PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

*ACTA*
*Vol. IX - N. 22*
pag. 229-234

# SUL PASSAGGIO DA CERTE EQUAZIONI ALGEBRICO-FUNZIONALI A QUELLE INTEGRO-FUNZIONALI ED ESTENSIONE DI ALCUNE PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL NUCLEO RISOLVENTE GENERALIZZATO (*)

GIULIO PLATONE

SVMMARIVM. — Auctor docet quomodo a quibusdam aequationibus algebrico-functionalibus transiri possit ad aequationes integro-functionales; determinat praeterea nonnullas praecipuas proprietates nuclei resolventis generalioris.

1. - Risolviamo anzitutto il sistema algebrico funzionale

$$\left\{\begin{array}{ll} f(\lambda_1, z) - f(\lambda_2, z) \equiv (\lambda_1 - \lambda_2) f(\lambda_1 z) f(\lambda_2 z) & \\ \quad f(\lambda, 0) \equiv 0 & f(0, z) \equiv z \end{array}\right. \tag{1}$$

dove $f(\lambda, z)$ è una funzione analitica delle due variabili $\lambda$, $z$, regolare nell'intorno dell'origine $\lambda = z = 0$.

Intanto per le ipotesi poste la $f(\lambda, z)$ potrà ovviamente rappresentarsi con l'elemento

$$f(\lambda, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \lambda^i z^j = \sum_{j=1}^{\infty} A_j z^j \tag{2}$$

in cui si risulta:

$$a_{i,0} = 0 \qquad a_{0,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } j \neq 1 \\ 1 & \text{per } j = 1 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 5 giugno 1945.

e dove si è posto

$$[3] \qquad A_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\lambda^i \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Se ora rappresentiamo con $A_j'$ e $A_j''$ i valori che il secondo membro della [3] assume rispettivamente per $\lambda = \lambda_1$ e per $\lambda = \lambda_2$, ne consegue che se la [2] soddisfa la [1] dovrà necessariamente essere:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j' z^j - \sum_{j=1}^{\infty} A_j'' z^j = (\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{j=1}^{\infty} A_j' z^j \sum_{j=1}^{\infty} A_j'' z^j$$

da cui, moltiplicando alla Cauchy (com'è lecito) e ponendo

$$P_j = A'_1 A''_{j-1} + A'_2 A''_{j-2} + \ldots + A'_{j-1} A''_1$$

si ricava, per $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j' - A_j''}{\lambda_1 - \lambda_2} z^j = \sum_{j=1}^{\infty} P_j z^j$$

e risultando

$$\frac{A_j' - A_j''}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}(\lambda_1^{i-1} + \lambda_1^{i-2}\lambda_2 + \ldots + \lambda_1\lambda_2^{i-2} + \lambda_2^{i-1})$$
$$(j = 1, 2, \ldots)$$

dovrà aversi, per il principio d'identità

$$[4] \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}(\lambda_1^{i-1} + \lambda_1^{i-2}\lambda_2 + \ldots + \lambda_2^{i-1}) = A'_1 A''_{j-1} + A'_2 A''_{j-2} + \ldots + A'_{j-1} A''_1$$
$$(j = 1, 2, \ldots)$$

Da questa, tenendo presente che dev'essere $f(0, z) = z$, si ricava, per $j = 1$

$$a_{i,1} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq 0 \\ 1 & \text{per } i = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$A_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i1} \lambda^i = 1 \ ;$$

ed in generale

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j-1 \\ 1 & \text{per } i = j-1 \end{cases}$$

e pertanto

$$A_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i1} \lambda^i = \lambda^{j-1} \ .$$

Dunque, se una funzione analitica, regolare nell'intorno del punto $\lambda = z = 0$ soddisfa la [1] è necessariamente della forma

$$[5] \qquad f(\lambda, z) = z + \lambda z^2 + \lambda^2 z^3 + \ldots = \frac{z}{1-\lambda z}$$

e siccome risulta manifestamente

$$\frac{z}{1-\lambda_1 z} - \frac{z}{1-\lambda_2 z} = (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{z}{1-\lambda_1 z} \cdot \frac{z}{1-\lambda_2 z}$$

ne consegue che la [5] è l'unica soluzione del sistema funzionale [1] nel campo delle funzioni analitiche di $\lambda, z$, regolari nell'intorno dell'origine $\lambda = z = 0$.

2. - Denotiamo(1) ora con $A(y) = A(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ una funzione sommabile nell'insieme E, limitato e misurabile secondo Lebesgue, dello spazio $S_r^y(y_1, y_2, \ldots, y_r)$.

Eseguiamo sulla [1], il che è lecito, una trasformazione di Volterra estesa (2). Sostituiamo cioè la variabile $z$ con una funzione

(1) Per le notazioni mi attengo a quelle del Prof. Picone ed a quelle da me usate nei lavori di cui alle note (2), (6).

(2) G. Platone, *Sulle equazioni integrali a nucleo sommabile*, in corso di pubblicazione. In questa memoria estendo la teoria della composizione del Volterra-Pérès alla composizione col *peso* $A(y)$, di funzioni quasi continue e *pseudo limitate*, da me introdotta.

$k(x,y) \equiv k(x_1, x_2, ..., x_r; y_1, y_2, ..., y_r)$ quasi continua [3] e pseudo limitata [4] nell'insieme $E^{(2)} \equiv E.E$ dello spazio $S_{2r}^{x,y} \equiv (x_1, x_2, ..., x_r; y_1, y_2, ..., y_r)$ e consideriamo i prodotti e le potenze della funzione come prodotti e potenze di composizione generalizzata col peso $A(y)$.

Si otterrà – per il teorema fondamentale del VOLTERRA sulla risoluzione delle equazioni integrali, nella forma da me estesa [5] – che la relazione integro-funzionale

$$[1'] \qquad \gamma(x,y;\lambda_1) - \gamma(x,y;\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_E A(\xi)\,\gamma(x,\xi;\lambda_1)\,\gamma(\xi,y;\lambda_2)\,d\xi$$

è soddisfatta, dalla serie di composizione col peso $A(y)$

$$[5'] \qquad \gamma(x,y;\lambda) = k(x,y) + \lambda \overset{A}{k^2}(x,y) + \lambda^2 \overset{A}{k^3}(x,y) + \dots$$

dove $k(x,y)$ rappresenta una qualunque funzione quasi continua e pseudo limitata in $E^{(2)}$. Viceversa la [5'], che chiameremo ancora *nucleo risolvente* col *peso* $A(y)$ relativo alla funzione quasi continua e pseudo limitata $k(x,y)$, dà la soluzione generale (dipendente dall'arl'arbitrarietà del nucleo $k(x,y)$) della [1'] nel senso che ogni soluzione della [1'] è un nucleo risolvente col peso $A(y)$.

Invero se $f(x,y;\lambda)$ è soluzione della [1] si ha:

$$[6] \qquad f(x,y;\lambda_1) - f(x,y;\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_E A(\xi)\,f(x,\xi;\lambda_1)\,f(\xi,y;\lambda_2)\,d\xi$$

la quale, per $\lambda_1 = \lambda$ e $\lambda_2 = 0$, e ponendo

$$f(x,y;0) = k(x,y) \ ,$$

ci dice che $f(x,y;\lambda)$ è soluzione dell'equazione di FREDHOLM estesa

$$[7] \qquad f(x,y;\lambda) - k(x,y) = \lambda \int_E A(\xi)\,\gamma(x,\xi;\lambda)\,k(\xi,y)\,d\xi$$

---

(3) Quasi continua nel senso di TONELLI.

(4) Pseudo limitata nel senso di PICONE. (Cfr. PICONE, *Fondamenti di analisi funzionale lineare*, pag. 201).

(5) G. PLATONE, *mem. cit.* in (2), n. 12.

Ma, come ho dimostrato nella memoria di cui alle note (2) e (6), questa equazione ammette, nel campo delle funzioni $f(x, y; \lambda)$, quasi continue e pseudo limitate rispetto ad $x, y$ per $|\lambda|$ sufficientemente piccolo, la *sola* soluzione

$$f(x, y; \lambda) = k(x, y) + \lambda \overset{A}{k^2}(x, y) + \lambda^2 \overset{A}{k^3}(x, y) + \dots$$

e pertanto, come avevamo anzi affermato, ogni soluzione di [1] è del tipo [5'], ossia è un nucleo risolvente col peso $A(y)$.

Del resto allo stesso risultato si può giungere anche dividendo ambo i membri della [6] per $\lambda_1 - \lambda_2$, passando al limite per $\lambda_2 \to \lambda_1$, e ponendo poi $\lambda_1 = \lambda$. Si ottiene così la relazione

$$\frac{df(x, y; \lambda)}{d\lambda} = \overset{A}{f^{(2)}}(x, y; \lambda)$$

anch'essa caratteristica per i nuclei risolventi generalizzati col peso $A(y)$, dalla quale se ne ricava, successivamente

$$\frac{d\left(\overset{A}{f}\right)^n}{d\lambda^n} = n! \overset{A}{f^{n+1}} ,$$

che ci ridà, per la soluzione $f(x, y; \lambda)$, lo sviluppo [5']. Pertanto la relazione integro funzionale [1'] è caratteristica per i nuclei risolventi col peso $A(y)$.

*Osservazione*: Rilevo, per inciso, che per $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda$ la [6] ci dà ancora

$$k(x, y) - f(x, y; \lambda) = -\lambda \int_E A(\xi) k(x, \xi) \gamma(\xi, y; \lambda) d\xi$$

e quindi, confrontando con la [7]

$$(k \times \gamma)_A = (\gamma \times k)_A ;$$

ossia il nucleo risolvente, rispetto alla funzione peso $A(y)$, relativo alla funzione quasi continua e pseudo limitata $k(x, y)$ è *permutabile* (7), con questa, rispetto alla funzione peso $A(y)$. (*Principio di Reciprocità*).

(6) G. Platone, *Teorema d'unicità per le equazioni integrali a nucleo sommabile d'ordine* $m \leq +\infty$, in corso di stampa.

(7) Cfr. G. Platone, *mem. cit.* in (2), n. 11.