.

Per determinare le reazioni ho osservato che, per il primo teorema di reciprocità, siccome una forza verticale in C produce solo un abbassamento in C, una forza orizzontale in questo punto deve produrne solo uno spostamento orizzontale.

Si ritrova lo stesso risultato notando che per il teorema di MENABREA deve annullarsi la derivata della funzione lavoro di deformazione L rispetto all'unica incognita iperstatica che è la componente verticale Y, e che per il teorema di CASTIGLIANO,  $\frac{\partial L}{\partial Y}$  è lo spostamento verticale di C.

Considerando questo spostamento come dovuto (figura 4) alla forza  $-R_A$  agente sul semiarco sinistro, la Y è così determinata dalla condizione:

$$[a] \quad \frac{1}{2} N J'_{xy} - Y J'_{yy} = 0 \quad \text{ossia:} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{J'_{xy}}{J'_{yy}}$$

dove  $J'_{xy}$ ,  $J'_{yy}$  sono momenti del second'ordine del peso elastico del semiarco rispetto agli assi  $x, y$ .

La [a] esprime che Y produce un abbassamento della chiave dell'arco tale da elidere l'innalzamento che  $\frac{1}{2}N$  produrrebbe da sola.

Conoscendo, per il dato arco incastrato considerato a sè, le linee di influenza dei parametri M, A, H della reazione d'imposta ridotta al baricentro elastico G la [a] può essere posta sotto una forma che evita il calcolo diretto di  $J'_{xy}$ .

<sup>(1)</sup> Cfr.: C. GUIDI, *Sui ponti ad arco in cemento armato*, « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », 1917.

Infatti, riducendo la forza  $-R_A$  al baricentro elastico G, si ha:

$$\begin{cases} M = -\frac{\overline{CG}}{2} N = -\frac{1}{2} kN \\ A = Y \\ H = -\frac{1}{2} N \end{cases}$$

e se  $M_0, A_0, H_0$  sono i parametri della reazione d'imposta dovuta ad un carico verticale in chiave, W il peso elastico dell'arco immaginato svincolato da uno degli incastrì,  $J_{xx}, J_{yy}$  i momenti d'inerzia del peso elastico rispetto agli assi dell'ellisse di elasticità..... l'annul-

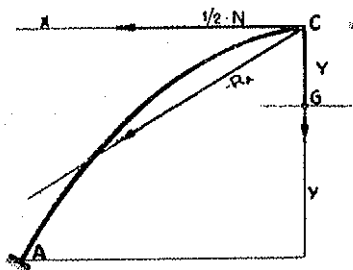


FIG. 4.

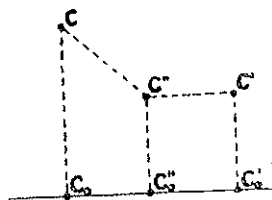


FIG. 5.

larsi dello spostamento verticale della chiave, calcolato come somma degli spostamenti prodotti rispettivamente da M, A, H, è espresso dall'equazione:

$$[a'] \quad -\frac{1}{2} kN \cdot M_0 W + Y \cdot A_0 J_{yy} - \frac{1}{2} N \cdot H_0 J_{xx} = 0$$

da cui si può ancora ricavare  $\tan \alpha$  ed una notevole espressione per  $J_{yy}$ .

Per determinare la grandezza della forza N, ho ragionato così (cfr. fig. 5):

Siano C, C', C'' rispettivamente le posizioni della chiave, ad arco scarico, ad arco caricato dissimetricamente (per es. a sinistra) e non contrastato dall'impalcato, ad arco carico a sinistra e contrastato.

Considerando le proiezioni sull'orizzontale di questi tre punti in  $C_0, C'_0, C''_0$  si può porre:

$$[b] \quad \begin{cases} C_0 C''_0 = \lambda N \\ C''_0 C'_0 = \mu N \end{cases}$$

dove  $\lambda$  è il coefficiente di elasticità del sistema costituito dall'impalcato e dai suoi piedritti terminali elastici per uno spostamento orizzontale di  $C$  dovuto ad una forza orizzontale in  $C$  e  $\mu$  è l'analogo coefficiente per l'arco. Sommando le [b] segue la

$$[b'] \quad N = \frac{\delta}{\lambda + \mu}$$

in cui  $\delta$  rappresenta lo spostamento orizzontale che l'arco subirebbe se non fosse contrastato dall'impalcato.

Per calcolare  $\delta$  nel modo più generale per ogni condizione di carico dissimmetrico occorre costruire la linea d'influenza dello spostamento orizzontale del vertice per un carico mobile verticale unitario.

Per il primo teorema di reciprocità questa linea non è altro che il diagramma degli spostamenti verticali dovuti ad una forza orizzontale unitaria applicata in chiave. Applicare questa forza all'intero arco incastrato equivale ad esercitare le forze  $-R_A$ ,  $-R_B$  sui due semiarchi considerati a sè (a guisa di mensole). In valore assoluto gli abbassamenti di un semiarco sono uguali agli innalzamenti dell'altro per punti simmetrici.

Grazie alla [a] ovvero alla [a'], è nota la forza  $-R_A$  le cui componenti, per  $N=1$ , sono  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2} \tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{J'_{xy}}{J'_{yy}}$ .

Riducendola al baricentro elastico  $G$ , si può calcolare l'abbassamento  $\delta$  di ogni punto di un semiarco con procedimento perfettamente analogo a quello che ha condotto alla [a'].

Indicando quindi ora con  $M'$ ,  $A'$ ,  $H'$  i parametri della reazione di imposta destra, sempre per il solo arco incastrato considerato a sè e per una generica posizione di un carico mobile verticale unitario sul semiarco sinistro, risulta:

$$[c] \quad \delta = -\frac{k}{2} \cdot M'W + \frac{1}{2} \frac{J'_{xy}}{J'_{yy}} \cdot A'J_{yy} - \frac{1}{2} \cdot H'J_{xx}$$

per ogni punto del semiarco sinistro e  $\delta$  uguale e contrario per ogni punto simmetrico.



Sostituendo queste espressioni nelle  $[a]$ ,  $[a']$ ,  $[c]$ ,  $[d]$ , si ottiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \frac{f}{a} \quad |\delta| = \frac{Wf}{96a^3} (a-x)^2 x (2x+a) \quad \mu = W \left( \frac{f^2}{320} + \frac{p^2}{4} \right)$$

Un facile calcolo indica che  $|\delta|$  è massimo per  $x = 7 \frac{a}{16}$ .

In figura 7 è tracciato il diagramma di  $\frac{\delta}{\mu}$  corrispondente alla reazione di impalcato N nel caso limite in cui lo spostamento orizzontale della chiave sia completamente annullato ( $\lambda = 0$ ).

In questo e nei successivi diagrammi sono indicati i valori numerici riferentesi all'esempio di un arco di 20 metri di luce, 4,00 di freccia e  $J_0 = \frac{1}{12} 50 \cdot 46^3 \text{ cm}^4$ .

Venendo a considerare in che modo sia vantaggioso l'effetto della reazione d'impalcato si può dire qualitativamente che esso consiste nel sovrapporre una distribuzione di momenti flettenti che, nei casi più sfavorevoli, è di andamento analogo e di segno generalmente opposto a quella che si calcolerebbe considerando l'arco a sè.

Il diagramma risultante dei momenti flettenti è perciò notevolmente smorzato<sup>(1)</sup>. Infatti (cfr. fig. 6) le rette d'azione delle  $R_A$ ,  $R_n$  tagliano l'asse geometrico dell'arco per  $x = \frac{3a}{4}$  ed i momenti di alleggerimento dovuti alla N risultano massimi per le sezioni d'imposta e per le sezioni distanti  $\frac{3a}{8}$  dalla chiave cioè per le sezioni che sono sensibilmente le più sollecitate, mentre si annullano solo per le sezioni  $x = \frac{3a}{4}$  normalmente poco sollecitate.

La figura 8 illustra questo confronto fra diagrammi di momenti flettenti nel caso tipico di un arco parabolico caricato uniformemente sulla sua metà sinistra.

(1) Se non si fossero considerate le componenti verticali delle reazioni di imposta il diagramma dei momenti flettenti dovuti all'effetto d'impalcato sarebbe stato assai diverso e proprio in alcune delle sezioni più sollecitate si sarebbe sommato anzichè sottrarsi a quello per l'arco considerato a sè.

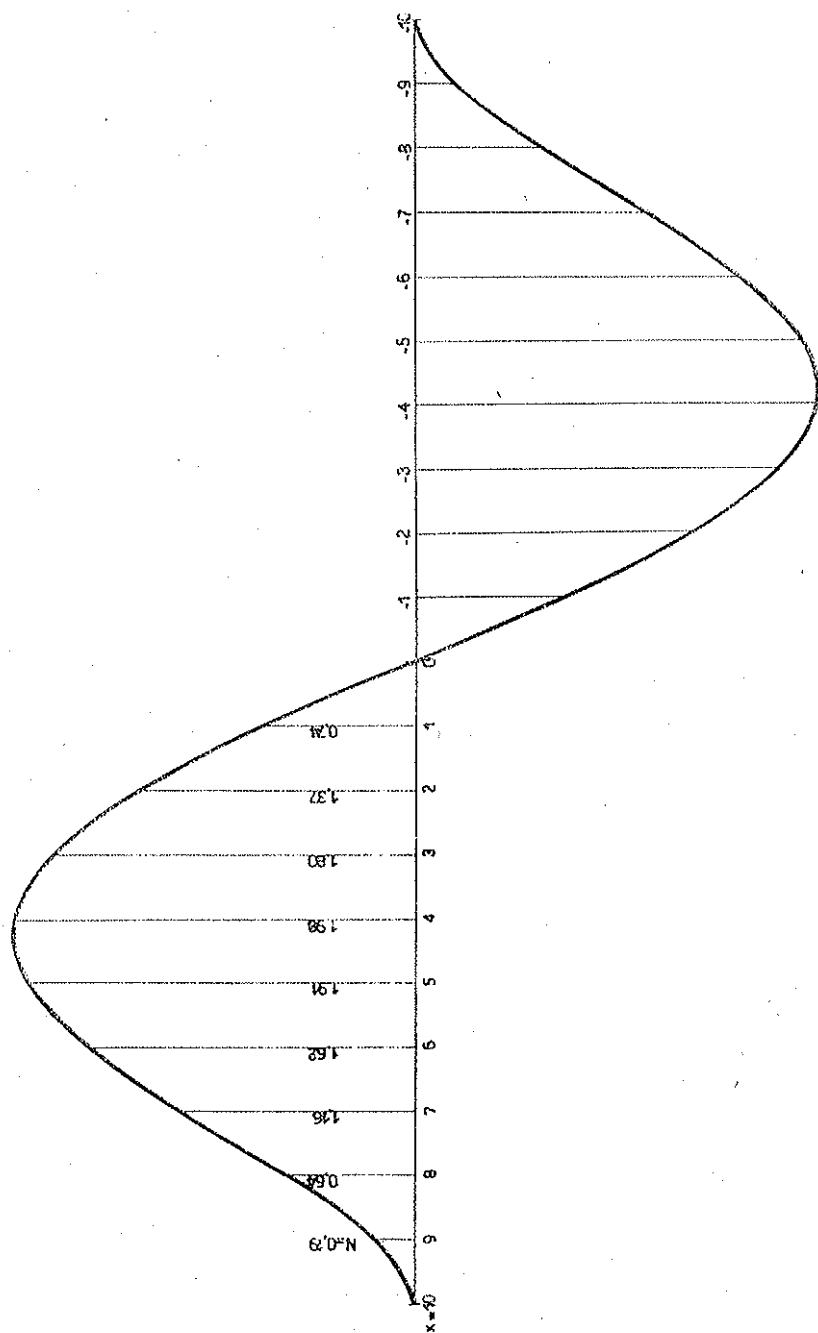


Fig. 7.

Linea d'influenza della reazione d'impalcato  $N$  nel caso di rigidità totale ( $\lambda=0$ ).



Nel caso limite di totale rigidità del sistema d'impalcato ( $\lambda=0$ ) si raggiunge quasi l'annullamento dei momenti flettenti. Questo per due motivi:

Nel semiarco carico la curva delle pressioni è sollevata verso l'imposta dalla composizione con la reazione dovuta alla  $N$  e nello stesso tempo è tesa verso l'asse dell'arco per effetto dell'aumento della spinta. Nel semiarco scarico  $R_H$  elide quasi la reazione dovuta al carico disimmetrico <sup>(1)</sup>. Tuttavia questo confronto ha solo un valore indicativo di esempio perchè le condizioni di carico più sfavorevoli, tenendo conto della solidarietà con l'impalcato, mutano e precisamente tendono a diventare più simmetriche.

Per giungere ad un confronto esauriente tra i due modi di considerare il ponte ho tracciato le linee d'influenza del momento flettente per sezioni equidistanti di due in due metri (fig. 9).

Per questo occorre sottrarre alle linee d'influenza per l'arco a sé i momenti  $M_N$  dovuti alla forza  $N$ , ossia una curva affine alla linea d'influenza dello spostamento orizzontale del vertice. Se  $x', f\left(\frac{x'}{a}\right)^2$  sono le coordinate del baricentro della sezione considerata:

$$M_N = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\lambda + \mu} \left( \frac{3}{4} f \frac{x'}{a} - f \frac{x'^2}{a^2} \right).$$

Si vede che per  $\lambda=0$  il comportamento statico dell'arco è profondamente modificato, ma anche per rigidzze facilmente realizzabili in pratica il vantaggio della solidarietà con l'impalcato appare assai notevole.

Nè mancano d'altra parte casi pratici in cui è soddisfatta la condizione di rigidezza quasi perfetta essendo l'impalcato ancorato a spalle molto robuste.

<sup>(1)</sup> Integrando da  $x=0$  ad  $x=a$  le formule date per  $M, A, H, N$  si ha:

$$M = p \frac{a^2}{12} \quad A = \frac{3}{16} p a \quad H = \frac{p f a^2}{4 f^2 + 45 p} \quad N = \frac{p}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} \frac{f a^2}{2 f^2 + 160 p^2}$$

da cui si vede che, per  $\lambda=0$ , se si potesse trascurare  $p$ , il semiarco destro risulterebbe libero da ogni sollecitazione e nel semiarco sinistro la curva delle pressioni sarebbe perfettamente centrata con la spinta raddoppiata.

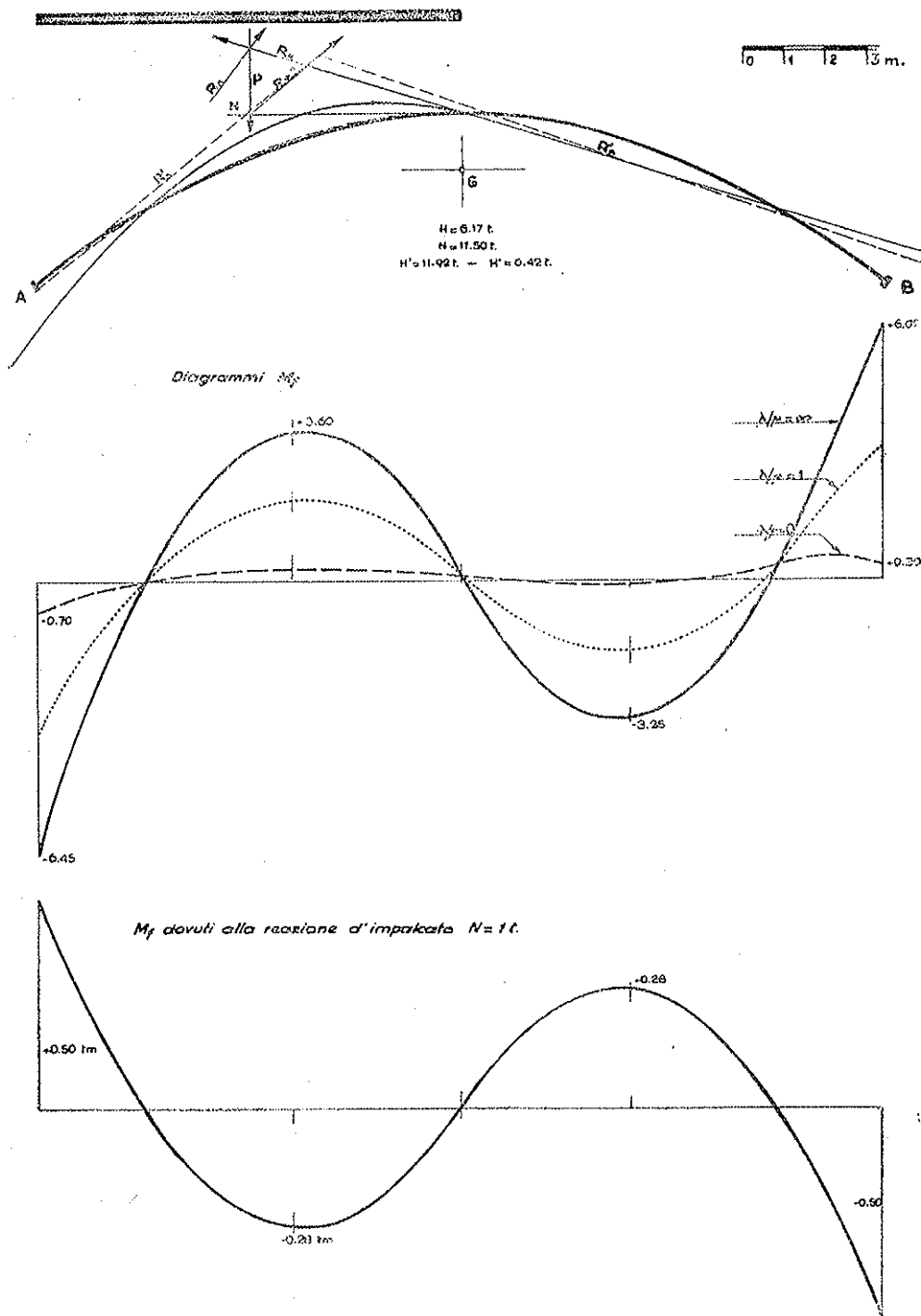


FIG. 8.

Confronto di curva delle pressioni nel caso di carico uniforme sul mezzo ponte.  
 Linea continua: arco libero - Linea a tratti: impalcato rigido.

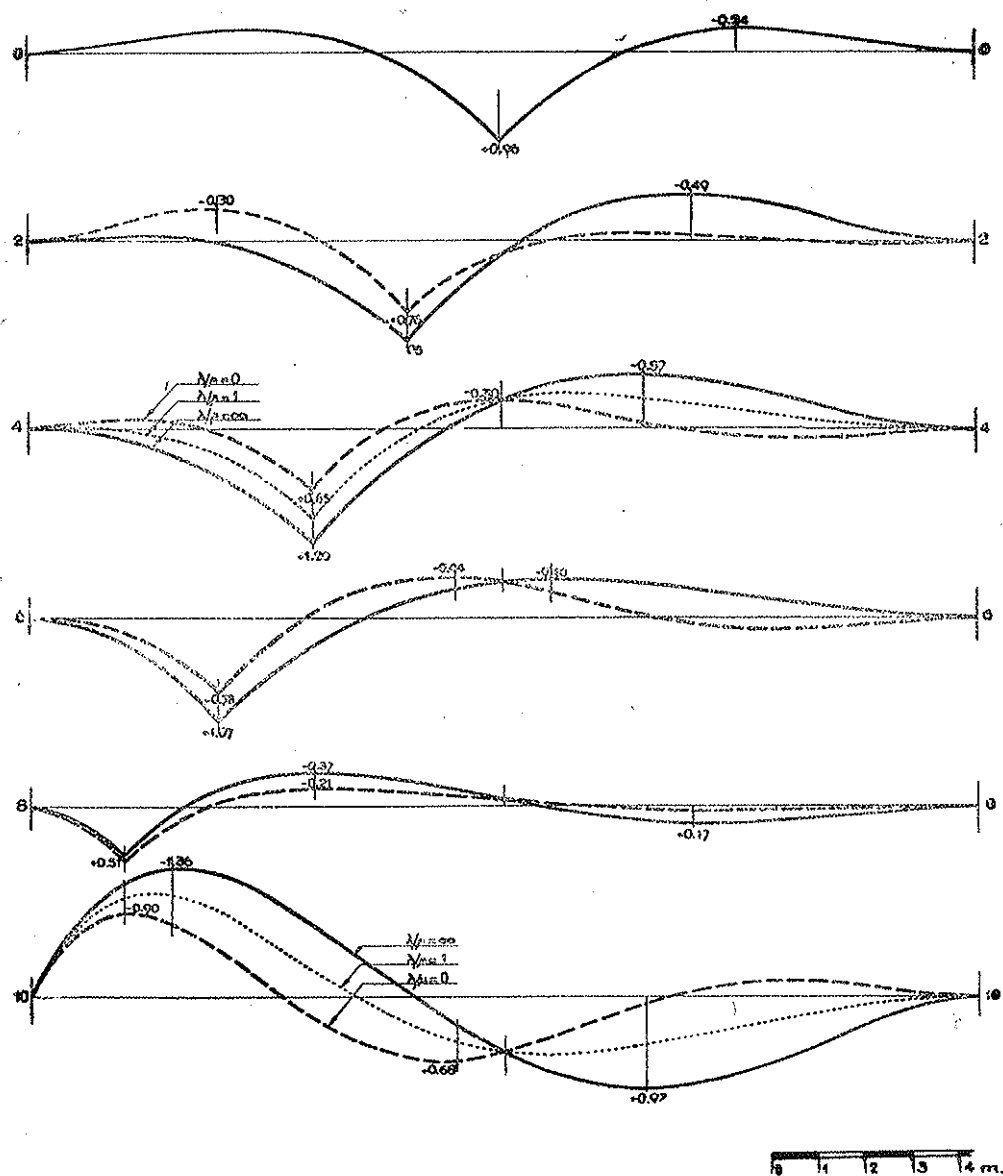


FIG. 9.

Linee d'influenza dei momenti flettenti.

Linea continua: arco libero - Linea a tratti: impalcato rigido - Linea punteggiata:  $\lambda/\mu = 1$ .

Se ora si immagina di caricare con  $p$  kg/ml uniformemente, le zone positive o negative date dalle linee d'influenza per ogni sezione, si arriva a costruire i diagrammi dei momenti flettenti massimi.

Questi diagrammi, tracciati in figura 10, hanno ordinate proporzionali alle aree positive e negative racchiuse dalle curve d'influenza e riassumono il confronto fra i casi di carico accidentale più sfavorevoli nelle diverse ipotesi di calcolo<sup>(1)</sup>.

Si conclude che, in seguito all'effetto di solidarietà, si ha una netta riduzione nei momenti flettenti massimi. Questa riduzione si annulla per la sezione, che è sensibilmente la meno sollecitata,  $x = \frac{3a}{4}$ <sup>(2)</sup>. Inoltre è la stessa in valore assoluto sia per i momenti positivi che per quelli negativi.

Per le sezioni più sollecitate e per  $\lambda = 0$ , la riduzione raggiunge il 45 per cento circa e tale può ritenersi la riduzione percentuale nelle sollecitazioni unitarie massime  $\sigma$  dovute al carico accidentale dissimmetrico. A questo riguardo è anche da notare che il punto intermedio di massimo momento si sposta dalla sezione  $x \cong 4$  verso la sezione più robusta  $x \cong 6$  mentre la sezione di chiave normalmente è meno sollecitata avvantaggiandosi della collaborazione coll'impalcato.

(<sup>1</sup>) Le due curve sono sostanzialmente analoghe e sarebbero anzi uguali qualora si trascurasse il raggio d'inerzia  $\rho$  della sezione trasversale dell'arco. Infatti in tal caso la curva delle pressioni per un carico uniforme su tutto il ponte apparirebbe coincidere con l'asse geometrico dell'arco.

(<sup>2</sup>) Per precisare l'andamento delle curve dei momenti massimi occorre conoscere i valori in questo punto. Accenno brevemente al calcolo:

Dalle formule già ricordate si ricava che un carico unitario verticale nel punto  $x = \xi$  sull'arco svincolato dall'impalcato produce intorno al baricentro della sezione  $x = 0a$  situata alla sua sinistra, un momento flettente

$$M(0, \xi) = M + Hf\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right) - Aa = \frac{a}{4}(1 - \xi)^2 \left[1 + \frac{1}{18}\left(\frac{f}{\rho^2}\right)^2(3\theta^2 - 1)(1 + \xi)^2 - (2 + \xi)\theta\right]$$

Il massimo momento negativo della sezione  $\frac{x}{a} = 0 = \frac{3}{4}$  è

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} M\left(\frac{3}{4}, \xi\right) d\xi$$

tra i limiti che sono radici dell'equazione di secondo grado in  $\xi$  fra parentesi quadre.

$$(\xi_1 = -0,552, \quad \xi_2 = 0,314)$$

In modo analogo sono stati calcolati tutti gli altri valori numerici indicati nei diagrammi di figura 10.

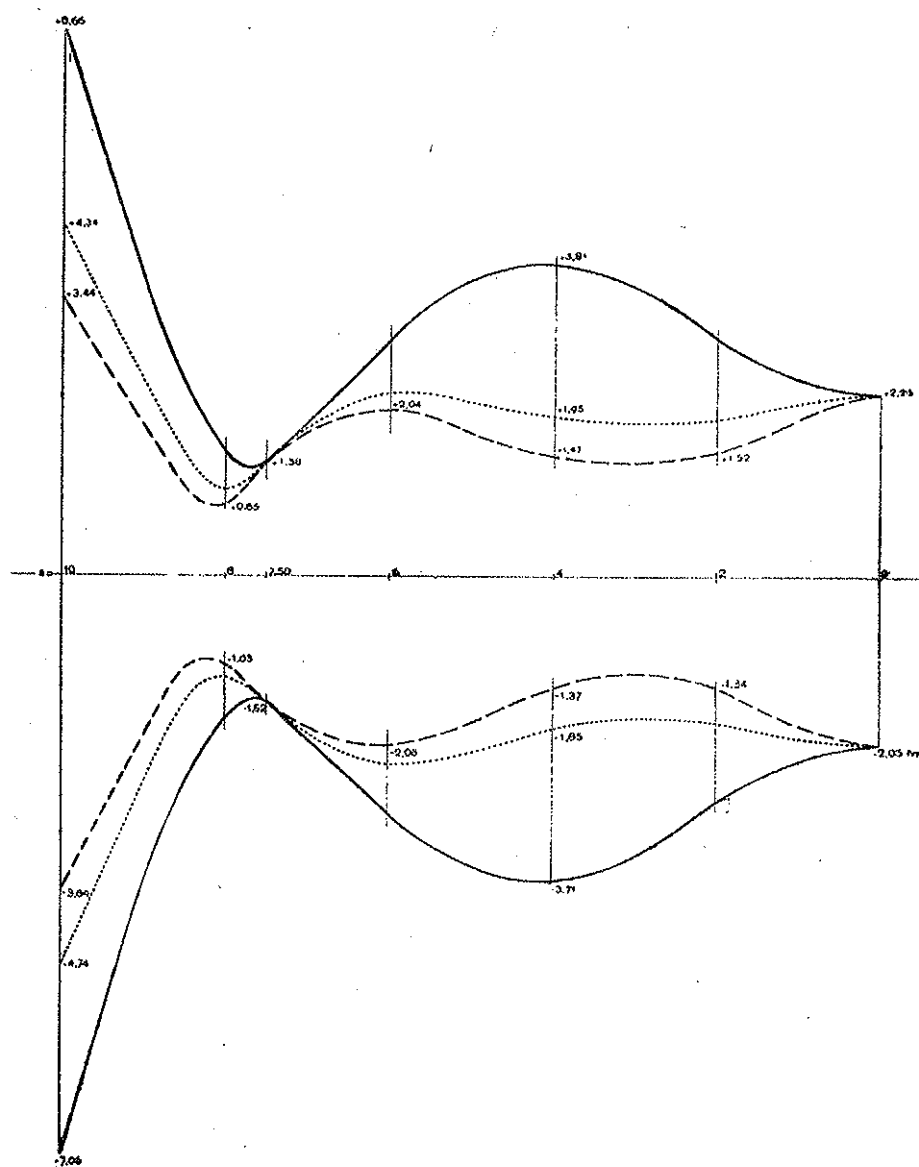


FIG. 10.

Diagrammi dei momenti massimi

Linea continua: arco libero - Linea a tratti: impalcato rigido.

(I valori numerici indicati sono in tm se  $p = 1t/ml$ ) - Linea punteggiata  $\lambda/\mu = 1$ ).

Per  $\frac{\lambda}{\mu} = 1$  si ha circa il 33 per cento di riduzione.

Viceversa senza aumentare le sollecitazioni massime, si potrebbe moltiplicare il sovraccarico per 1,8 se  $\lambda = 0$  e per 1,5 se  $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ .

Si migliora un poco l'approssimazione del calcolo delle sollecitazioni massime tenendo conto delle variazioni della spinta  $H$ .

Se si considera l'impalcato solidale si ottiene la nuova linea d'influenza della  $H$  aggiungendo  $\frac{1}{2} \frac{\delta}{\lambda + \mu}$  alla linea per l'arco a sè.

Tale linea, valida per un semiarco, è tracciata in figura 11. Si vede che in ogni caso, dalla parte del semiarco più carico aumentano lievemente le sollecitazioni per sforzo normale e però, per lo stesso motivo, diminuisce l'eccentricità della curva delle pressioni riducendo il pericolo della parzializzazione della sezione reagente.

Degno di nota è che per  $\lambda = 0$  si possono avere piccoli valori negativi della spinta. Analogo fatto si verifica per  $A, M$  (Cfr. Diagrammi fig. 11).

Naturalmente tali valori negativi sono in pratica assai piccoli rispetto a quelli positivi dovuti al peso proprio.

Mi sono soffermato in particolare sul caso dell'arco  $J \frac{dx}{ds} = J_0 = \text{Cost.}$  perchè le curve di figure 7, 8, 9, 10, 11 calcolate per un arco parabolico valgono con buona approssimazione per qualunque arco parabolico simile o affine purchè si tenga conto che praticamente,  $H$  ed  $N$  variano come il rapporto  $a/f$ , le ordinate delle linee d'influenza dei momenti variano in proporzione alla luce ed i momenti flettenti dovuti a carichi uniformi con  $pL^2$ .

Infatti si ricava dalla teoria dell'arco parabolico che il coefficiente di correzione  $\beta$  da introdursi nelle linee d'influenza per tener conto dello spessore  $h$  dell'arco in chiave in rapporto alla freccia è sempre molto vicino all'unità (bisogna arrivare ad  $h/f$  uguale a  $1/5$  per avere  $\beta = 0,98$ ); pure piccola è l'importanza delle variazioni di  $h/f$  nel calcolo di  $p_s^2$  mentre è un po' più accentuata per il coefficiente  $\mu$  qui introdotto (posto  $\mu = m \frac{Wf^2}{320}$  è  $m = 1,27$  per  $h/f = 1/5$ , ma per i più comuni valori di  $h/f$  dell'ordine di  $1/10, 1/20$  si ha  $m = 1,07, 1,02$ ).

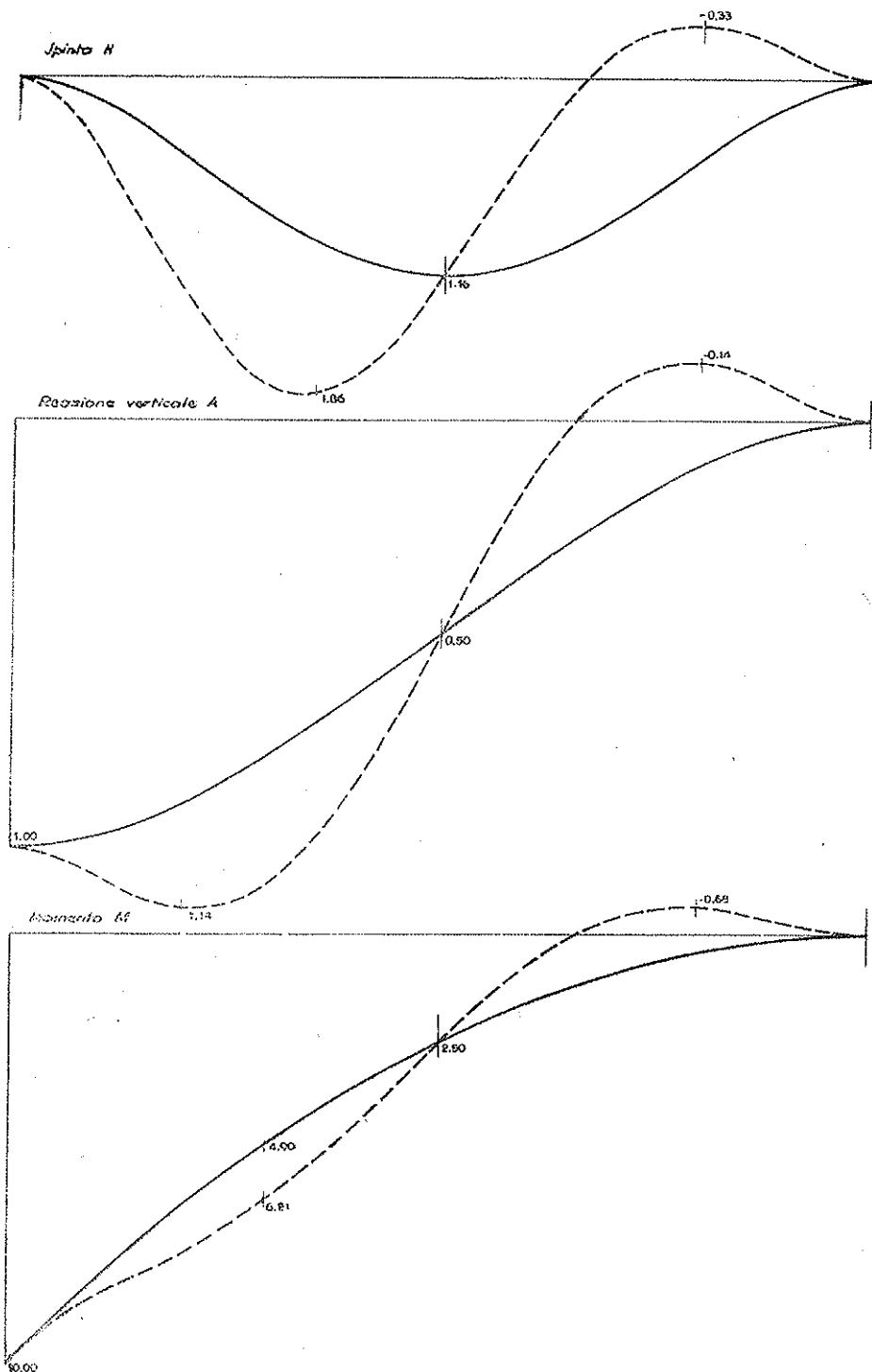


FIG. 11.

Linea d'influenza dei parametri  
della reazione d'impasto sinistra ridotta al baricentro elastico.  
Linea continua: arco libero - Linee a tratti: impalcato rigido ( $\lambda = 0$ ).

Inoltre è noto che negli archi reali in cui  $J \frac{dx}{ds}$  non è costante la sua variazione non influenzerà troppo i risultati essenziali del calcolo.

Qui si può osservare che l'essere effettivamente l'arco incorporato con l'impalcato in chiave equivale ad una reale diminuzione del peso elastico del tratto centrale dell'arco e quindi ad una variazione assai minore di  $J \frac{dx}{ds}$ . Sembra così legittimo trattare, agli effetti di ricerche di questo genere, gli archi come archi parabolici a peso elastico uniformemente distribuito sull'orizzontale.

A titolo d'esempio dico che per il ponte sull'Erno a Gignese, schizzato in figura 1, i calcoli eseguiti con metodo grafico-analitico hanno dato risultati concordanti con le formule qui trovate entro il 5% nel caso di impalcato perfettamente rigido. Negli altri casi, assumendo  $J_0$  uguale al momento d'inerzia dell'arco in chiave, si esagera la cedevolezza dell'arco rispetto a quella del sistema d'impalcato. Se però si introduce nelle formule il peso elastico effettivo dell'arco, si ristabilisce la concordanza entro meno del 10% e probabilmente non si può pretendere maggior precisione nel valutare l'effetto studiato.

Per il ponte citato, tenendo conto nel caso effettivo della forte forza d'attrito eccitata dal peso delle campate dei viadotti d'accesso gravanti direttamente sui piloni di spalla, nonchè dei nuovi valori delle spinte nella verifica delle sezioni, è risultato che a parità di  $\sigma_{\max}$ , l'intensità del sovraccarico accidentale, prevista in 400 kg/mq per l'arco, potrebbe portarsi a 600 kg/mq.

Per  $\lambda=0$  si arriva quasi ad 800 kg/mq ed avendo presente la differenza fra arco reale ed arco parabolico, e soprattutto quanto già detto sul coefficiente  $\mu$ , si comprende come ciò sia d'accordo con i vantaggi percentuali precedentemente calcolati.

Nel ponte di Gignese l'esistenza dell'attrito fa sì che per carichi non troppo forti il regime statico del ponte sia sensibilmente quello del caso  $\lambda=0$ .