PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 12
pag. 127-134

SULLE SUPERFICIE UGUALMENTE ILLUMINATE DA UNA SORGENTE LUMINOSA (*)

GIOVANNI SANSONE

SVMMARIVM. — Auctor aequationem differentialem partialem cuiusvis superficiei, quae a puncto lucido aequalem ubique luminis quantitatem accipit, integrat.

1. – Nel quarto dei suoi opuscoli analitici PIETRO PAOLI (1) *determinava le curve piane* Γ *i cui punti sono tutti ugualmente illuminati da una sorgente luminosa* O *appartenente al piano della curva.*

Riferito il piano di Γ ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y con l'origine in O, poichè la distanza di O dalla retta tangente alla curva Γ in un suo punto (x, y) ha l'espressione $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ e l'intensità dell'illuminamento prodotto da O in (x, y) è proporzionale a $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le coordinate del punto (x, y) di Γ debbono soddisfare l'equazione di PAOLI (2)

$$[1] \qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 1 \; .$$

Passando dalle coordinate cartesiane x, y alle coordinate polari ρ, θ

$$[2] \qquad x = \rho \cos \theta \, , \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 26 agosto 1945.

(1) PIETRO PAOLI *liburnensis*, *Opuscula Analytica* (Liburni, 1786), pagg. IV + 175 + 1 tavola; Opusculum IV, De problemata Optica, ubi de quibusdam aequationibus differentialibus, pagg. 168-173.

(2) Cfr. P. PAOLI, *op. cit.* in (1), pag. 168.

e come dice L. MASCHERONI (¹) operando con la trasformazione di PAOLI [2], dalla [1] si ottiene l'equazione differenziale a variabili separabili

$$\sqrt{1-\rho^4}\, d\theta = \rho\, d\rho \ ;$$

questa possiede l'integrale

[3] $$\rho = 1$$

cui corrisponde la circonferenza con centro nell'origine O e raggio unitario, e l'integrale dell'equazione differenziale

$$(1-\rho^4)^{-1/2}\, d\rho^2 = d(2\theta)$$

il quale vale

$$\operatorname{arc\,cos} \rho^2 = 2\theta + c \ , \qquad (c = \text{cost.}) \ ,$$

ovvero

[4] $$\rho^2 = \cos(2\theta + c) \ .$$

Questo problema fu ripreso nel 1781 da VITTORIO FOSSOMBRONI nel suo *Saggio di ricerche sull'intensità del lume* (²); egli osservava esplicitamente che la [4] è l'equazione della leminiscata di GIACOMO BERNOULLI (³).

Il FOSSOMBRONI considerava altri problemi della stessa natura e chiudeva il suo lavoro (⁴) determinando l'espressione analitica dell'illuminamento prodotto da una sorgente luminosa situata nell'origine O su un elemento della superficie S di equazione.

S: $z = z(x, y)$, [x, y, z coordinate cartesiane ortogonali], di centro (x, y, z).

Poichè la distanza dell'ortgine O dal piano tangente alla S in (x, y, z) vale

$$\frac{\left| x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z \right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \ ,$$

(¹) L. MASCHERONI, *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, P. I, Pavia 1790 (pagg. 66-71); Pavia 1792 (pagg. 55-58); Cfr. L. EULERI, *op. Omnia*, (1), XII, (pagg. 482-487), pag. 483; (pagg. 539-542), pag. 539. Cfr. anche G. VIVANTI, *Nuovi esercizi di Analisi infinitesimale tratti dalle Matematiche Applicate*, (Pavia, 1916), pagg. 273-274.

(²) Arezzo, 1781, pag. XXVIII + 112 + 1 tavola.

(³) V. FOSSOMBRONI, *op. cit.*, pag. 58.

(⁴) Cfr. V. FOSSOMBRONI, *op. cit.*, pag. 106.

l'illuminamento prodotto da O sull'elemento considerato è proporzionale a

$$\frac{\left| x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z \right|}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \,,$$

talchè l'equazione delle superficie ugualmente illuminate dall'origine O in ogni loro punto si ottiene integrando l'equazione alle derivate parziali

$$[5] \qquad \frac{\left| x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z \right|}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = 1 \,. \qquad [1]$$

Il FOSSOMBRONI nel lavoro ricordato non andava oltre nella questione, e scopo della presente nota è appunto l'integrazione dell'equazione [5] che non sembra sia stata da altri conseguita.

2. – Passando dalle coordinate cartesiane x, y, z alle polari ρ, θ, φ con il polo in O e l'asse polare coincidente con l'asse z si ha

$$[6] \qquad x = \rho \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,, \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,, \quad z = \rho\cos\theta\,,$$

e se

$$S : \rho = \rho(\theta, \varphi)$$

è l'equazione della superficie S si ha anche [2]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\rho\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta} - \operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}}{\left(\rho\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)\operatorname{sen}\theta} \,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\rho\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta} + \cos\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}}{\left(\rho\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)\operatorname{sen}\theta} \,,$$

---

[1] Evidentemente se S è una superficie che soddisfa il problema, qualunque superficie omotetica ad S rispetto al centro O, soddisfa il problema stesso.

[2] Cfr. ad es. G. SANSONE, «Lezioni di Analisi Matematica», II (Padova 1941), Cap. II, n. 19, pag. 113.

e la [5] tenendo conto delle [6] e di quest'ultime diventa

$$\rho^2\left[\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2\right] = \operatorname{sen}^2\theta \quad ,$$

ovvero

$$[7] \qquad (\rho^2)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\rho^2}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial\rho^2}{\partial\varphi}\right)^2 = 1 \ .$$

Posto

$$[8] \qquad \boxed{\rho^2 = \cos 2\tau}$$

dalla [7] si trae per $\tau(\theta, \varphi)$ l'equazione

$$\left[1 - \left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\right)^2\right] \operatorname{sen}^2 2\tau = 0 \quad ,$$

e perciò $\tau = 0$ e

$$[9] \qquad \boxed{\rho^2 = 1} \quad ,$$

la quale rappresenta la sfera con centro nell'origine e raggio unitario, oppure

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\right)^2 = 1 \ .$$

Da questa otteniamo

$$[10] \qquad \frac{\partial\tau}{\partial\theta} = \operatorname{sen}\lambda \ , \quad \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = \operatorname{sen}\theta\cos\lambda \ ,$$

e le condizioni di integrabilità di questo sistema dànno per la funzione $\lambda(\theta, \varphi)$ l'equazione alle derivate parziali

$$[11] \qquad \boxed{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} + \cos\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} = \cos\theta\cos\lambda} \quad ,$$

talchè se $\lambda(\theta, \varphi)$ è una soluzione di questa equazione, dalle [10] otteniamo

$$[12] \quad \tau(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta)\int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos\lambda(\theta, \varphi)\, d\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{sen}\lambda(\theta, \varphi_0)\, d\theta + c \ , \quad [c = \mathrm{cost}] \ .$$

Abbiamo dunque che *le superficie* S *cercate, oltre le sfere unitarie* (1), *sono le superficie di equazione* [8], *ove* $\tau = \tau(\theta, \varphi)$ *è determinata dalla* [12], [2], *essendo in quest'ultima* $\lambda(\theta, \varphi)$ *una soluzione dell'equazione* [11].

3. – È facile conseguire l'integrazione dell'equazione [11]. Si osservi infatti che a tale equazione è associato il sistema differenziale ordinario

$$[13] \qquad \frac{d\lambda}{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda} = \frac{d\varphi}{\cos\lambda} = \frac{d\lambda}{\cos\theta\cos\lambda} .$$

Si ha da questo

$$\operatorname{ctg}\theta \, d\theta = \operatorname{tg}\lambda \, d\lambda , \quad d \log \operatorname{sen}\theta \cos\lambda = 0 ,$$

quindi

$$[14] \qquad \operatorname{sen}\theta \cos\lambda = c_1 , \qquad (c_1 = \text{cost.}) ,$$

perciò

$$d\varphi = \frac{d\lambda}{\cos\theta} = \frac{\cos\lambda \, d\lambda}{\sqrt{\cos^2\lambda - c_1^2}} = \frac{d(1-c_1^2)^{-1/2} \operatorname{sen}\lambda}{\sqrt{1 - [(1-c_1^2)^{-1/2} \operatorname{sen}\lambda]^2}} ,$$

da cui

$$[15] \qquad \varphi = \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\sqrt{1-c_1^2}} = c_2 , \qquad (c_2 = \text{cost.}) .$$

Le [14] e [15] integrano il sistema differenziale [13], e poichè si ha da esse

$$\operatorname{sen}\theta\cos\lambda = c_1 , \qquad \varphi - \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\lambda}} = c_2$$

ne viene che l'*integrale generale dell'equazione* [11] (come si può peraltro verificare direttamente) *ha l'espressione*

$$[16] \qquad \boxed{\varphi - \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\lambda}} = \mathrm{F}(\operatorname{sen}\theta\cos\lambda)}$$

dove F *è una funzione arbitraria del suo argomento* (1).

(1) Cfr. ad es. *a*) U. Dini, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, II, (2ª parte), (Pisa 1915), pagg. 892-893; *b*) É. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, II, (Paris, 1925), pag. 575.

Per le cose dette se $\lambda = \lambda(\theta, \varphi)$ è una soluzione di questa equazione, la superficie $\rho^2 = \cos 2\tau(\theta, \varphi)$, dove $\tau(\theta, \varphi)$ si determina con la [12] fornisce una superficie S la quale gode la proprietà richiesta.

4. – È facile vedere come si determina la F quando si prescriva alla superficie S il passaggio per una curva

$$\Gamma: \qquad \rho = \rho_0(\varphi), \qquad [0 \leqslant \rho_0(\varphi) \leqslant 1]$$

del piano (x, y), $\left[\theta = \frac{\pi}{2}\right]$.

Definita infatti la funzione $\tau_0(\varphi)$ coll'equazione

$$\tau_0(\varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos} \rho_0^2(\varphi)$$

si ha dalle [8] e [12], ponendo in quest'ultima $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\tau_0(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \lambda\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) d\varphi + c , \qquad [c = \text{cost.}] ,$$

quindi

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = \operatorname{arc\,cos} \tau'_0(\varphi) ,$$

e dalla [16]

$$\varphi - \frac{\pi}{2} = F[\tau'_0(\varphi)]$$

che determina appunto la funzione F.

Con lo stesso procedimento si determina la F quando si prescriva alla superficie S il passaggio per una curva appartenente al cono circolare con il vertice nell'origine, con l'asse coincidente con l'asse polare, e di angolo conico θ_0.

5. – *a*) Esaminiamo i casi particolari in cui si abbia

$$[17] \quad \varphi - \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \lambda}} = \text{cost.}, \quad \operatorname{sen} \theta \cos \lambda = \text{cost.} .$$

Nel primo caso, a meno di una rotazione attorno all'asse polare potrà supporsi

$$\varphi = \text{arc sen} \frac{\text{sen}\,\lambda}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\lambda}} ,$$

da cui si ottiene

$$\text{tg}\,\lambda = \cos\theta\, \text{tg}\,\varphi$$

e il sistema [10] diventa

$$\frac{\partial\tau}{\partial\theta} = \frac{\cos\theta\, \text{tg}\,\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\theta\, \text{tg}^2\varphi}} , \quad \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\theta\, \text{tg}^2\varphi}} ,$$

quindi

$$\tau = \text{arc sen}\,(\text{sen}\,\varphi\, \text{sen}\,\theta) ,$$

ed essendo $\rho^2 = \cos 2\tau = 1 - 2\,\text{sen}^2\tau$ si ha $\rho^2 = 1 - 2\,\text{sen}^2\varphi\,\text{sen}^2\theta$ e moltiplicando per ρ^2 e tenuto conto delle [6] abbiamo infine

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + z^2 - y^2$$

che è l'equazione della superficie ottenuta ruotando di un giro completo attorno all'asse y la lemniscata di Bernoulli $(y^2+z^2)^2 - (z^2 - y^2) = 0$ del piano yz, con il nodo nell'origine, e il semiasse focale appartenente all'asse z e uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

È manifesto del resto, per le cose dette al n. 1, che una tale superficie soddisfa il problema.

c) Valga ora la seconda delle [17], si abbia cioè

$$\text{sen}\,\theta \cos\lambda = c , \qquad (c = \text{cost.}) ;$$

il sistema [10] si scrive

$$\frac{\partial\tau}{\partial\theta} = \frac{\sqrt{\text{sen}^2\theta - c^2}}{\text{sen}\,\theta} , \quad \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = c ,$$

quindi

$$\tau = \int \frac{\sqrt{\text{sen}^2\theta - c^2}}{\text{sen}\,\theta}\, d\theta + c\varphi + c_1 , \quad (c_1 = \text{cost.}) ,$$

e poichè

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - c^2}}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - c^2}}\, d\theta - c^2 \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - c^2}} =$$

$$= -\operatorname{arc\,sen} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-c^2}} - c \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - c^2}}{\sqrt{1-c^2}\operatorname{sen}\theta},$$

le superficie S corrispondenti al caso in esame hanno l'equazione

$$\rho^2 = \cos 2\left[c\varphi - \operatorname{arc\,sen} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-c^2}} - c \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - c^2}}{\sqrt{1-c^2}\operatorname{sen}\theta} + c_1\right]$$

con c e c_1 costanti.

Nel caso particolare di $c = 0$ si ha $\rho^2 = \cos 2(\theta - \theta_0)$, $\theta_0 =$ costante, e questa rappresenta l'equazione della ruperficie di rotazione ottenuta facendo ruotare una lemniscata di Bernoulli con il nodo nell'origine di semiasse focale $\frac{1}{\sqrt{2}}$, e in un piano per l'asse polare, di un giro completo attorno a tale asse.